

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica

Deformaciones

Curso : Resistencia de Materiales
Año : 2019

1. Resistencia de Materiales

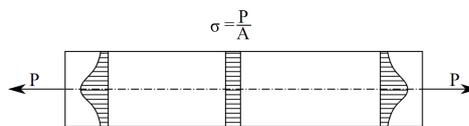
Es una rama de la mecánica aplicada que trata del comportamiento de los cuerpos sometidos a diversas cargas, con el objetivo de determinar los esfuerzos, deformaciones, desplazamientos y sus dependencias de las cargas que actúan sobre ella.

2. Consideraciones del Curso

En el curso de resistencia de materiales, para la aplicación de la teoría se debe considerar que el material que compone los eslabones analizados es homogéneo, isotrópico y continuo; esto quiere decir que, el material internamente es idéntico entre si, las propiedades que posee son idénticas sin importar la dirección y sentido. Junto con lo anteriormente mencionado se agrega las teorías de esfuerzo y deformación, ya mencionados en el curso de materiales para ingeniería. Además de lo señalado, se recomienda al estudiante que revise en sus ecuaciones y cálculos, la homogeneidad dimensional, es decir, si se esta trabajando en el SI, que todos los factores estén en el mismo sistema y corroborando que los prefijos coincidan con los resultados.

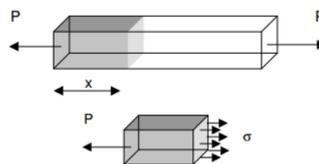
3. Principio de Saint-Venant

El principio de Saint-Venant establece que existe una distribución de esfuerzos en el material en dirección de la carga, y que en las secciones cercanas a la aplicación de las fuerzas se concentra el esfuerzo. Para análisis en el curso se considerará este principio para definir los esfuerzos, para ello el área a lo largo del eje se no debe tener cambios bruscos o poseer una área constante .



4. Esfuerzo Normal

El esfuerzo axial(o normal) una consecuencia de un fuerza que se está ejerciendo en el material en dirección al eje del elemento, para casos simples se puede analizar directamente con las fuerzas externas, pero para sistemas complejos se recomienda analizar la fuerza interna del material o eslabón. Para obtener una relación entre la deformación y la fuerza aplicada se relaciona la ley de Hooke y el principio de Saint-Venant.



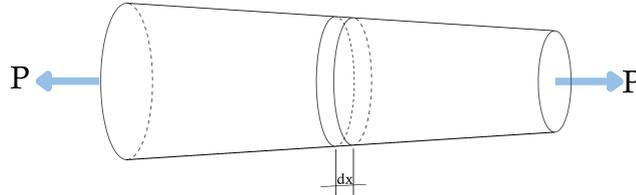
$$\text{Ley de Hooke: } \sigma = \varepsilon E$$
$$\text{Esfuerzo Normal: } \sigma = \frac{P}{A}$$

De las ecuaciones ya presentadas se tiene la siguiente relación para la deformación:

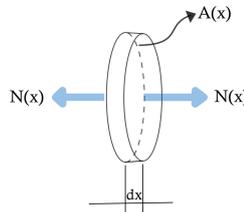
$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

4.1. Esfuerzo Normal, en áreas variables y/o fuerzas variables

En ocasiones las fuerzas aplicadas no son uniformes a lo largo del material y/o el material no posee una área transversal continua, por lo que, se requiere un análisis de un elemento diferencial de espesor dx y área $A(x)$, el cual, soporta una carga $N(x)$. Con los datos anteriores se puede obtener el $d\delta$, como se describe a continuación:



Analizando el diferencial, se tiene lo siguiente:



Calculando la deformación en el diferencial de área:

$$\delta = \frac{PL}{EA} \implies d\delta = \frac{N(x)dx}{EA(x)}$$

$$\delta = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EA(x)}$$

Y para elementos que son continuos por tramos, se puede utilizar esta expresión:

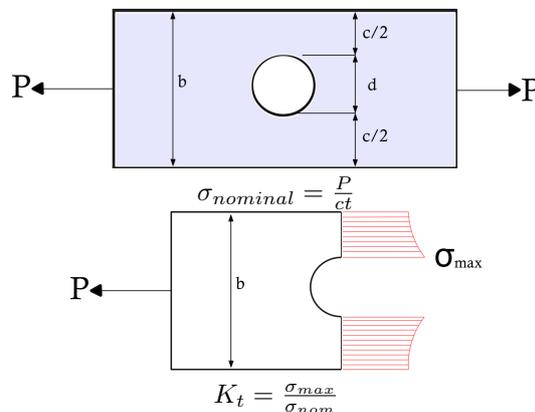
$$\delta = \sum_{i=0}^n \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

4.2. Factores de Concentración de esfuerzos

Cuando se determinan los esfuerzos en barras cargadas axialmente, es usual utilizar la fórmula $\sigma = P/A$. Pero en esta fórmula no contempla agujeros, ranuras, muescas, filetes u otros cambios abruptos en la geometría a lo largo de la barra. Estas discontinuidades se les llama **elevadores de esfuerzos**¹. Para ello existen casos particulares de discontinuidades como los siguientes:

1. Agujero en placa

Se tiene un placa de Ancho b , espesor t y una perforación circular de diámetro d , la cual esta sometida a una fuerza de tensión P , como se señala en la siguiente figura:



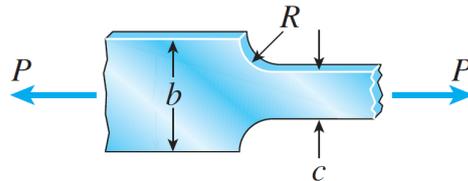
¹Para profundizar en este contenido, revise: James M. Gere y Barry J. Goodno, Mecánica de materiales, 7ª Edición. Pagina 164-169.

Donde los valores de K_t se pueden obtener de la siguiente formula:

$$K_t = -1,322\left(\frac{d}{b}\right)^{0,5819} + 3,04$$

2. Barras planas con filetes en los rebordes

Se tiene una placa plana de espesor t , y de dos anchos, b y c , con un filete de radio R , como se señala en la siguiente figura:



$$\sigma_{nominal} = \frac{P}{ct}$$

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$$

Donde los valores de K_t se pueden obtener de la siguiente formula:

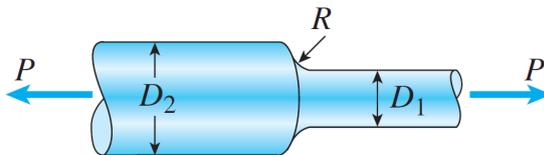
$$K_t = A\left(\frac{R}{c}\right)^B$$

Donde A y b se puede obtener de la siguiente tabla:

b/c	A	B
2.00	1.156	-0.342
1.50	1.152	-0.295
1.30	1.092	-0.278
1.20	1.042	-0.264
1.10	0.943	-0.248

3. Barras redondas con filetes en los rebordes

Se tiene una barra redonda de diámetros D_1 y D_2 , con un filete entre ellas de radio R , como se señala en la siguiente figura:



$$\sigma_{nominal} = \frac{4P}{\pi D_1^2}$$

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$$

Donde los valores de K_t se pueden obtener de la siguiente formula:

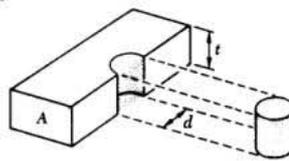
$$K_t = A\left(\frac{R}{D_1}\right)^B$$

Donde A y b se puede obtener de la siguiente tabla:

D_2/D_1	A	B
2.00	1.156	-0.342
1.50	1.152	-0.295
1.30	1.092	-0.278
1.20	1.042	-0.264
1.10	0.943	-0.248

4.3. Esfuerzo de Aplastamiento

Es un esfuerzo normal al área, pero se le llama de esta manera por que el área es parte de alguna perforación por la cual pasa un pasador, el cual carga contra el área que esta descrita como área mojada de la perforación. Para ejemplificarlo mejor se tiene el siguiente figura: Se tiene un pasador de diámetro d que soporta una carga P y se sostiene en la placa de espesor t



Donde el esfuerzo de aplastamiento es por el area de contacto de la placa y el pasador, y queda definido de la siguiente manera:

$$\sigma = \frac{P}{td}$$

5. Ley de Hooke generalizado

Experimentalmente se demuestra que al aplicar una carga axial, las dimensiones transversales sufren alteraciones. En este caso se tiene una barra en tracción en el eje X.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{L_x}{L_{x0}} > 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{L_y}{L_{y0}} < 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{L_z}{L_{z0}} < 0\end{aligned}$$

Conservando la hipótesis que el material es isótropo, las deformaciones transversales son iguales:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z$$

En 1811 Simeon Poisson, determino que existe una relación entre las deformaciones transversales y la deformación axial, siempre que esta deformación este bajo el limite de proporcionalidad, con esta relación se estableció el módulo de Poisson ν , la cual se define de la siguiente manera:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

Relacionando estas ecuaciones con la ley de Hooke con el módulo de Poisson para una estado triaxial de esfuerzo se tiene las siguientes ecuaciones:

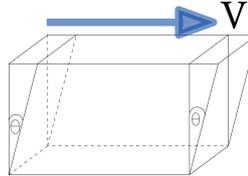
$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x))\end{aligned}$$

Junto con lo anterior ya mencionado el módulo de Poisson tiene relación entre los módulos de elasticidad a la tracción E y elasticidad para deformaciones angulares o cortes G

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

6. Esfuerzo cortante

Es un esfuerzo que se genera por una fuerza que es perpendicular al eje del material y además, el área de estudio es paralela a la fuerza. Este tipo de esfuerzos son más comunes en los pasadores, pernos, etc. y en los procesos de cizallado. Para ello existe la ley de Hooke para esfuerzo cortante.



Donde el esfuerzo cortante queda establecido con la siguiente relación:

$$\tau = G\theta$$

Y estableciendo la fuerza cortante V y con un área A_S se establece la siguiente relación:

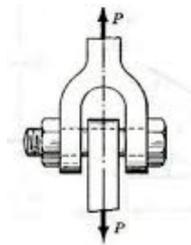
$$\tau = \frac{V}{A_S}$$

Y uniendo las dos ecuaciones anteriores se establece el desplazamiento producido por la deformación angular:

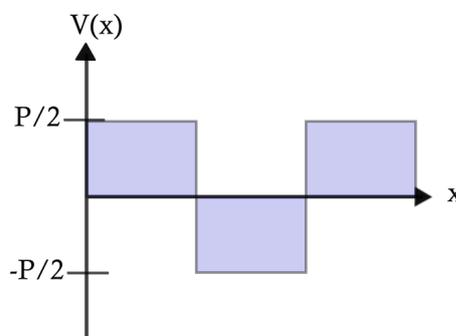
$$\delta_S = \frac{VL}{A_S G}$$

En la aplicación de lo establecido anteriormente, se utiliza más comúnmente en pasadores y pernos, para establecer el esfuerzo cortante en los casos que no es un corte simple, se puede utilizar el conocimiento ya adquirido en el curso estática.

Ejemplo se analiza un perno con las solicitaciones señaladas:



para ello se realiza el diagrama de fuerzas cortante $V(x)$, y se analiza el punto más solicitado o alguno que sea estipulado.



Con ello se identifica que el esfuerzo cortante máximo es $\frac{P}{2}$ lo que implica que el esfuerzo cortante para este perno de radio r es:

$$\tau = \frac{V}{A_p} = \frac{P}{2\pi r^2}$$

7. Problemas Estáticamente Indeterminados

Son problemas donde el numero de incógnitas es mayor al numero de ecuaciones de equilibrio. Para ser resuelto se deben incluir *ecuaciones de compatibilidad*, las cuales relacionan las fuerzas del sistema con deformaciones o desplazamientos con la Ley de Hooke.

Procedimiento a seguir:

1. Realizar un diagrama de cuerpo libre y obtener las ecuaciones de equilibrio.
2. Ecuaciones de compatibilidad, para este punto se puede realizar un bosquejo de las deformaciones para establecer una relación.
3. Identificar el sistema de ecuaciones y encontrar la solución o las soluciones.

Las ecuaciones de compatibilidad para poder desarrollar un sistema, se pueden obtener de diferentes maneras, en este curso se describirán dos métodos, uno geométrico y otro energético.

8. Método energético: Teorema de Castigliano

El teorema de Castigliano establece que la derivada parcial de la energía total de deformación con respecto a cualquier fuerza aplicada en un cuerpo elástico conduce al desplazamiento bajo el punto de aplicación de esa fuerza en la misma dirección.

En otras palabras se tiene que establecer estas relaciones:

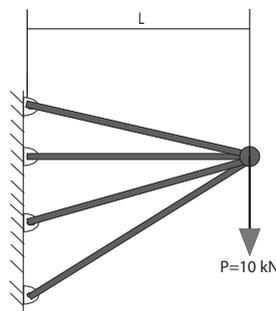
$$U = \sum_{i=1}^n \frac{P_i^2 L_i}{2E_i A_i}$$

$$\frac{dU}{dP_i} = \delta_i$$

Nota: En el caso de los problemas hiperestáticos, en los cuales se establezca más de una fuerza independiente, las derivadas de la ecuación de la energía respecto a esas fuerzas, se puede considerar como 0, ya que, si estas fuerzas están aplicadas en un mismo punto, distribución de fuerzas en cada una de ellas es baja (por lo mismo las deformaciones igual). Para establecer las fuerzas internas como independientes, se selecciona la misma cantidad de ecuaciones necesarias para resolver el sistema establecido.

$$\frac{dU}{dP_i} = 0$$

Ejemplo: Se tiene un sistema de 4 barras articuladas (a 30° entre ellas), las cuales convergen a un solo nodo, en el cual se aplica una carga vertical P (10[kN]) Como se describe en la siguiente figura (considerar de Módulo de elasticidad E y de área A para todas las barras):



Para desarrollar este sistema y conocer las fuerzas internas de cada una de ellas, se establece las condiciones de equilibrio mecánicas para un sistema 2D, pero en este caso particular solo analizará el nodo donde convergen las barras para simplificación del cálculo (se enumeran las barras comenzando con las superiores):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 \cos 30 + F_2 - F_3 \cos 30 - F_4 \cos 60 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 \sin 30 + F_3 \sin 30 + F_4 \sin 60 = P$$

Analizando el caso, se tiene 4 incógnitas, y por las condiciones de equilibrio se tiene 2 ecuaciones, por lo que nos faltan 2 ecuaciones para resolver el sistema. De manera arbitraria se establece lo siguiente:

$$F_1 ; F_4 : \text{Dependientes.}$$

$$F_2 ; F_3 : \text{Independientes.}$$

Se establece la ecuación de la energía para este caso:

$$U = \frac{F_1^2 L_1}{2EA} + \frac{F_2^2 L_2}{2EA} + \frac{F_3^2 L_3}{2EA} + \frac{F_4^2 L_4}{2EA}$$

Como se señaló anteriormente se puede establecer que las derivadas de las fuerzas dependientes respecto a las independientes se puede considerar como 0:

$$\frac{dU}{dF_3} = 0 \Rightarrow \frac{F_1 L_1}{EA} \frac{dF_1}{dF_3} + \frac{F_3 L_3}{EA} + \frac{F_4 L_4}{EA} \frac{dF_4}{dF_3}$$

De las ecuaciones de mecánica, derivadas respecto a F_3 , se puede obtener:

$$\frac{dF_1}{dF_3} = 0,5 ; \frac{dF_4}{dF_3} = -0,866$$

Remplazando y sustituyendo las Longitudes de las barras y simplificando las áreas y los módulos de elasticidad de establece la siguiente ecuación:

$$0,433F_1 + 0,866F_3 - 0,433F_4 = 0$$

De manera análoga a la anterior, se realiza con la fuerza independiente F_4 , obteniendo la siguiente ecuación:

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene lo siguiente:

$$F_1 = 0,458P = 4,58[KN]$$

$$F_2 = 0,145P = 1,45[KN]$$

$$F_3 = 0,793P = 7,93[KN]$$

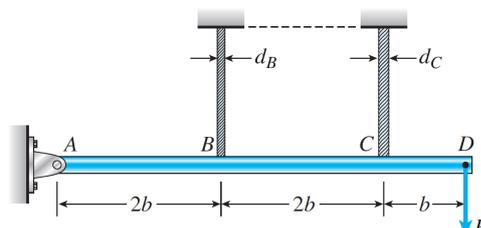
$$F_4 = 0,167P = 1,67[KN]$$

9. Método Geométrico: Para sistemas, en el que los nodos no posean unión de más de dos eslabones

En este método regularmente se tiene elementos elásticos, pero se considera un eslabón más rígido que el resto de eslabones en el sistema y se considerará que ese eslabón no se deformará (regularmente a lo largo de este eslabón se unen los demás). Y respecto a un sistema de referencia, se establece las direcciones de las deformaciones y el sentido, y se busca unir estas deformaciones con relaciones geométricas, para ello se recomienda realizar un bosquejo de ello, además de mantener consistencia entre lo establecido en el bosquejo y las ecuaciones mecánicas de equilibrio.

Como recomendación y para efectos prácticos se consideran que las deformaciones son muy pequeñas con respecto a las longitudes de los eslabones del sistema y con esta consideración se puede establecer que las relaciones trigonométricas como; $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ tienden a θ [rad] y 1 respectivamente. Además se mantiene la geometría del sistema, es decir, se conservan los ángulos sin considerar deformación.

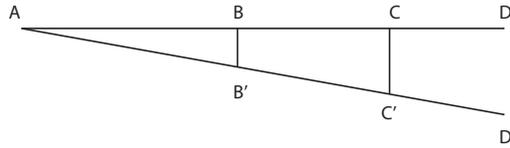
Ejemplo: Una barra rígida $ABCD$ está articulada en el extremo A y soportada por dos cables en los puntos B y C. El cable B tiene un diámetro $d_c = d_b = 20[mm]$ y longitudes iguales. una carga P actúa en el extremo D de la barra. Calcular las fuerzas de cada cables. (Módulo de elasticidad de los cables $E = 140[GPa]$. (vea la figura para referencias)



Para desarrollar este ejercicio, se plantea un equilibrio mecánico en 2D, pero para simplificación de los cálculos se realiza una sumatoria de momentos en el punto A :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2bF_B + 4bF_C - 5bP = 0$$

Realizando un bosquejo de las deformaciones se puede observar alguna relación geométrica para poder utilizarlas como ecuaciones de compatibilidad:



De la figura anterior se puede decir que:

$$B\bar{B}' = \delta_B ; C\bar{C}' = \delta_C$$

Del teorema de Tales, ya que los triángulos generados son semejantes se puede establecer la siguiente relación:

$$\frac{\delta_B}{2b} = \frac{\delta_C}{4b}$$

Reemplazando las deformaciones, en función de las fuerzas y de las propiedades y características, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{F_B L_b}{2bEA} = \frac{F_C L_c}{4bEA}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene los siguientes resultados:

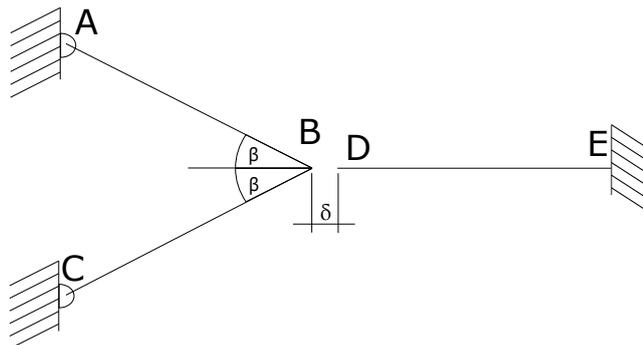
$$F_b = \frac{5PL_c}{2(4L_b+L_c)} ; F_c = \frac{5PL_b}{4L_b+L_c}$$

10. Método Geométrico: Para sistemas, en lo que los nodos posean unión de mas de dos eslabones

Este método se en nodos donde todos los elementos que se unen en el son elásticos, el método se desarrolla de manera análoga al anterior, es decir, se realiza un bosquejo en el cual se plantea la deformación de cada elemento (dirección y sentido), manteniendo consistencia con respecto a las ecuaciones mecánicas establecidas o por establecer. Para establecer relaciones geométricas se considera que las deformaciones son axiales al eje longitudinal de los eslabones, y tiene una rotación a un nuevo nodo con dirección ortogonal respecto a la deformación, esto se realiza con cada eslabón en unión al nodo, y se establece las relaciones geométricas con las consideraciones de deformaciones pequeñas y conservación de la geometría inicial del sistema.

Ejemplo:

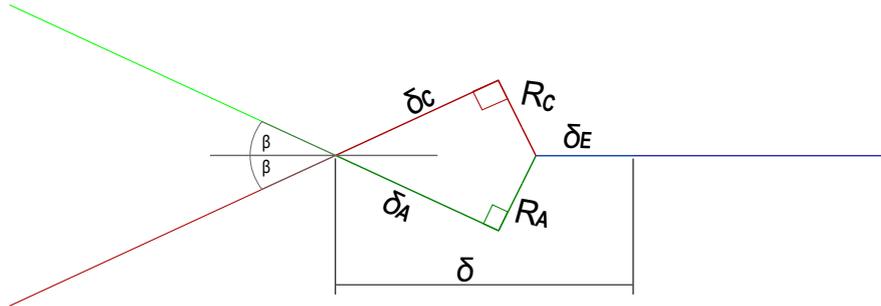
Se tiene una estructura de acero ($E = 210GPa$), la cual, posee un defecto de dimensionado, por lo que se ajusta mecánicamente. La longitud de las barras es $L_{AB} = L_{CB} = 1[m]$ Y $L_{DE} = 1,2[m]$, donde el área transversal de cada barra es $0,0009[mm^2]$ y las barras AB , CB poseen una inclinación respecto de la horizontal $\beta = 30^\circ$. Se pide las fuerzas en cada barra, después de unir los puntos B y D , los cuales estaban a $\delta = 0,001[m]$:



Para desarrollar este ejemplo, se tiene que proceder a establecer las condiciones de equilibrio, como las barras se tienen que estirar para producir la unión, se puede establecer como hipótesis que posterior a la unión, las barras están en tracción entre ellas:

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\rightarrow P_A \sin(\beta) - P_C \sin(\beta) = 0 \rightarrow P_A = P_C \\ \sum F_x = 0 &\rightarrow P_E - 2P_A \cos(\beta) = 0 \rightarrow P_E = 2P_A \cos(\beta)\end{aligned}$$

Como se puede observar, se requiere de ecuaciones de compatibilidad para poder obtener lo requerido, para ello se establece un bosquejo de como son las deformaciones de cada barra y una posición final de la unión de las barras:



En el bosquejo anterior se puede identificar que la deformación de cada una de las barras es en la misma dirección, y para la unión se establece una rotación perpendicular desde la dirección de la deformación.

Para establecer una ecuación de compatibilidad, se debe reconocer alguna relación entre las deformaciones, en este caso, se puede decir que la deformación δ es igual a la suma de las deformaciones de la barra E y la deformación de la barra B con una relación geométrica (se recomienda encontrar una línea con algún valor conocido y poder igualar su longitud con deformaciones o relaciones geométricas con deformaciones). Se puede establecer la ecuación de compatibilidad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\delta_A}{\cos(\beta)} + \delta_E \\ 0,001 &= \frac{P_A L_A}{E A \cos(\beta)} + \frac{P_E L_E}{E A}\end{aligned}$$

Desarrollando las ecuaciones, se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}P_A &= 58456,7[N] \\ P_C &= 58456,7[N] \\ P_E &= 101250[N]\end{aligned}$$

11. Deformación Térmica

En los materiales existe una dilatación o contracción con una variación de temperatura. Y esta deformación tiene relación con el material, su longitud inicial y la variación de temperatura entre la temperatura de análisis con la temperatura en la cual se tiene la longitud inicial.

$$\delta_T = \alpha L_0 \Delta T$$

Donde:

α : es una constante propia de materia en unidad de temperatura elevada a menos uno (T^{-1}).

L_0 : es Longitud a temperatura inicial T_i , en unidad de longitud.

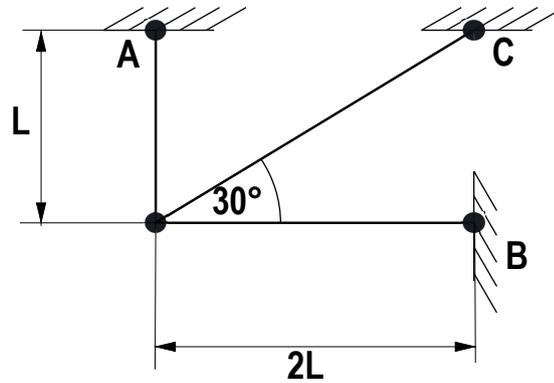
ΔT : es la variación de temperatura, $T_f - T_i$, en unidad de temperatura.

Para establecer una variable térmica en las ecuaciones de compatibilidad, se utiliza la deformación en los métodos geométricos, y en el método energético de deformación por eslabón se establece con siguiente ecuación:

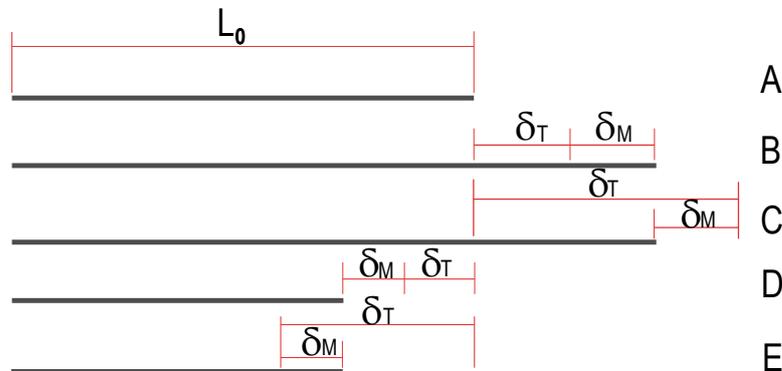
$$U_T = \alpha \Delta T L P$$

Ejemplo:

La construcción del esquema, el cual se señala en la siguiente figura, está compuesto de acero ($E = 210GPa$ y $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} K^{-1}$), fue montada a $290 K$ sin tensiones iniciales. Determinar las fuerzas que surgirán de las barras al calentar la construcción a $340 K$ (considerar $L = 1[m]$ y áreas $0,001[m^2]$):



Para desarrollar este ejemplo debe recordar le método geométrico, en el cual las deformaciones de cada barra son a lo largo de su eje, por lo que un aumento de temperatura, las barras se dilatarían y para mantener su ajuste geométrico se pueden comprimir un poco, para ello se debe considerar que existen barras mas largas que otras y que eso puede afectar en la geometría en la deformación. Para ello se ejemplifica 4 casos que pueden suceder después de un armado (Compresión y tracción) y con variaciones de temperatura.



Donde:

A: Es la situación inicial, en la cual la barra no está afectada a cambios de temperatura y a fuerzas y la deformación $\delta = 0$.

B: Es un caso en el que la barra está con una dilatación por efecto de la temperatura y queda traccionada, por lo que tiene una deformación mecánica. por lo que la deformación de la barra $\delta = \delta_{Mecanica} + \delta_{Termica}$.

C: Es un caso en el que existe una dilatación térmica de la barra y queda en compresión, por lo que la deformación de la barra $\delta = \delta_{Termica} - \delta_{Mecanica}$.

D: Es un caso en el que existe una variación térmica negativa y se comprime la barra, por lo que la deformación de la barra $-\delta = \delta_{Mecanica} + \delta_{Termica}$.

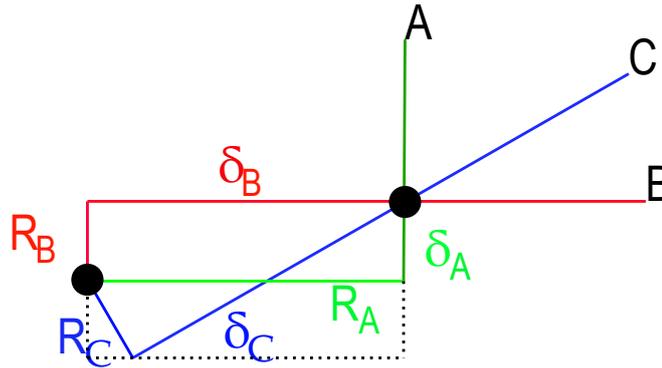
E: Es un caso en el que existe una compresión por temperatura y tiene una tracción mecánica por lo que la deformación $-\delta = \delta_{Termico} - \delta_{Mecanica}$.

Además de lo anterior, se debe considerar que las ecuaciones mecánicas tienen que ser congruentes con las condiciones de deformación.

En este caso supondremos que todas las barras quedan en compresión por lo que las ecuaciones de equilibrio en 2D quedarían de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} F_B + F_C \cdot \cos(30) &= 0 \\ F_A + F_C \cdot \sin(30) &= 0 \end{aligned}$$

Pero se puede comprender que hace falta una ecuación para poder resolver el sistema. Para resolver el sistema, complementamos con una relación geométrica de la deformación, como se señala en el siguiente bosquejo:



Del esquema anterior se destaca estas relaciones geométricas:

$$\begin{aligned} \delta_B &= R_C \sin(30) + \delta_C \cos(30) \\ \delta_A &= \delta_C \sin(30) - R_C \cos(30) \end{aligned}$$

De las cuales, se puede reducir a una ecuación:

$$2\sqrt{3}\delta_B + 2\delta_A = 4\delta_C$$

Pero para cada deformación queda definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta_A &= \delta_{TA} - \delta_{MA} \\ \delta_B &= \delta_{TB} - \delta_{MB} \\ \delta_C &= \delta_{TC} - \delta_{MC} \end{aligned}$$

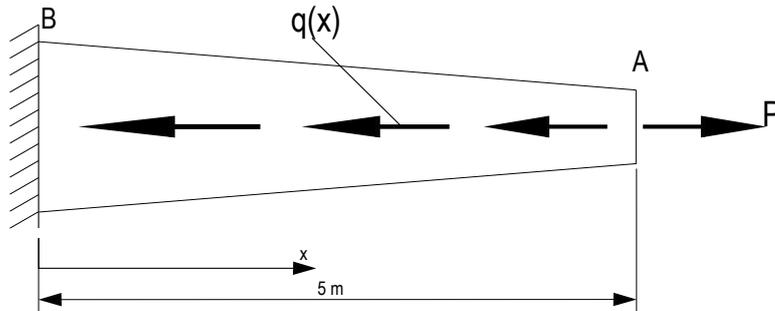
Resolviendo el sistema de ecuaciones, las fuerzas de cada barra son:

$$\begin{aligned} F_A &= -1250,46[N] \\ F_B &= -2165,86[N] \\ F_C &= 2500,92[N] \end{aligned}$$

Nota: Se confirma que no todas las barras quedan en compresión, lo cual era de esperar por la geometría de la figura. Además, se confirma que manteniendo la hipótesis entre las deformaciones y las ecuaciones mecánicas se puede resolver el sistema de ecuaciones, sin importar que la hipótesis esté errónea.

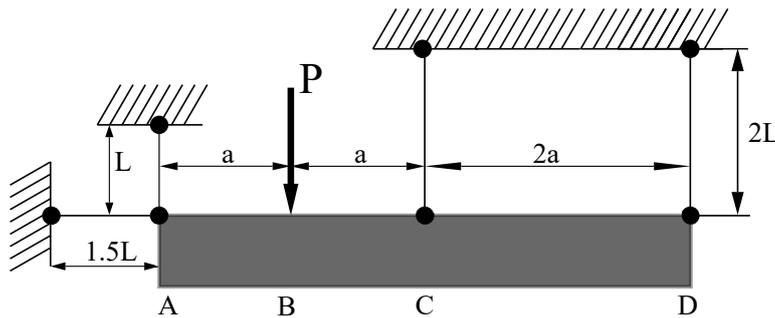
Ejercicios

- Una barra cónica de Acero ($E = 210[GPa]$), de diámetros en A y B de 50 y 20 [cm], respectivamente. La cual esta sometida a la acción de la carga $q(x) = 50(\ln(1 + \frac{x}{l} + \sin(\frac{x}{l}))) [kN]$ y una carga $P = 10[kN]$. Determine la deformación de la barra en milímetros:



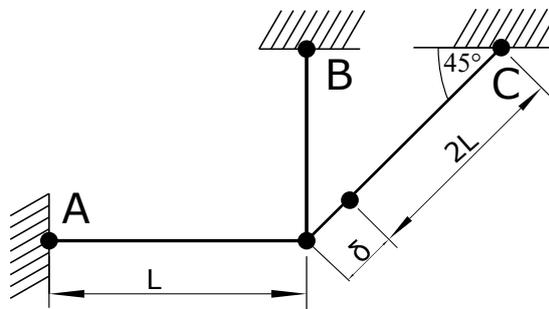
Resp.: $\delta = -0,00219[mm]$

- Determine la fuerza P máxima que puede ser aplicada sobre la barra absolutamente rígida AD para que las deformaciones de las barras no superen 1[mm]. Las barras son de acero ($E = 210[GPa]$), el área de las barras es de 5[cm²] y $L = 1[m]$:



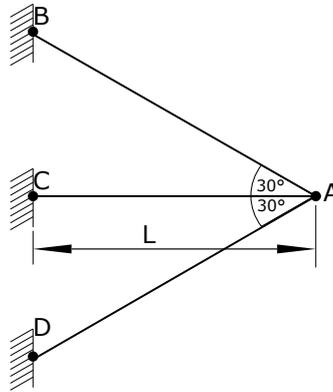
Resp.: $P = 165[kN]$

- Calcular las tensiones (Usando el método Energético o geométrico) que surgen en las barras durante el montaje del nudo a causa de que la barra ad es mas corta que su longitud nominal en $\delta = 0,001$. El material de las barras es de Acero ($E = 210[GPa]$), área transversal de 10[cm²] y $L = 1[m]$.



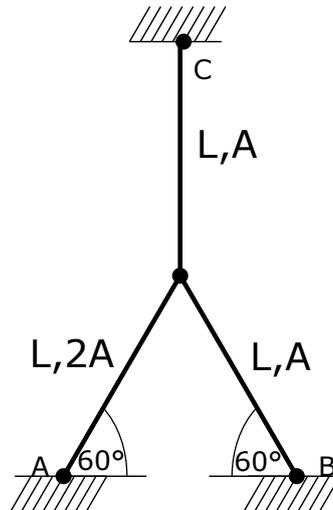
Resp.: $F_A = 46,3[kN]; F_B = -46,3[kN]; F_C = 65,4[kN]$

4. Un nudo simétrico compuesto por tres barras fue montado a la temperatura de $290K$. Determinar las tensiones en sus barras a causa de un calentamiento hasta $370K$. Considerando $L = 2[m]$, material acero ($E = 210[GPa]$ y $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}K^{-1}$) y área transversal de $2[cm^2]$.



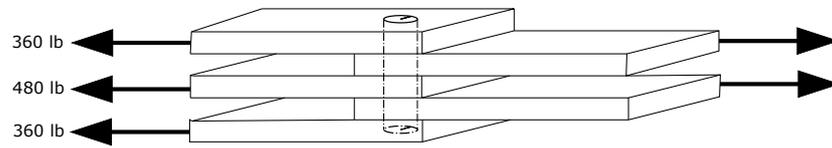
Resp.: $F_{BA} = -4,6[kN]$; $F_{CA} = 7,91[kN]$; $F_{DA} = -4,6[kN]$

5. El siguiente sistema se armó a $290K$, el cual es de acero ($E = 210[GPa]$ y $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}K^{-1}$). Determine las tensiones en las barras a causa de un calentamiento hasta $350K$ (Considere $A = 0,001[m^2]$ y $L = 1[m]$).



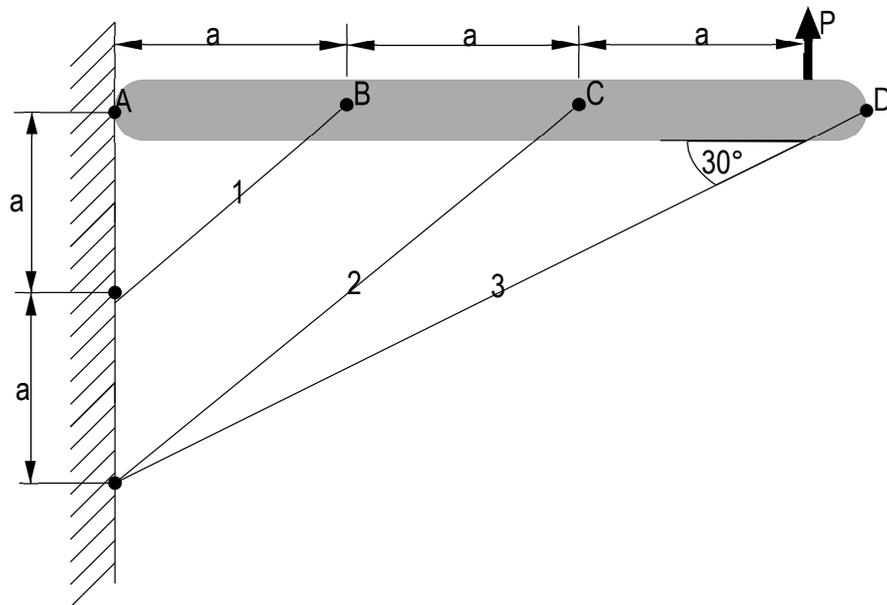
Resp.: $F_A = F_B = 130,6[kN]$; $F_C = 226,24[kN]$

6. La conexión que se ve en la figura, consiste en 5 placas de acero, unidas por un tornillo de $\frac{1}{4}$ [pulg] de diámetro. La carga total entre las placas es de 1200 [lb], distribuidas como se muestra. Determine el esfuerzo cortante máximo en el tornillo.



Resp.: $\tau = 7,33 \left[\frac{lb}{pulg^2} \right]$

7. Una barra absolutamente rígida AD , está articulada en el punto D y sostenida por tres barras 1, 2, 3. Calcular los esfuerzos en las barras si la carga $P = 100$ [kN], si las secciones de todas las barras tiene un área $A = 2$ [cm²] ($E = 210$ [GPa] y $a = 1$ [m]).



Resp.: $F_1 = 16,71$ [kN]; $F_2 = 16,71$ [kN]; $F_3 = 152,74$ [kN]