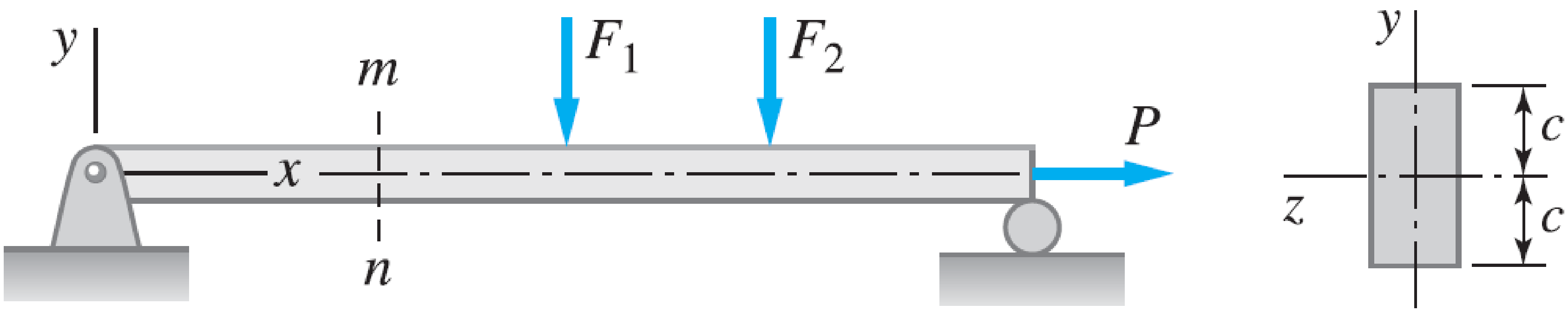
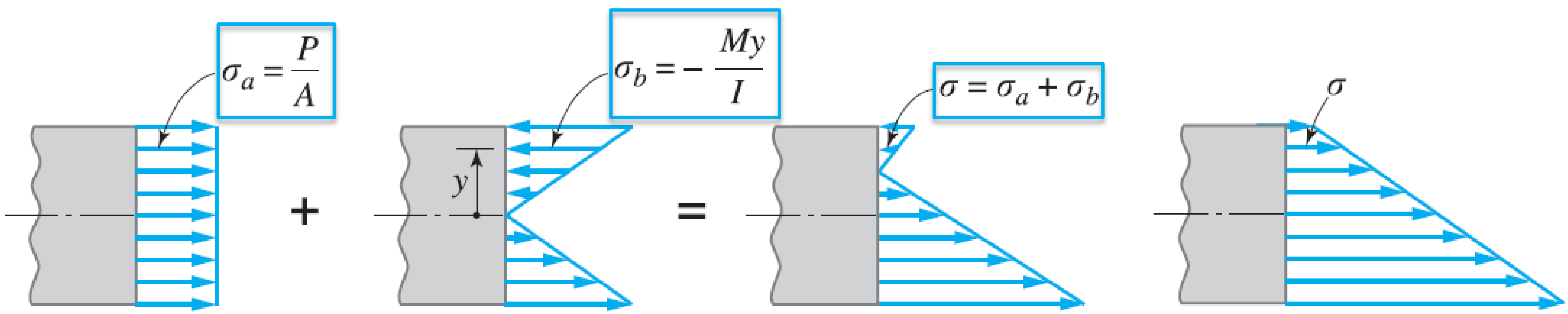
RESISTENCIA DE MATERIALES I

INGENIERÍA CIVIL MECÁNICA

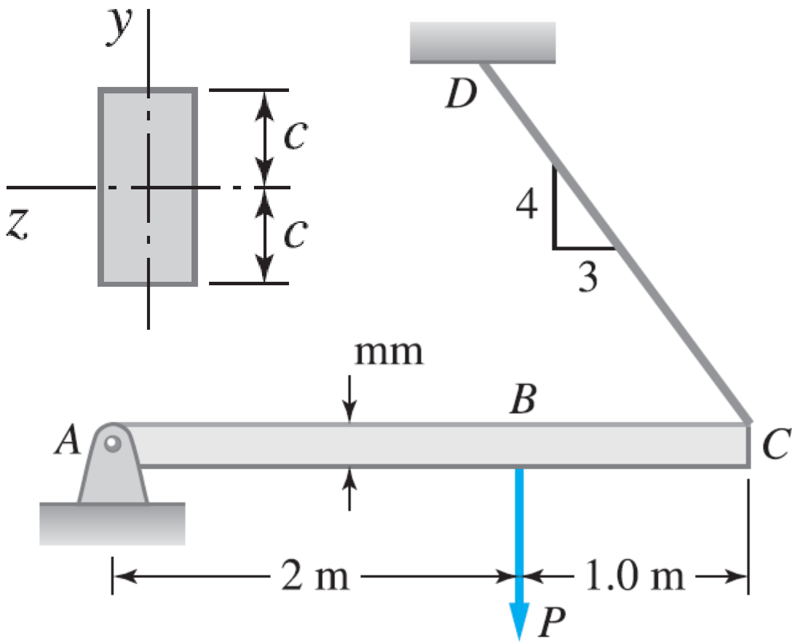
ESFUERZOS COMBINADOS





$$\sigma = \sigma_a + \sigma_b = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$

Ejemplo: Una viga de sección rectangular, de 100 mm de ancho por 400 mm de altura, está articulada en A, está sujeta mediante un cable CD y sometida a una carga ***P***. Calcular el máximo valor ***P*** que producirá un esfuerzo normal no mayor de 120 MPa. Descarte la posibilidad de pandeo.

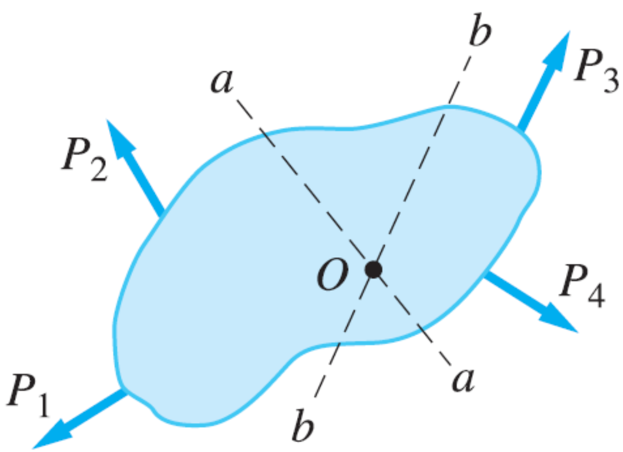


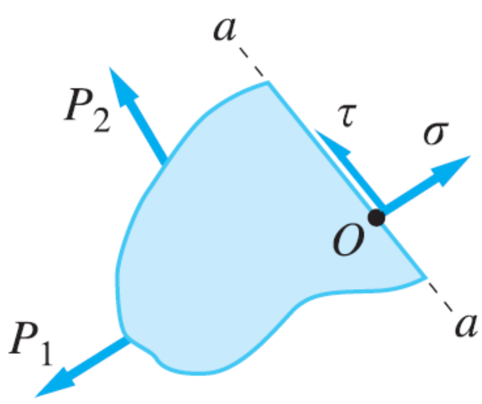
SOLUCIÓN Pmax = 900 kN

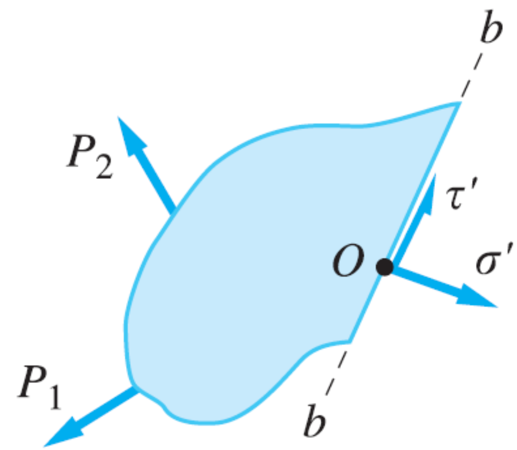
La magnitud y tipo de esfuerzo depende de la ***orientación o inclinación*** *del elemento que se considera.*

Imaginemos un sólido sometido a la acción de fuerzas en equilibrio y hagamos pasar por el mismo punto dos secciones de exploración.

Para el punto *O* de la sección *a-a* obtendremos los esfuerzos normal y tangencial (σ,τ). En el caso de la sección *b-b* obtendremos unos esfuerzos normal y tangencia (σ',τ') distintos a los anteriores en el mismo punto *O*.

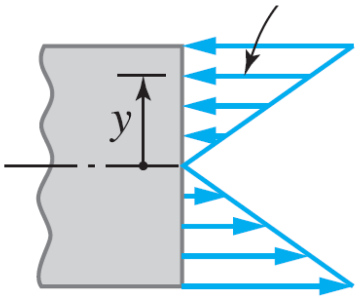




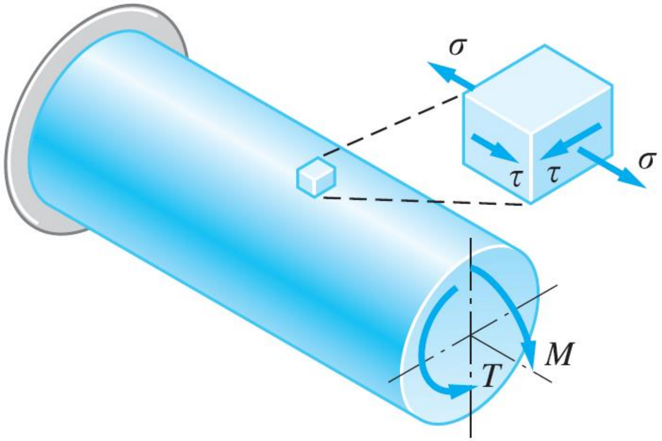


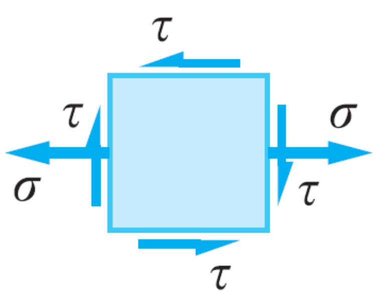
En general, no es posible encontrar directamente los valores de los esfuerzos en un plano que tenga una dirección cualquiera.

En vigas, por ejemplo, la flexión da los valores del esfuerzo normal que aparecen en un plano perpendicular al eje de la viga.
En torsión, se puede calcular el esfuerzo cortante en planos perpendiculares al eje de la barra.



En una barra sometida a flexión y torsión se pueden calcular los esfuerzos normales y tangenciales en un elemento diferencial orientado como muestra la figura:

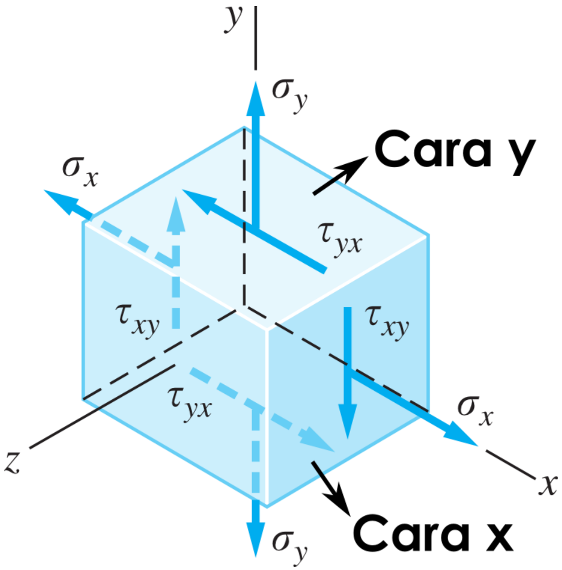




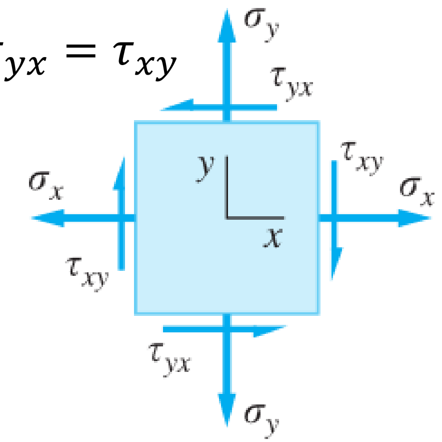
Vista en planta

Existen dos procedimientos para determinar la **posición** donde los esfuerzos son máximos. Uno es analítico y el otro es gráfico (basado en el circulo de Mohr).

ESFUERZO EN UN PUNTO: ESTADO DE TENSIÓN PLANA



$\tau_{yx} = \tau_{xy}$



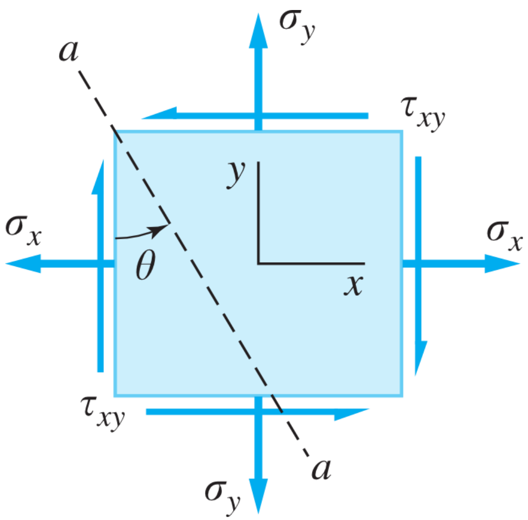
Tensión Plana

El esfuerzo sobre una ***superficie*** se obtiene dividiendo la fuerza entre al área en la que actúa.
El ***esfuerzo en un punto*** corresponde al *esfuerzo medio* uniformemente distribuido sobre un elemento diferencial de área.

Los esfuerzos se pueden representar actuando sobre un elemento de volumen que rodee el punto considerado (σ_x, σ_y, τ_{xy}).

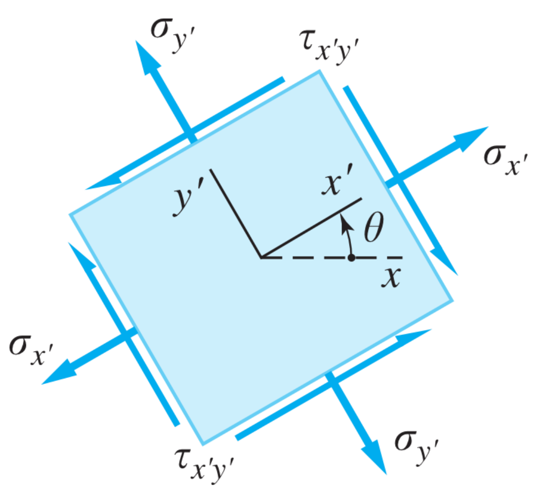
σ_x, σ_y: son los esfuerzos normales actuando en las ***caras* x** y ***cara y***, respectivamente.
τ_{xy}: es el esfuerzo cortante actuando en la ***cara* x** y ***en la dirección y***.
τ_{yx}: es el esfuerzo cortante actuando en la ***cara y*** y ***en la dirección* x**.

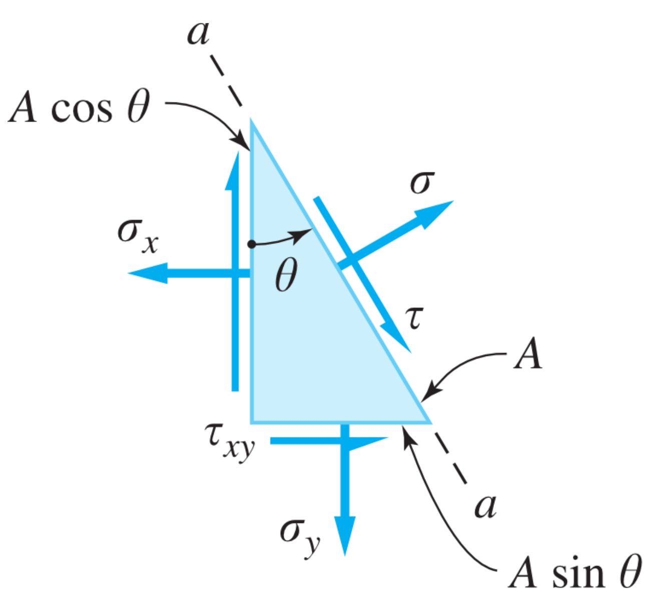
ESFUERZO EN UN PUNTO: CÁLCULO ANALÍTICO

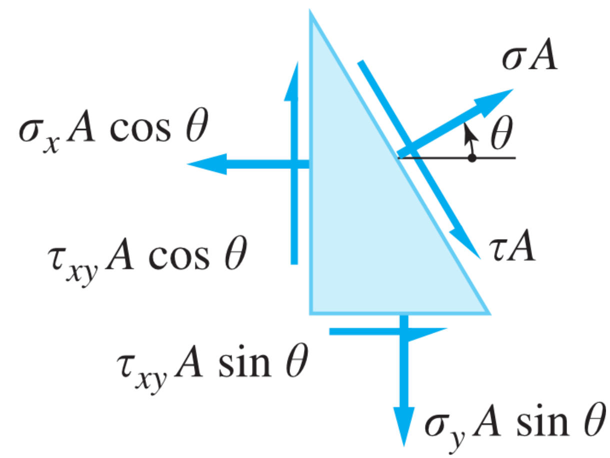


El ***esfuerzo en un punto*** queda definido por los esfuerzos sobre las caras del elemento que rodea dicho elemento.
Los ***esfuerzos*** varían con la ***orientación*** de los planos que pasan por el punto**.**

Obtengamos los esfuerzos para una ***orientación θ*** aplicando un corte y equilibrio estático.

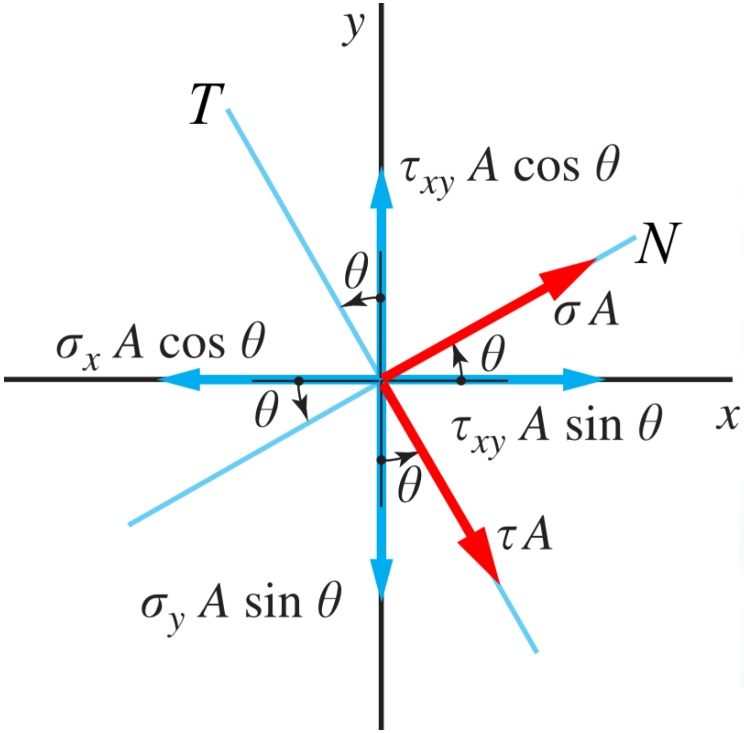






ESFUERZO EN UN PUNTO: CÁLCULO ANALÍTICO

Diagrama de fuerzas en un punto



Suma de fuerzas en dirección N:

$$A\sigma = (\sigma_x A\cos\theta)\cos\theta + (\sigma_y A\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta - (\tau_{xy} A\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta - (\tau_{yx} A\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta$$

Suma de fuerzas en dirección T:

$$A\tau = (\sigma_x A\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta - (\sigma_y A\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta + (\tau_{xy} A\cos\theta)\cos\theta - (\tau_{yx} A\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

ESFUERZO EN UN PUNTO: CÁLCULO ANALÍTICO

Dividiendo por A, teniendo en cuenta que $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ y usando las identidades:

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

De las ecuaciones anteriores (equilibrio) se llega a:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\operatorname{sen} 2\theta \qquad (1)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (2)$$

ESFUERZO EN UN PUNTO: CÁLCULO ANALÍTICO

Los planos donde ocurren los **esfuerzos normales máximo y mínimo** se obtienen anulando la derivada de la expresión (1):

$$\tan 2\theta = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (3)$$

Los planos donde ocurren los esfuerzos **cortante máximo** se obtienen anulando la derivada de la expresión (2):

$$\tan 2\theta_s = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \qquad (4)$$

Observaciones:

- Estas ecuaciones dan dos valores para ***2θ*** que difieren en 180º, por tanto, los planos de esfuerzo máximo y mínimo son perpendiculares entre sí.
- Los planos de esfuerzo cortante nulo se determinan haciendo $\tau = 0$ (Ec. 2), de donde se deduce que los ***esfuerzos normales máximo y mínimo*** tienen lugar en los ***planos de esfuerzo nulo.*** Estos esfuerzos máximos y mínimos se llaman **esfuerzos principales.**
- Multiplicando (3) y (4) se obtiene -1, lo que indica sus ángulos ***2θ*** difieren en 90º, por tanto, los planos de *esfuerzo cortante máximo están inclinados 45º respecto de los esfuerzos principales*.

ESFUERZO EN UN PUNTO: CÁLCULO ANALÍTICO

Reemplazando los valores ***2θ y 2θs*** de las expresiones (3) y (4) en (1) y(2) se obtienen las expresiones de los ***esfuerzos principales y del esfuerzo cortante máximo***:

$$(\sigma)_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$(\tau)_{\text{máx}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

ESFUERZO EN UN PUNTO: CÁLCULO GRÁFICO

La expresiones analíticas se pueden interpretar gráficamente gracias al ingeniero alemán Otto Mohr (1882), evitando así tener que recordarlas. Esta interpretación se basa en un circulo y por tanto el método gráfico se denomina ***círculo de Mohr.***

De las expresiones analíticas tenemos:

$$\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Elevando al cuadrado, sumando y simplificando se obtiene

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2$$

Observación: (σ_x, σ_y, τ_{xy}) son constantes que definen el estado tensional!!!

ESFUERZO EN UN PUNTO: CÁLCULO GRÁFICO

Reemplazando los términos constantes por ***R*** y **C** se llega a:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2$$

$$\boxed{(\sigma - C)^2 + \tau^2 = R^2}$$

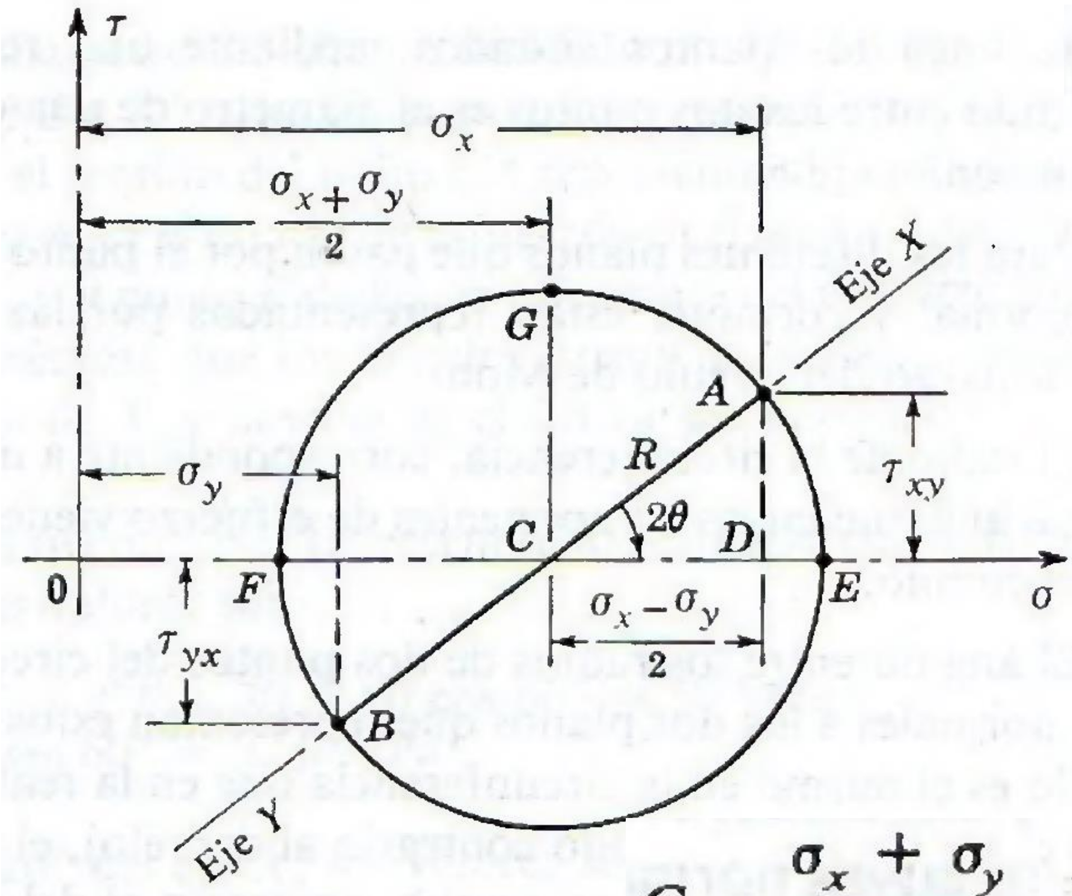
Donde el **radio R** y el **centro C** del círculo de Mohr están dados por:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \qquad C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

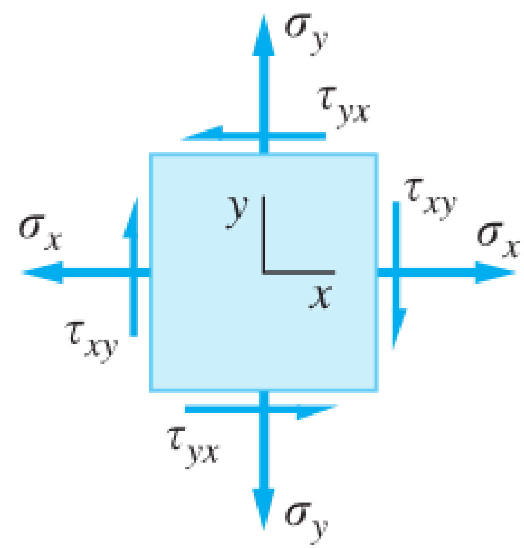
Observación: $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ son **constantes** que definen el estado tensional!!!

ESFUERZO EN UN PUNTO: CÁLCULO GRÁFICO

Gráficamente:



$$(\sigma - C)^2 + \tau^2 = R^2$$

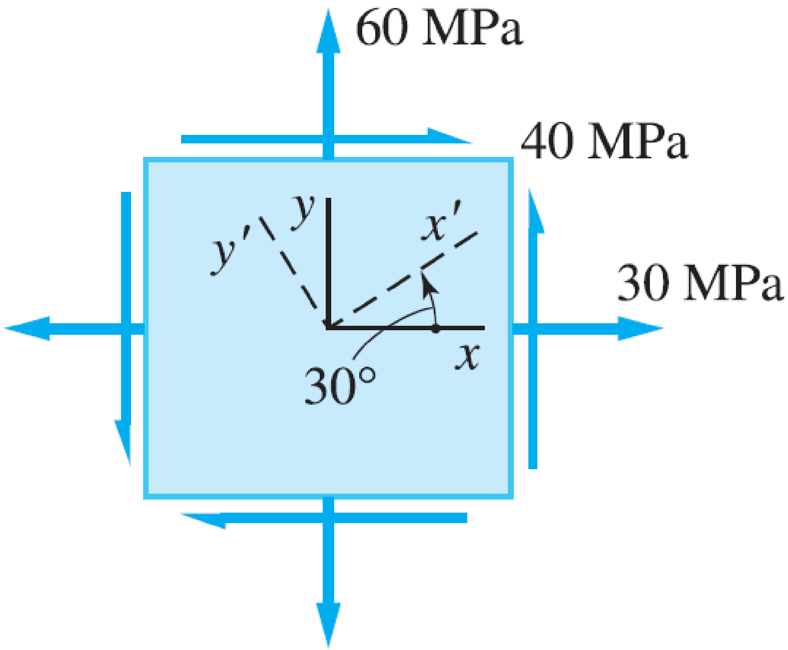


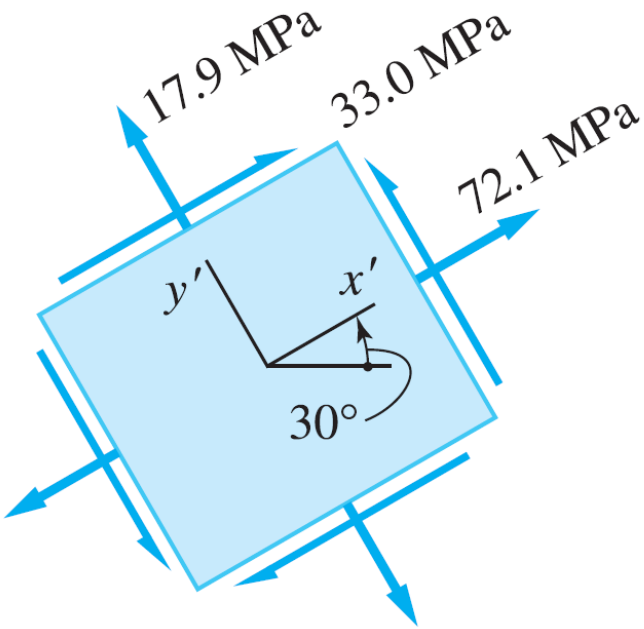
$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

EJEMPLO

En un cierto punto de un sólido se tiene el siguiente estado tensional. Obtenga el estado de tensiones con respecto a los ejes x’ e y’. Dibuje también el circulo de Mohr.





SOLUCIÓN