

Unidad
Resistencia de Materiales

Curso
“Resistencia de Materiales Aplicada”

AÑO 2011

APUNTES

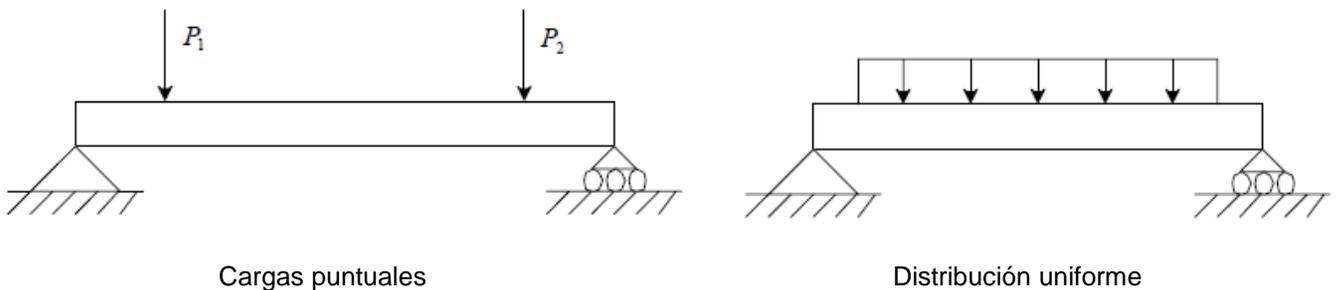


MÓDULO III: FLEXIÓN

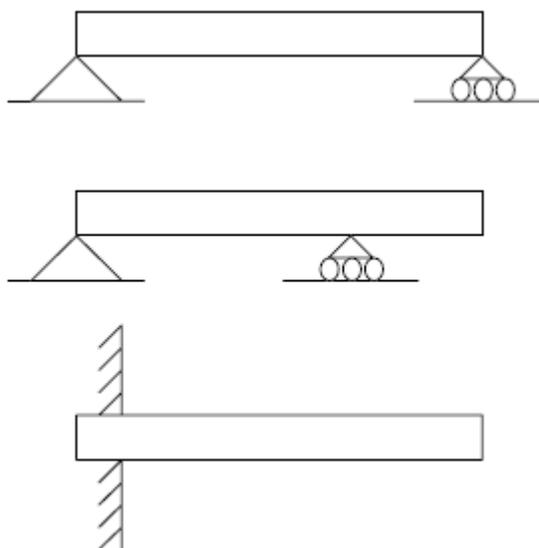
INTRODUCCION

En los capítulos anteriores las fuerzas internas eran conocidas o constantes en el conjunto, por lo que su distribución se conocía. En el estudio de la flexión los efectos que producen las fuerzas aplicadas son variables en la sección de la viga, estos efectos son de dos tipos: fuerza cortante y momento flexionante. Estos dos efectos producen esfuerzos distintos sobre la sección de la viga, la fuerza cortante produce un esfuerzo cortante, que depende principalmente del módulo de la fuerza aplicada. El momento flexionante produce un esfuerzo normal en la sección de la viga, siendo máximo en los extremos, y cero sobre el eje neutro de la viga, estos conceptos se explicarán en detalle en las secciones siguientes.

En este apunte se presentaran vigas estáticamente determinadas, con cargas puntuales y distribuidas.



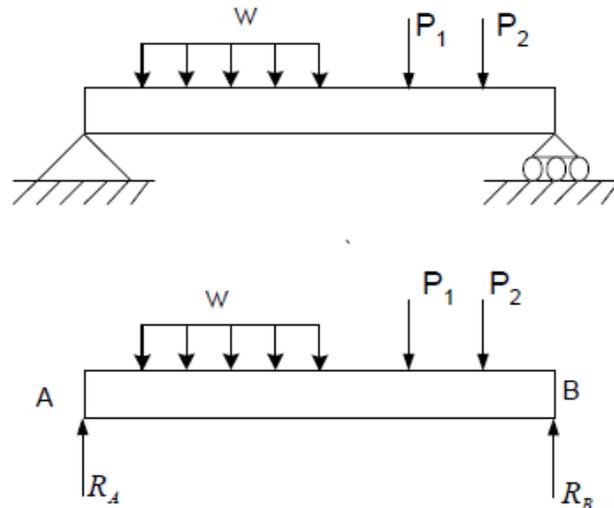
Para la sujeción de las vigas, existen distintos tipos de apoyos, a continuación se presentan los usados en forma más común en vigas estáticamente determinadas.



FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE

1. Fundamentos

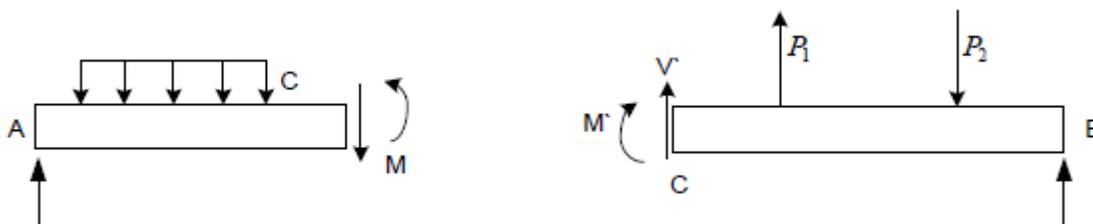
Consideremos una viga simplemente apoyada, con una carga distribuida y dos cargas puntuales, como se indica en la figura.



El comportamiento interno de una viga simplemente apoyada sometida a cargas como las mostradas en la figura, se manifiesta en una fuerza cortante y un momento flector. Para determinar estos valores, es necesario determinar previamente las reacciones en los apoyos, una vez determinadas éstas, se hace un corte de la viga en el lugar donde se quieren determinar las reacciones internas. Como la viga está equilibrada, las secciones que queden del corte también lo están.

La fuerza cortante V y el momento flector M en un punto determinado se consideran positivos cuando las fuerzas interiores y los pares que actúan sobre cada posición de la viga están dirigidos como se indica en la figura anterior, esta es la convención más utilizada.

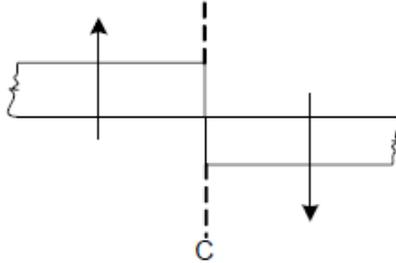
En la siguiente figura se muestra la fuerza cortante y el momento flector en la viga, empleando la convención definida anteriormente.



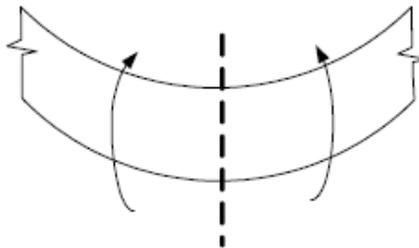
Como se aprecia en la figura, la viga se encuentra en equilibrio, por lo que debido al principio de acción y reacción, en la sección en que se realiza el corte, la fuerza cortante y el momento flector

cambian de signo en los diagramas de cuerpo libre. De la figura se nota que la fuerza cortante es igual a la sumatoria de fuerza a la izquierda del corte, o bien a la sumatoria de fuerzas a la derecha del corte. Para el momento flexionante ocurre la misma situación.

La Fuerza cortante en C es positiva cuando las fuerzas exteriores que actúan sobre las vigas tienden a cortar la viga en C como se muestra a continuación:

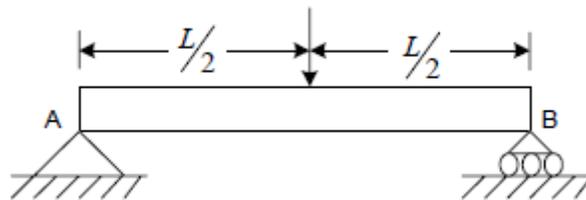


El momento flector en C es positivo cuando las fuerzas exteriores que actúan sobre la viga tienden a doblarla como se indica a continuación:

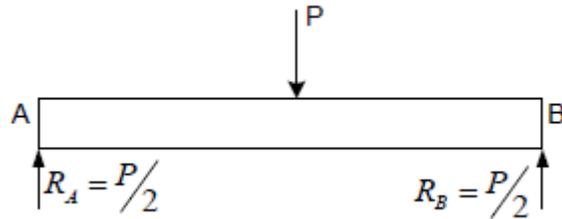


2. Diagrama de Fuerza Cortante y Momento Flector en vigas estáticamente determinadas

Son las curvas de fuerza cortante y momento flector que actúan a lo largo del incremento de la longitud de la viga. A continuación se describirá el procedimiento para calcular los diagramas de una viga simplemente apoyada sometida a cargas puntuales.



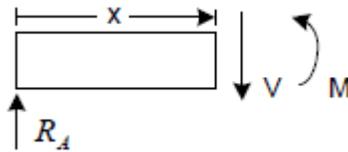
En primer lugar se calcula las reacciones en los apoyos A y B, para ello se construye el diagrama de cuerpo libre de la viga, el cual se presenta a continuación:



A continuación la viga se divide en secciones, en este caso como existe solo una carga aplicada, la viga se dividirá en dos zonas, una antes de la aplicación de la carga y otra después.

- Zona I:

$$0 \leq x < \frac{L}{2}$$



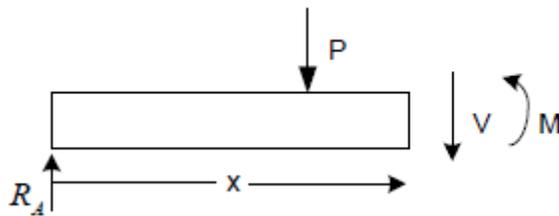
Haciendo sumatoria de Fuerzas y Momentos igual a cero, se obtiene:

$$V = \frac{P}{2}$$

$$M = \frac{P}{2}x$$

- Zona II:

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$



$$V = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2}$$

$$M = \frac{P}{2}x - P\left(x - \frac{L}{2}\right) = \frac{P}{2}(L - x)$$

Los diagramas se construyen a partir de las relaciones obtenidas para la fuerza cortante y el momento flector en cada zona, es importante notar que debido a la continuidad de la viga, en el punto de aplicación de la carga existe una discontinuidad para la fuerza cortante, y el momento flector debe ser idéntico para ambas zonas, debido a que no existe aplicación de momentos externos sobre la viga.

A continuación se construyen los diagramas para la viga.

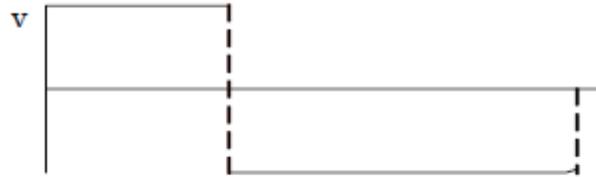


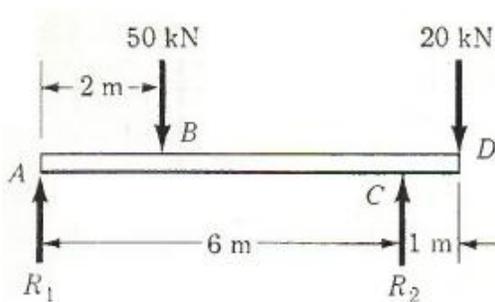
Diagrama Fuerza Cortante



Diagrama Momento Flector

3. Problemas Ilustrativos

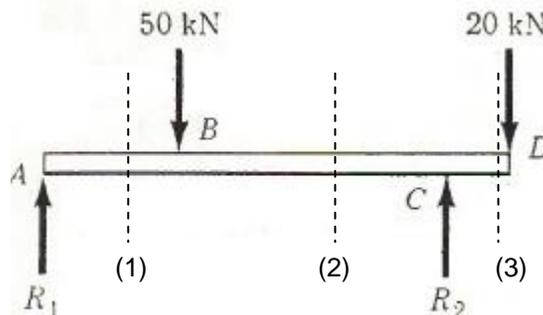
3.1. Problema N°1



Para la viga cargada que se muestra en la figura, determinar los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

Solución:

A continuación se indican los cortes que se realizan a la viga.



Determinando las reacciones sobre la viga a través de las ecuaciones de equilibrio, se obtiene:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -(50\text{ kN})(2\text{ m}) + R_2(6\text{ m}) - (20\text{ kN})(7\text{ m}) = 0 \rightarrow R_2 = 40\text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow R_1 - 50\text{ kN} + R_2 - 20\text{ kN} = 0 \rightarrow R_1 = 30\text{ kN}$$

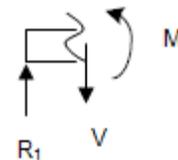
A continuación se determinan la fuerza cortante y el momento flector en cada zona:

- Zona I:

$$0 \leq x < 2\text{ m}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow R_1 - V = 0 \rightarrow V = 30\text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M - R_1x = 0 \rightarrow M = (30\text{ kN})x$$



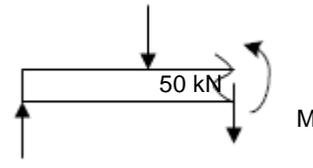
momento flector

- Zona II:

$$2 \text{ m} \leq x < 6 \text{ m}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow R_1 - 50 \text{ kN} - V = 0 \rightarrow V = -20 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M - R_1 x + (50 \text{ kN})(x - 2 \text{ m}) = 0 \rightarrow M = 100 \text{ kN} \cdot \text{m} - (20 \text{ kN})x$$

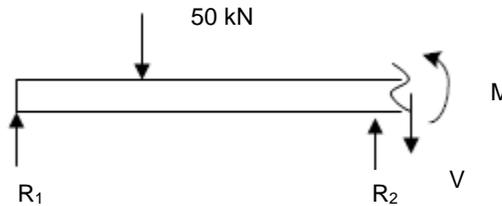


- Zona III:

$$6 \text{ m} \leq x \leq 7 \text{ m}$$

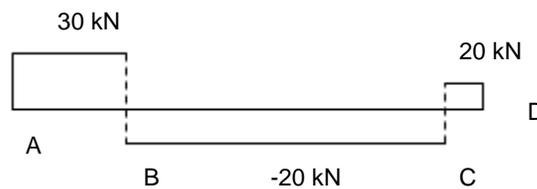
$$\sum F_V = 0 \rightarrow R_1 - 50 \text{ kN} + R_2 - V = 0 \rightarrow V = 20 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M - R_1 x + (50 \text{ kN})(x - 2 \text{ m}) - (40 \text{ kN})(x - 6 \text{ m}) = 0 \rightarrow M = (20 \text{ kN})x - 140 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

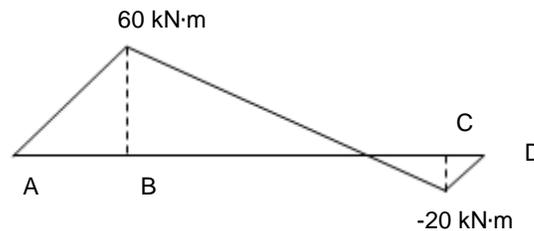


A continuación se construyen los diagramas de fuerza cortante y momento flector

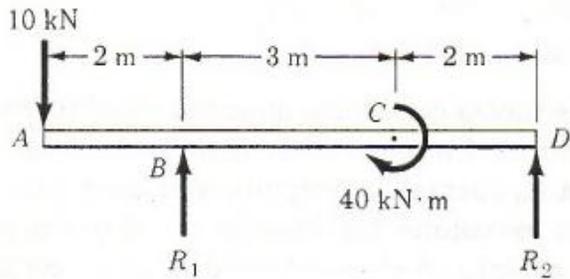
- Diagrama de Fuerza cortante



- Diagrama de Momento Flector



3.2. Problema N°2



Para la viga de la figura, determinar los diagramas de fuerza cortante y momento Flector.

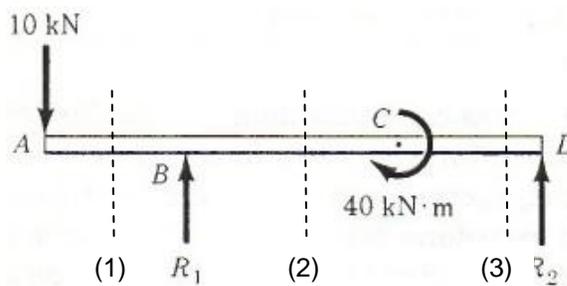
Solución:

En primer lugar se determinan las reacciones

$$\sum M_B = 0 \rightarrow (10 \text{ kN})(2 \text{ m}) - 40 \text{ kN} \cdot \text{m} + R_2(5 \text{ m}) = 0 \rightarrow R_2 = 4 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow -10 \text{ kN} + R_1 + R_2 = 0 \rightarrow R_1 = 6 \text{ kN}$$

A continuación se determinan los cortes que se deben realizar a la viga

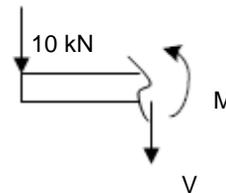


▪ Zona I:

$$0 \leq x < 2 \text{ m}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow -10 \text{ kN} - V = 0 \rightarrow V = -10 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M + (10 \text{ kN})x = 0 \rightarrow M = -(10 \text{ kN})x$$

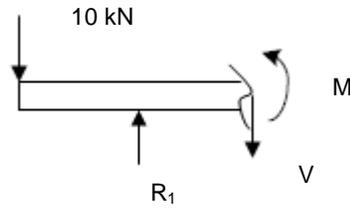


▪ Zona II:

$$2 \text{ m} \leq x < 5 \text{ m}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow -10 \text{ kN} + R_1 - V = 0 \rightarrow V = -4 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M + (10 \text{ kN})x - R_1(x - 2 \text{ m}) = 0 \rightarrow M = -(4 \text{ kN})x - 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

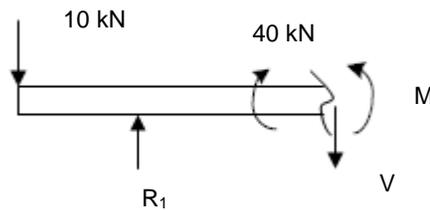


- Zona III:

$$5 \text{ m} \leq x \leq 7 \text{ m}$$

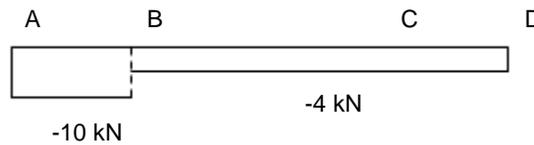
$$\sum F_V = 0 \rightarrow -10 \text{ kN} + R_2 - V = 0 \rightarrow V = -4 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M + (10 \text{ kN})x - R_1(x - 2 \text{ m}) - 40 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0 \rightarrow M = -(4 \text{ kN})x + 28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

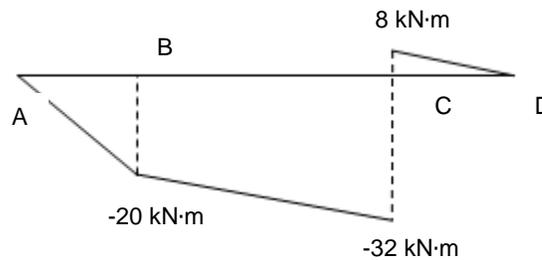


A continuación se construyen los diagramas de fuerza cortante y momento flector

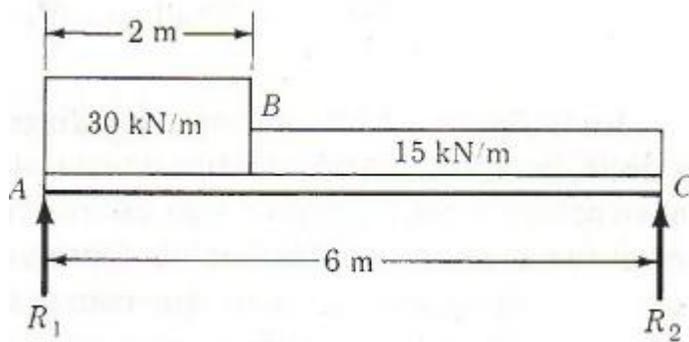
- Diagrama de Fuerza cortante



- Diagrama de Momento flector



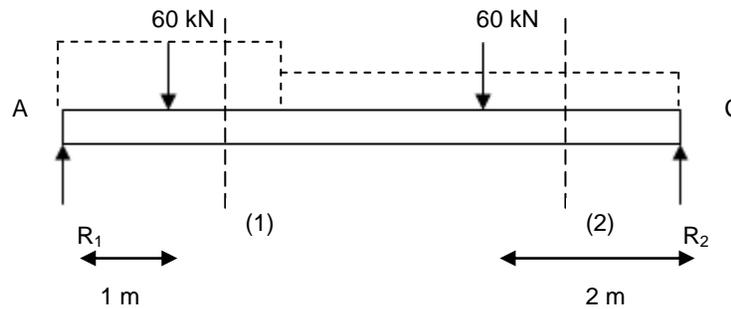
3.3. Problema N°3



Para la viga de la figura, determinar los diagramas de fuerza cortante y momento Flector.

Solución:

En primer lugar se presenta el DCL del sistema equivalente



$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_2(6\text{ m}) - (60\text{ kN})(1\text{ m}) - (60\text{ kN})(4\text{ m}) = 0 \rightarrow R_2 = 50\text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow R_1 + R_2 - 120\text{ kN} = 0 \rightarrow R_1 = 70\text{ kN}$$

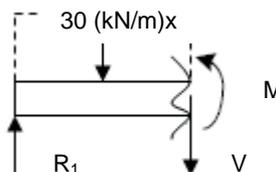
A continuación se determina la fuerza cortante y el momento flector en las zonas (1) y (2)

- Zona I:

$$0 \leq x < 2\text{ m}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow R_1 - \left(30 \frac{\text{kN}}{\text{m}}\right)x - V = 0 \rightarrow V = (70\text{ kN}) - \left(30 \frac{\text{kN}}{\text{m}}\right)x$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M - R_1x + \left[\left(30 \frac{\text{kN}}{\text{m}}\right)x\right]\frac{x}{2} = 0 \rightarrow M = (70\text{ kN})x - \left(15 \frac{\text{kN}}{\text{m}}\right)x^2$$



- Zona II:

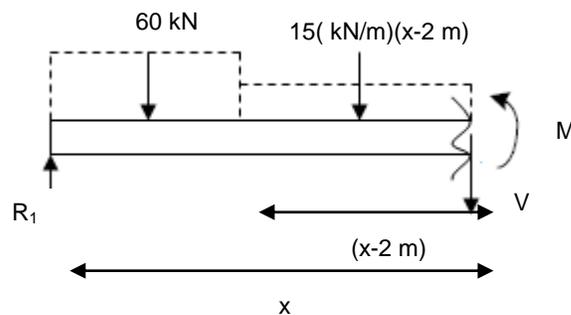
$$2 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Para la zona dos, la carga distribuida sobre la sección AB se puede considerar que actúa en forma puntual.

$$\sum F_V = 0 \rightarrow 70 \text{ kN} - 60 \text{ kN} - \left(15 \frac{\text{kN}}{\text{m}}\right)(x - 2 \text{ m}) - V = 0 \rightarrow V = 40 \text{ kN} - \left(15 \frac{\text{kN}}{\text{m}}\right)x$$

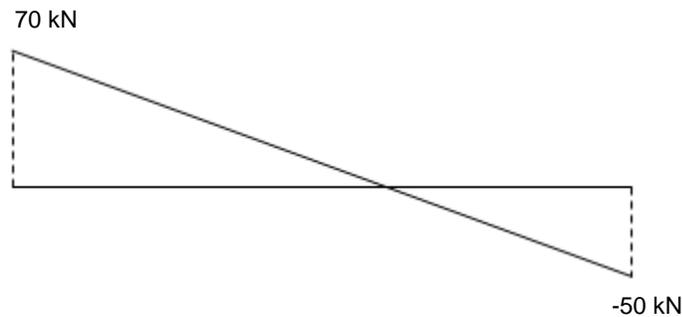
$$\sum M = 0 \rightarrow \left[15 \frac{\text{kN}}{\text{m}}(x - 2 \text{ m})\right] \frac{(x - 2 \text{ m})}{2} + (60 \text{ kN})(x - 1 \text{ m}) - (70 \text{ kN})x = 0$$

$$M = -\left(7.5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}\right)x^2 + (40 \text{ kN})x + 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

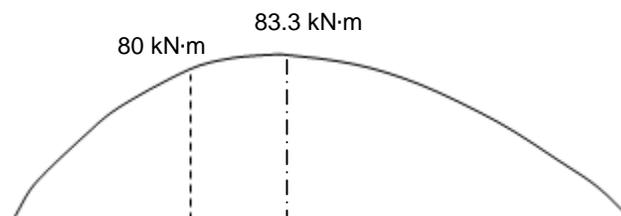


A continuación se construyen los diagramas de fuerza cortante y momento flector

- Diagrama de Fuerza cortante



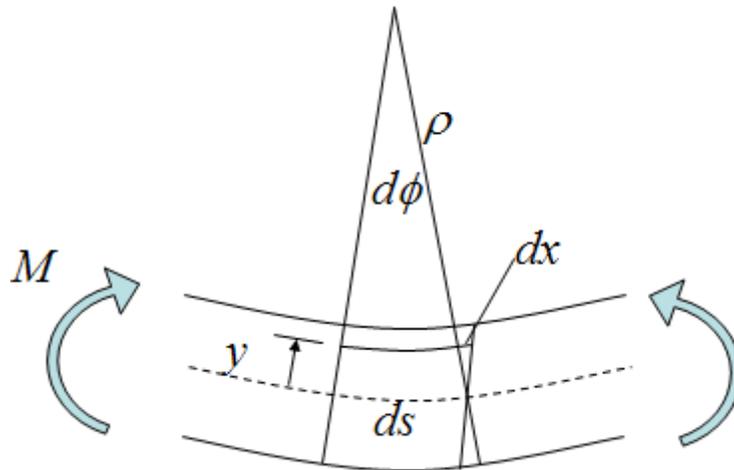
- Diagrama de Momento flector



DEDUCCIÓN FÓRMULA DE FLEXIÓN

1. Fundamentos

Para deducir la fórmula de flexión, se recurre a la siguiente figura



En donde se tiene una viga con radio de curvatura ρ , “ y ” corresponde a la distancia desde el eje neutro de la viga; dicho eje no presenta alargamiento debido a flexión, $d\phi$ corresponde al ángulo del elemento flexionado en estudio, ds corresponde a la longitud diferencial del eje neutro, y finalmente dx corresponde al acortamiento del elemento debido a flexión.

Considerando que el ángulo de flexión es pequeño, se obtienen las siguientes relaciones

$$\rho d\phi = ds \quad (1)$$

$$dx = y d\phi \quad (2)$$

De (1) y (2), obtenemos

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{y}{dx}$$

Considerando el concepto de deformación como una relación entre longitudes, y empleando semejanza, se obtiene

$$\varepsilon = \frac{dx}{ds} = \frac{y}{\rho}$$

Suponiendo que el material es homogéneo y obedece a la ley de Hooke, se obtiene

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho} \quad (3)$$

A continuación se hace equilibrio de momentos en la sección, lo que conduce a la siguiente expresión

$$M = \int y\sigma dA \quad (4)$$

Sustituyendo la relación (3) en la (4), obtenemos

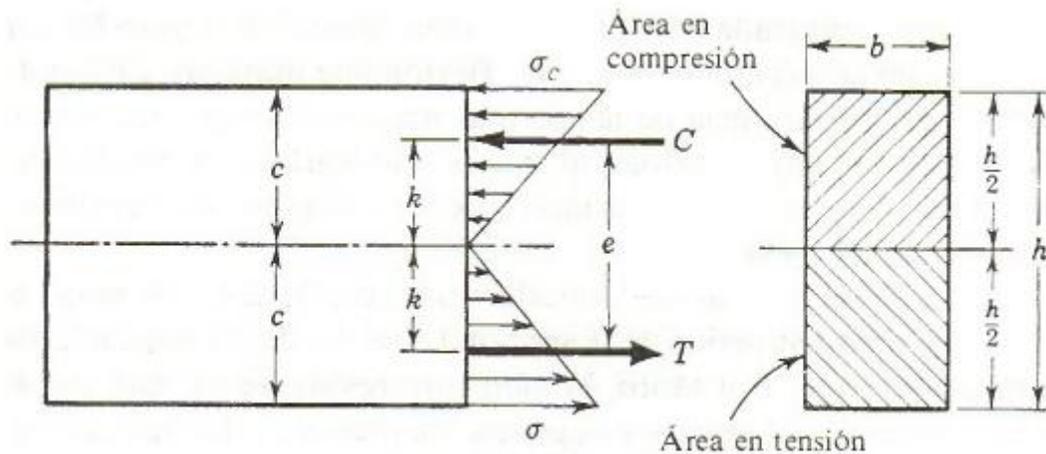
$$M = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA \quad (5)$$

$\int y^2 dA$ Corresponde al momento de Inercia I del área con respecto al eje de referencia, que en este caso corresponde al eje neutro de la viga. Reescribiendo la relación (5), llegamos a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \rightarrow \frac{E}{\rho} = \frac{M}{I} \quad (6)$$

Combinando la expresión (6) con la (3), se obtiene la fórmula de esfuerzo debido a flexión

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y = \frac{My}{I}$$



Ahora si consideramos que c es la distancia máxima desde el eje neutro de la viga, se obtiene el esfuerzo de flexión máximo

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}$$

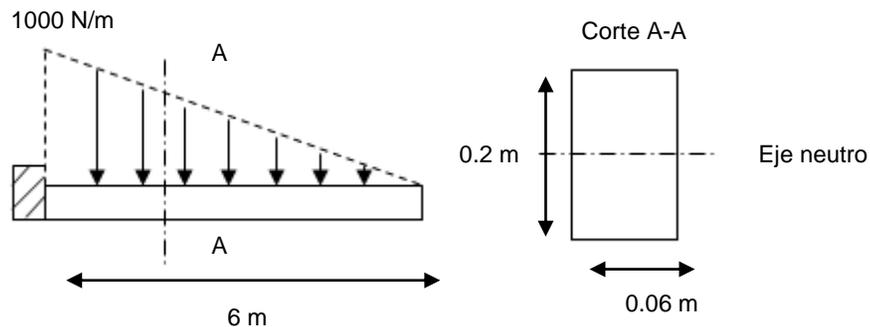
2. Problemas Ilustrativos

2.1. Problema N°4

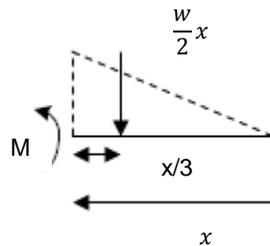
Una viga en voladizo, de 60 mm de ancho por 200 mm de canto y 6 m de longitud, soporta una carga que varía uniformemente desde cero en el extremo libre hasta 1000 N/m en el empotramiento. Determinar el valor y el signo del esfuerzo en una fibra situada a 40 mm del extremo superior de la viga en una sección a 3 m del extremo libre.

Solución:

En primera instancia se dibujara la situación física del problema



A continuación se determina el momento respecto a 3 m del extremo libre



El valor de w se calcula con una simple proporción, ya que se sabe que en 6 m se tienen 1000 N/m, lo que se busca es el valor de la carga distribuida en 3 m

$$\frac{1000 \frac{N}{m}}{6 m} = \frac{w}{3 m} \rightarrow w = 500 \frac{N}{m}$$

$$M = \left(\frac{w}{2}x\right)\frac{x}{3} = w\frac{x^2}{6} = \left(500 \frac{N}{m}\right)\frac{(3 m)^2}{6} = 750 N \cdot m$$

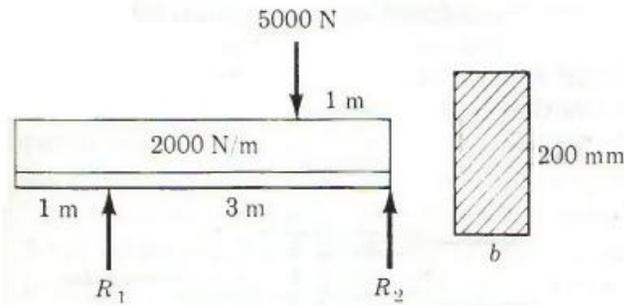
La inercia respecto al eje neutro corresponde a:

$$\frac{bh^3}{12}$$

Luego el esfuerzo de la fibra situada a 40 mm corresponde a:

$$\sigma = \frac{(750 \text{ N} \cdot \text{m})(0.1 \text{ m} - 0.04 \text{ m})}{\frac{(0.06)(0.2 \text{ m})^3}{12}} = 1.125 \text{ MPa}$$

2.2. Problema N°5



Determinar el espesor mínimo b de la viga, de manera que el máximo esfuerzo normal no exceda de 10 MPa.

Solución:

En primer lugar se calcula R_1 , para ello se realiza sumatoria de momentos en el apoyo 2 y se considera que la carga distribuida actúa como una carga puntual aplicada en el punto medio de la viga.

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow (5000 \text{ N})(1 \text{ m}) + \left(2000 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(4 \text{ m})(2 \text{ m}) - R_1(3 \text{ m}) = 0 \rightarrow R_1 = 7000 \text{ N}$$

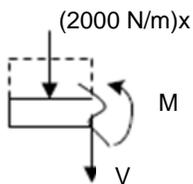
Para determinar R_2 se realiza sumatoria de fuerzas verticales igual a cero

$$\sum F_V = 0 \rightarrow R_1 + R_2 - 5000 \text{ N} - \left(2000 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(4 \text{ m}) = 0 \rightarrow R_2 = 6000 \text{ N}$$

Para determinar el momento máximo se construirá el diagrama de momento flector

- Zona I:

$$0 \leq x < 1 \text{ m}$$



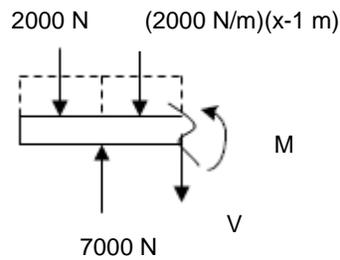
$$\sum M = 0 \rightarrow M = \left[\left(2000 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)x\right]\frac{x}{2} \rightarrow M = \left(1000 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)x^2$$

- Zona II:

$$1 \leq x < 3 \text{ m}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M = (7000 \text{ N})(x - 1 \text{ m}) - (2000 \text{ N})(x - 0.5 \text{ m}) - \left(2000 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)\frac{(x - 1 \text{ m})^2}{2}$$

$$M = -\left(1000 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)x^2 + (7000 \text{ N})x - 7000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

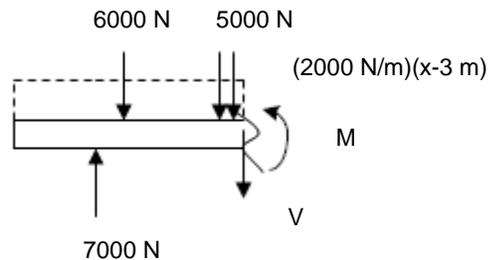


- Zona III:

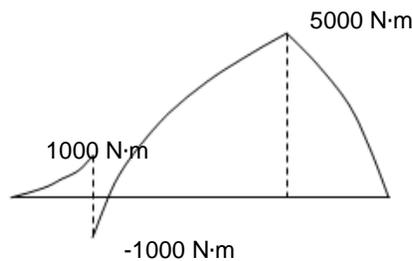
$$3 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M = (7000 \text{ N})(x - 1 \text{ m}) - (6000 \text{ N})(x - 1.5 \text{ m}) - (5000 \text{ N})(x - 3 \text{ m}) - \left(2000 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right) \frac{(x - 3 \text{ m})^2}{2}$$

$$M = -\left(1000 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)x^2 + (2000 \text{ N})x + 8000 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Construyendo el diagrama de momento flector, se obtiene



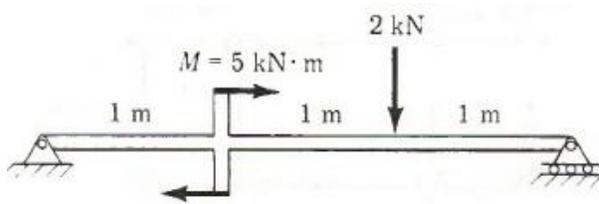
Del diagrama se aprecia que el momento máximo tiene un valor de 5000 N·m, además se sabe que

$$\sigma = \frac{Mc}{bh^3} \rightarrow b = \frac{Mc}{\frac{\sigma h^3}{12}}$$

$$b \geq \frac{12(5000 \text{ Nm})(0.1 \text{ m})}{\left(10 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right) (0.2)^3} \rightarrow b \geq 0.075 \text{ m}$$

Luego el espesor mínimo es de 75 mm.

2.3. Problema N°6



Una barra rectangular de acero de 50 mm de ancho por 80 mm de espesor, es cargada como se muestra en la figura. Determinar la magnitud y ubicación del máximo esfuerzo flexionante.

Solución:

En primer lugar se determina las reacciones en los apoyos

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow R_2(3\text{ m}) - (2\text{ kN})(2\text{ m}) - 5\text{ kN} \cdot \text{m} = 0 \rightarrow R_2 = 3\text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow R_1 + R_2 - 2 = 0 \rightarrow R_1 = -1\text{ kN}$$

- Zona I:

$$0 \leq x < 1\text{ m}$$

$$M = -(1\text{ kN})x$$

- Zona II:

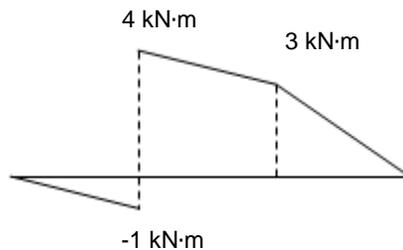
$$1 \leq x < 2\text{ m}$$

$$M = 5\text{ kN} \cdot \text{m} - (1\text{ kN})x$$

- Zona III:

$$2\text{ m} \leq x \leq 3\text{ m}$$

$$M = 5\text{ kN} \cdot \text{m} - (1\text{ kN})x - (2\text{ kN})(x - 2\text{ m}) = 9\text{ kN} \cdot \text{m} - (3\text{ kN})x$$



Luego el máximo momento es de 4 kN·m, y se ubica en a un metro del apoyo izquierdo. A continuación se determina el esfuerzo máximo producido en este punto.

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{(4000\text{ N}\cdot\text{m})(0.04\text{ m})}{\frac{(0.05\text{ m})(0.08)^3}{12}} = 75\text{ MPa}$$

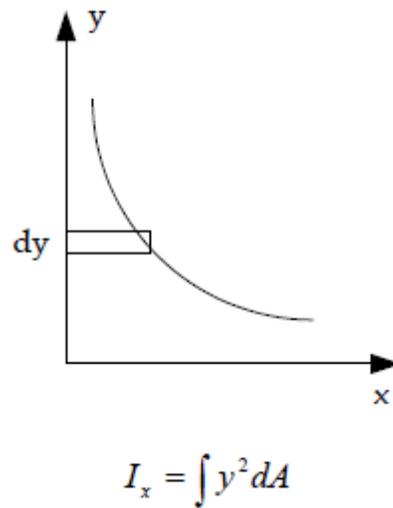
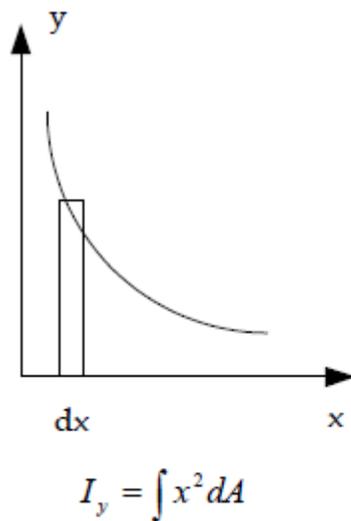
MOMENTO DE INERCIA

1. Momento de Inercia de áreas

El momento de Inercia de un área tiene la siguiente forma:

- Momento de Inercia Respecto el eje x: $I_x = \int y^2 dA$
- Momento de Inercia Respecto el eje y: $I_y = \int x^2 dA$

Notar que la coordenada que va en el integrando es la contraria al eje respecto del que se calcula el momento de inercia. Se debe tomar una franja de espesor diferencial y paralela a uno de los ejes coordenados.



Para hallar el momento de inercia respecto del eje x se toma un elemento rectangular paralelo al eje x .

1.1. Momento Polar de Inercia

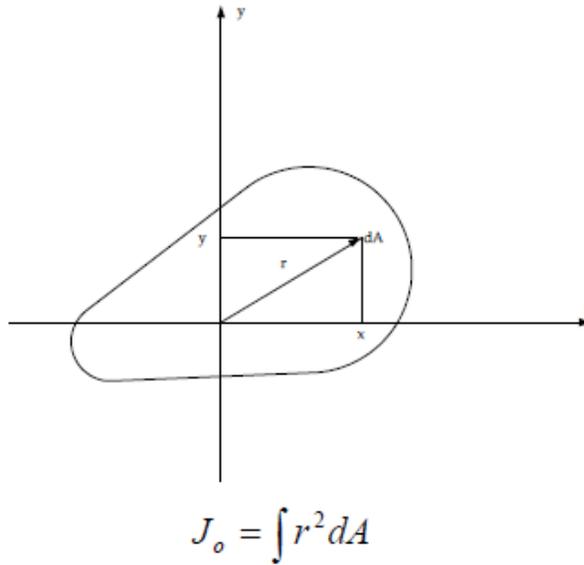
En problemas de barras sometidas a torsión aparece una integral de gran importancia que corresponde al momento polar de inercia.

$$J_0 = \int r^2 dA$$

J corresponde al momento de inercia del área dA respecto del punto O , también llamado polo O .

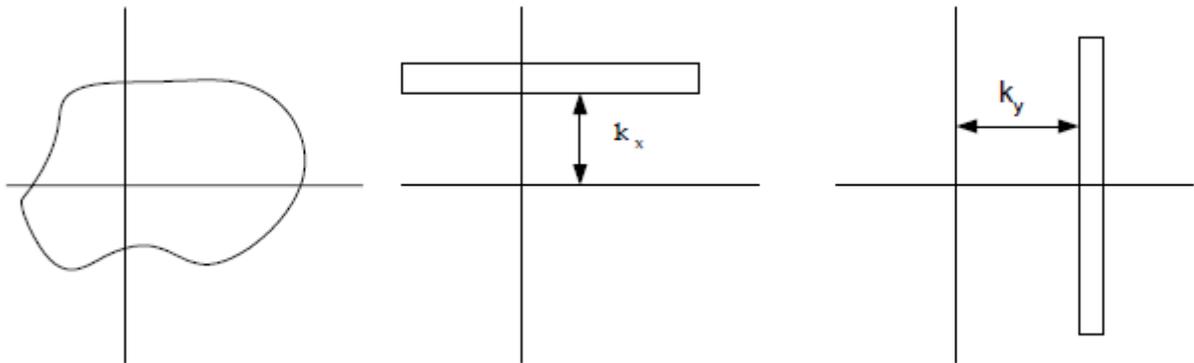
Ya que $r^2 = x^2 + y^2$

Se tiene $J_0 = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$



1.2. Radio de Giro

Dada un área A de la que se conoce el momento de inercia respecto de un eje, el radio de giro de esta área A corresponde a la distancia respecto de este eje a la cual debe girar el área



concentrada en una franja paralela al eje de tal forma que produzca el mismo momento de inercia.

Luego

$$I_x = K_x^2 A \rightarrow K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$I_y = K_y^2 A \rightarrow K_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Además

$$K_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$$

1.3. Teorema de Steiner

Permite obtener el momento de inercia de un área determinada respecto de cualquier eje que sea paralelo al eje que pasa por el centro de gravedad del área debiendo conocerse el momento de inercia respecto de este eje, es decir

$$I = \bar{I} + Ad^2$$

I : Momento de Inercia respecto a un eje cualquiera

\bar{I} : Momento de Inercia respecto al eje que pasa por el centro de gravedad del área

A, d : Área y distancia entre los eje

También

$$J_0 = \bar{J}_C + Ad^2$$

J_0 : Momento polar de Inercia respecto de O

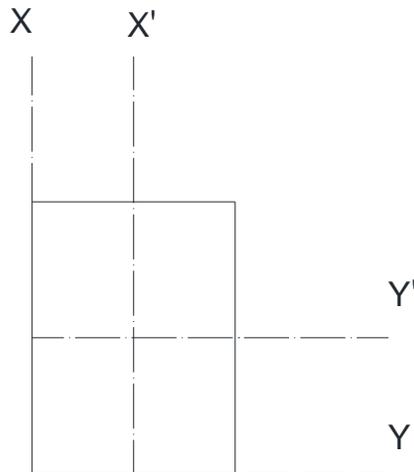
\bar{J}_C : Momento polar de inercia respecto al centro de gravedad del área

1.4. Momento de Inercia de Áreas compuestas

Los momentos de inercia de figuras que se pueden dividir en varias áreas simples o conocidas, se pueden calcular como la suma de los momentos de inercia de cada sub área referidos al mismo eje.

1.5. Ejemplo

Para la siguiente figura se determinarán los momentos de Inercia con respecto a los distintos ejes y el centro.



$$I_{x'} = \int y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{b}{3} y^3 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{y'} = \int x^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 h dx = \frac{h}{3} x^3 \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{hb^3}{12}$$

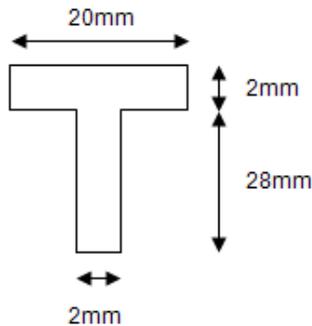
$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \frac{b}{3} y^3 \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \int x^2 dA = \int_0^b x^2 h dx = \frac{h}{3} x^3 \Big|_0^b = \frac{hb^3}{3}$$

$$J_c = I_{x'} + I_{y'} = \frac{1}{12} bh(b^2 + h^2)$$

2. Problemas Ilustrativos

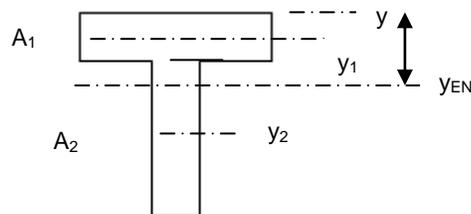
2.1. Problema N°7



Para el perfil mostrado en la figura, determinar el la posición del eje y el momento de Inercia respecto a este eje.

Solución:

En primera instancia se define un eje “y” de referencia para determinar el eje neutro, además la sección de la viga se separa en dos áreas, como se muestra en la figura.



Calculando las áreas de cada sección:

$$A_1 = (2 \text{ mm})(20 \text{ mm}) = 40 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = (2 \text{ mm})(28 \text{ mm}) = 56 \text{ mm}^2$$

$$y_{EN} = \frac{A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2}{A_T} = \frac{(40 \text{ mm}^2)(1 \text{ mm}) + (56 \text{ mm}^2)(16 \text{ mm})}{96 \text{ mm}^2} = 9.75 \text{ mm}$$

A continuación se determina los momentos de inercia respecto a los centros de gravedad de cada sección.

$$I_1 = \frac{(20 \text{ mm})(2 \text{ mm})^3}{12} = 13.33 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{(2 \text{ mm})(28 \text{ mm})^3}{12} = 3658.67 \text{ mm}^4$$

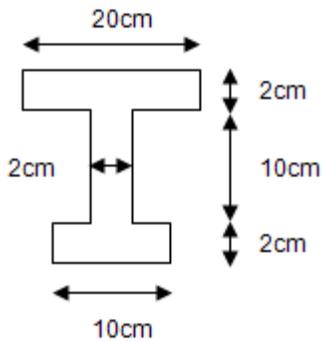
El momento respecto al eje neutro se calcula utilizando Steiner

$$I_{EN} = I_1 + A_1(y_{EN} - y_1)^2 + I_2 + A_2(y_2 - y_{EN})^2$$

$$I_{EN} = 13.33 \text{ mm}^4 + (40 \text{ mm}^2)(9.75 \text{ mm} - 1 \text{ mm})^2 + 3658.67 \text{ mm}^4 + (56 \text{ mm}^2)(16 \text{ mm} - 9.75 \text{ mm})^2$$

$$I_{EN} = 8922 \text{ mm}^4$$

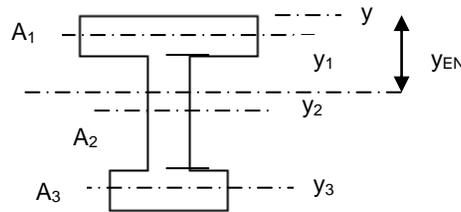
2.2. Problema N°8



Para el perfil mostrado en la figura, determinar el la posición del eje y , y el momento de Inercia respecto a este eje.

Solución:

En primera instancia se define un eje “y” de referencia para determinar el eje neutro, además la sección de la viga se separa en dos áreas, como se muestra en la figura.



Calculando las áreas de cada sección:

$$A_1 = (2 \text{ cm})(20 \text{ cm}) = 40 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = (2 \text{ cm})(10 \text{ cm}) = 20 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = (10 \text{ cm})(2 \text{ cm}) = 20 \text{ cm}^2$$

$$y_{EN} = \frac{A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2 + A_3 \bar{y}_3}{A_T} = \frac{(40 \text{ cm}^2)(1 \text{ cm}) + (20 \text{ cm}^2)(7 \text{ cm}) + (20 \text{ cm}^2)(13 \text{ cm})}{80 \text{ cm}^2} = 5.5 \text{ cm}$$

Aplicando el teorema de Steiner se calcula el momento de Inercia con respecto al eje neutro del perfil de la viga

$$I_{EN} = I_1 + A_1(y_{EN} - y_1)^2 + I_2 + A_2(y_2 - y_{EN})^2 + I_3 + A_3(y_3 - y_{EN})^2$$

$$I_{EN} = \frac{(20 \text{ cm})(2 \text{ cm})^3}{12} + (40 \text{ cm}^2)(5.5 \text{ cm} - 1 \text{ cm})^2 + \frac{(2 \text{ cm})(10 \text{ cm})^3}{12} + (20 \text{ cm}^2)(7 \text{ cm} - 5.5 \text{ cm})^2$$

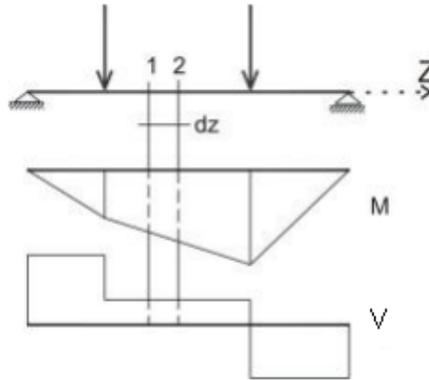
$$+ \frac{(10 \text{ cm})(2 \text{ cm})^3}{12} + (20 \text{ cm}^2)(13 \text{ cm} - 5.5 \text{ cm})^2$$

$$I_{EN} = 2166.7 \text{ cm}^4$$

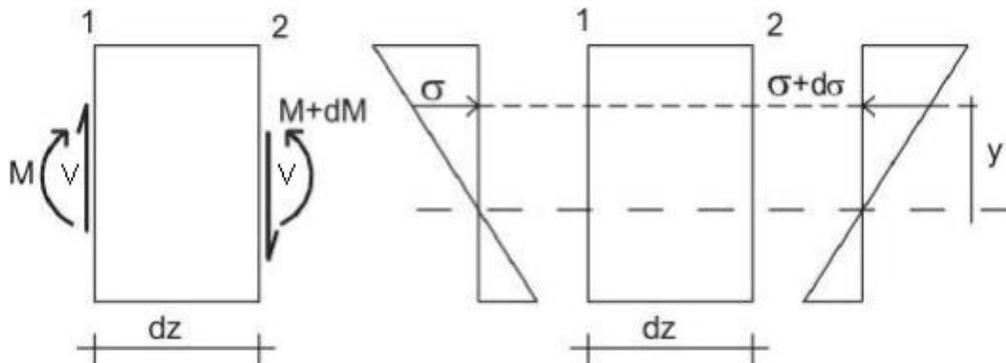
ESFUERZO CORTANTE HORIZONTAL

1. Fundamentos

Consideremos, por ejemplo, la viga de la figura, la que supondremos de sección constante. Aislemos un trozo de la misma delimitado por las secciones 1 y 2, separadas éstas por dz .



En la sección 1-1 actúa un momento flector M y una fuerza cortante V . En la 2-2, el momento será distinto al de la 1-1, pero lo expresaremos en función de M como $M+dM$, mientras que la fuerza de corte mantiene su valor V .



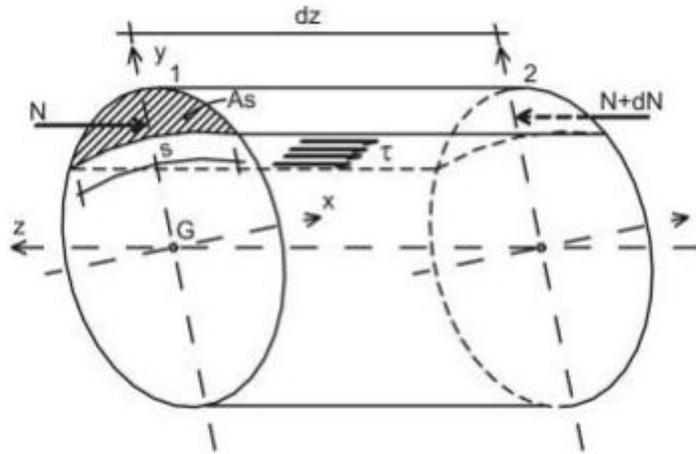
Como consecuencia de la flexión, en una fibra situada a una distancia “ y ” del eje neutro, se originarán en 1-1 tensiones:

$$\sigma = \frac{M}{I_n} y$$

Y en la 2-2:

$$\sigma + d\sigma = \frac{(M + dm)}{I_n} y$$

Supongamos ahora separada una parte del prisma de longitud dz por una superficie cilíndrica como se muestra en la siguiente figura. En la parte rayada actúan tensiones normales que originan una fuerza N .



$$N = \int \frac{M}{I_n} y dA$$

En la sección 2-2 ocurre algo similar

$$N + dN = \int \frac{(M + dM)}{I_n} y dA$$

Ambas fuerzas son coaxiales y su resultante tiene un valor de:

$$dN = \int \frac{dM}{I_n} y dA$$

Esta fuerza elemental tiende a hacer deslizar la parte superior del prisma ubicado por encima de la superficie cilíndrica, con respecto al resto del mismo. A esta acción se oponen tensiones tangenciales τ que actúan en la superficie curva de separación.

Para estas tensiones longitudinales admitiremos:

- que su dirección es paralela al eje de la pieza
- que varían en forma continua sobre la superficie curva.

Si llamamos s a la longitud de la curva de intersección de la superficie con el plano de la sección recta, tendremos:

$$dT = dz \int \tau ds$$

$$\text{Por equilibrio } dT = dN \quad \int \frac{dM}{I_n} y dA = dz \int \tau ds$$

$$\frac{dM}{I_n} \int y dA = dz \int \tau ds \rightarrow \frac{dM}{dz I_n} \int y dA = \int \tau ds = \tau_m S$$

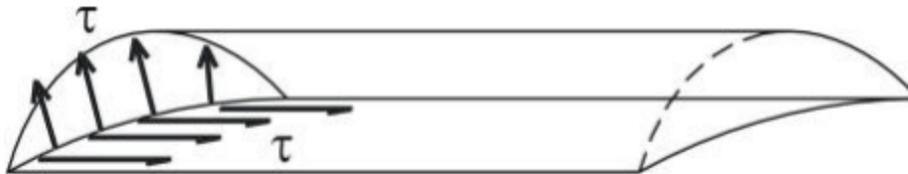
Notar que: $\frac{dM}{dz} = V$; $S = b$; ancho perfil; $Q = \int ydA$: momento estático de área

Finalmente se obtiene:

$$\tau_m = \frac{VQ}{I_n b}$$

La cual se conoce como fórmula de Jouravski – Colignon

De acuerdo con la ley de Cauchy, las tensiones τ de resbalamiento longitudinal dan origen en el plano de la sección a tensiones tangenciales, normales en cada punto de la curva s a su correspondiente tangente, y cuyo valor medio está dado por la expresión de Jouravski.



El momento estático $Q = \int ydA$ se calcula como $Q = A'_i \bar{y}_i$, donde A_i es el área que está por encima o por debajo del nivel donde se evalúa el esfuerzo, \bar{y}_i posición del centro de gravedad del área A_i con respecto al E.N.

1.1. Esfuerzo Cortante en Sección rectangular

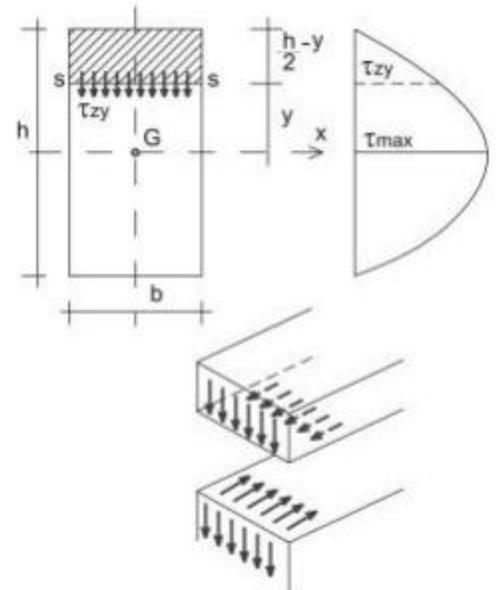
$$\tau = \frac{vQ}{Ib}$$

$$Q = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left[\left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} + y \right]$$

$$Q = \frac{1}{2} b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{1}{2} b \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\tau = \frac{V \frac{1}{2} b \frac{h^2}{4} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right]}{\frac{bh^3}{12} b}$$

$$\tau = \frac{3V}{2bh} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right]$$

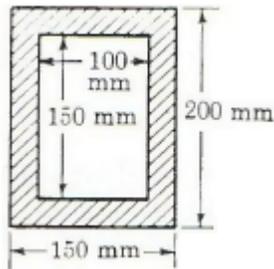


El esfuerzo será máximo en el E.N. teniendo un valor de

$$\tau = \frac{3V}{2bh}$$

2. Problemas Ilustrativos

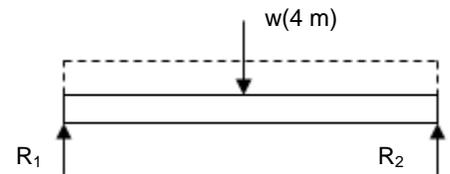
2.1. Problema N°9



Una viga simplemente apoyada de 4 m de claro tiene la sección indicada en la figura. Determinar la máxima carga uniformemente distribuida que puede aplicarse a todo el largo de la viga si el esfuerzo está limitado a 1.2 MPa.

Solución:

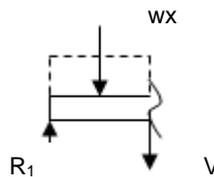
En primera instancia se calcula la fuerza cortante en la viga.



Haciendo equilibrio

$$\sum F_V = 0 \rightarrow 2R_1 = w(4m) \rightarrow R_1 = R_2 = w(2m)$$

Para determinar la fuerza cortante en la viga, se realiza un corte:

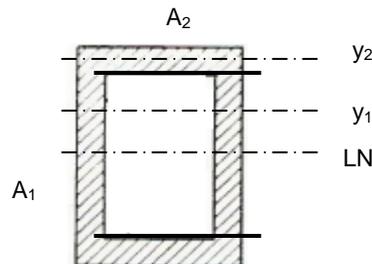


$$\sum F_V = 0 \rightarrow V = w(2 m) - wx = w(2 m - x)$$

Evaluando la fuerza cortante a lo largo de la viga, es decir para 4 m, se obtiene

$$V|_{x=4m} = -w(2 m)$$

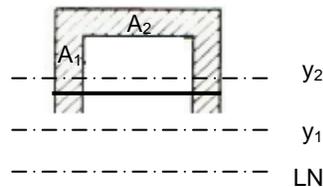
A continuación se determina el momento de inercia de la viga con respecto al eje neutro, que en este caso se determina por simetría del perfil



Aplicando en forma directa Steiner

$$I_{LN} = 2 \frac{(0.025 \text{ m})(0.15 \text{ m})^3}{12} + 2 \left[\frac{(0.15 \text{ m})(0.025)^3}{12} + (0.15 \text{ m})(0.025 \text{ m})(0.0875 \text{ m})^2 \right]$$
$$= 7.1875 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

A continuación se determina el momento estático Q, con respecto a las áreas ubicadas sobre la línea neutra del perfil



$$Q = A'_i \bar{y}_i = 2(0.025 \text{ m})(0.075 \text{ m})(0.0375 \text{ m}) + (0.15 \text{ m})(0.025 \text{ m})(0.0875 \text{ m}) = 4.6875 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

A continuación se aplica la fórmula de la flexión:

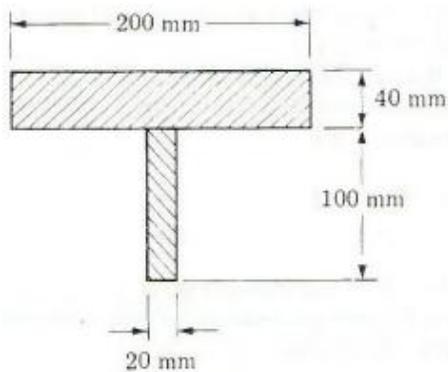
$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \leq 1.2 \text{ MPa}$$

$$V \leq \frac{\left(1.2 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right) I b}{Q} \rightarrow V \leq \frac{\left(1.2 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right) (7.1875 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4) (0.05 \text{ m})}{4.6875 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3} = 9200 \text{ N}$$

Luego

$$V = w(2 \text{ m}) \leq 9200 \text{ N} \rightarrow w \leq 4600 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

2.2. Problema N°10

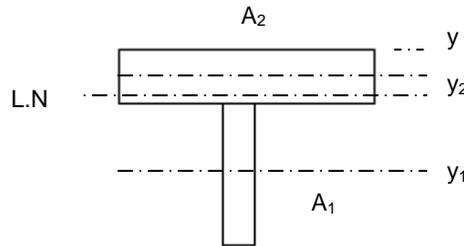


La sección mostrada en la figura corresponde a una viga formada al ensamblar dos piezas rectangulares de madera. La viga está sometida a una fuerza cortante máxima de 60 kN. Demostrar que la línea neutra está localizada 34 mm por debajo del borde superior y que $I_{EN} = 10.57 \times 10^6 \text{ mm}^4$. Usando estos valores, determinar el esfuerzo cortante en:

- A) Eje neutro.
- B) en la unión de las dos piezas.

Solución:

A continuación se determinará la posición de la línea neutra, y se calculará el momento de inercia con respecto al eje neutro y el momento estático de las áreas ubicadas sobre el eje neutro.



$$y_{LN} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2}{A_T} = \frac{(90 \text{ mm})(20 \text{ mm})(100 \text{ mm}) + (20 \text{ mm})(200 \text{ mm})(40 \text{ mm})}{(20 \text{ mm})(100 \text{ mm}) + (200 \text{ mm})(40 \text{ mm})} = 34 \text{ mm}$$

Aplicando Steiner para el cálculo del momento de Inercia

$$I_{LN} = \left[\frac{(0.02 \text{ m})(0.1 \text{ m})^3}{12} + (0.02 \text{ m})(0.1 \text{ m})(0.09 \text{ m} - 0.034 \text{ m})^2 \right] + \left[\frac{(0.2 \text{ m})(0.04 \text{ m})^3}{12} + (0.2 \text{ m})(0.04 \text{ m})(0.034 \text{ m} - 0.02 \text{ m})^2 \right]$$

$$I_{LN} = 1.057 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

A continuación se determina el momento estático con respecto a la línea neutra

$$Q = A'_i \bar{y}_i = (0.034 \text{ m})(0.2 \text{ m})(0.017 \text{ m}) = 1.156 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

A) Determinando el esfuerzo cortante en el eje neutro, se tiene

$$\tau = \frac{(60000 \text{ N})(1.156 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3)}{(1.057 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4)(0.2 \text{ m})} = 3.28 \text{ MPa}$$

B) Para determinar el esfuerzo en la unión de las dos piezas, se debe calcular un nuevo momento estático.

El momento estático se puede calcular de dos formas, primero como el área que se encuentra sobre el nivel de donde se evalúa el esfuerzo, o con el área que se encuentra bajo el nivel donde se evalúa el esfuerzo, en ambos caso dan valores idénticos.

$$Q = A'_i \bar{y}_i = (0.04 \text{ m})(0.2 \text{ m}) \left(0.034 \text{ m} - \frac{0.04 \text{ m}}{2} \right) = 1.12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$Q = A'_i \bar{y}_i = (0.02 \text{ m})(0.1 \text{ m})(0.05 \text{ m} + 0.04 \text{ m} - 0.034 \text{ m}) = 1.12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

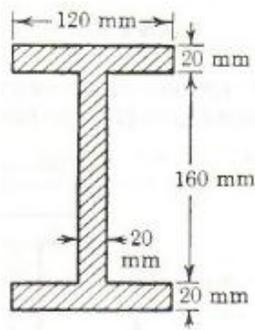
- Para el trozo de madera superior $b = 0.2 \text{ m}$

$$\tau = \frac{(60000 \text{ N})(1.12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3)}{(1.057 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4)(0.2 \text{ m})} = 3.18 \text{ MPa}$$

- Para el trozo de madera inferior $b = 0.02 \text{ m}$

$$\tau = \frac{(60000 \text{ N})(3.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3)}{(1.057 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4)(0.02 \text{ m})} = 31.8 \text{ MPa}$$

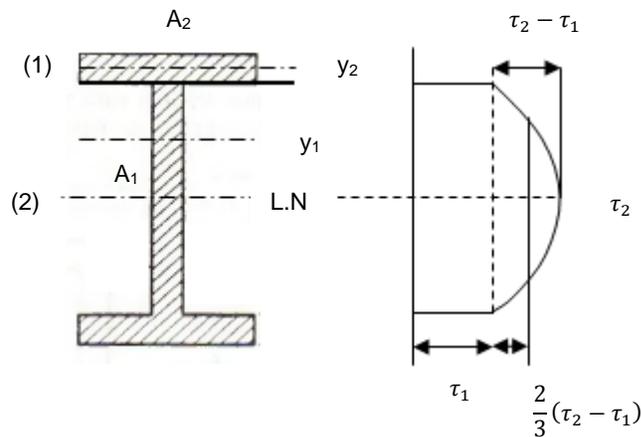
2.3. Problema N°11



Determinar el máximo y mínimo valor del esfuerzo cortante en el patín de la viga que tiene la sección que se muestra en la figura, si $V = 100$ kN. Calcular también el porcentaje de la fuerza cortante que absorbe el patín.

Solución:

Se sabe que el esfuerzo cortante es máximo en el eje neutro, y será mínimo en el cambio de sección del patín



Calculando el momento de Inercia respecto al eje neutro, se obtiene

$$I = \frac{(0.02 \text{ m})(0.16 \text{ m})^3}{12} + 2 \left[\frac{(0.12 \text{ m})(0.02 \text{ m})^3}{12} + (0.12 \text{ m})(0.02 \text{ m})(0.09 \text{ m})^2 \right] = 4.587 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

A continuación se calcula el esfuerzo cortante en la sección (1)

$$Q = (.12 \text{ m})(0.02 \text{ m})(0.09 \text{ m}) = 2.16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$\tau = \frac{(100000 \text{ N})(2.16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3)}{(4.587 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4)(0.02 \text{ m})} = 23.5 \text{ MPa}$$

Calculando el esfuerzo cortante en el eje neutro, sección (2), se obtiene

$$Q = (.12 \text{ m})(0.02 \text{ m})(0.09 \text{ m}) + (0.08 \text{ m})(0.02 \text{ m})(0.04 \text{ m}) = 2.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$\tau = \frac{(100000 \text{ N})(2.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3)}{(4.587 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4)(0.02 \text{ m})} = 30.5 \text{ MPa}$$

De la gráfica presentada, de la fuerza cortante presentada, se determina el esfuerzo cortante promedio que actúa sobre el alma

$$\tau_{prom} = \tau_1 + \frac{2}{3}(\tau_2 - \tau_1) = 23.5 \text{ MPa} + \frac{2}{3}(30.5 \text{ MPa} - 23.5 \text{ MPa}) = 28.17 \text{ MPa}$$

La cortante promedio en el alma se calcula de la siguiente forma

$$V_{alma} = \tau_{prom}(A_{alma}) = (28.17 \text{ MPa})(20 \text{ mm})(160 \text{ mm}) = 90.144 \text{ kN}$$

Por lo tanto el porcentaje de la fuerza cortante que absorbe el patín, se calcula de la siguiente manera:

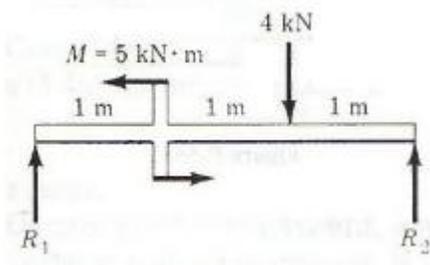
$$\%V_{alma} = \frac{V_{alma}}{V} = \frac{90.144 \text{ kN}}{100 \text{ kN}} = 90.2\%$$

DISEÑO POR FLEXIÓN Y CORTANTE

En esta sección se aplicarán los conceptos tratados anteriormente, pero aplicados en forma simultánea, es decir, se determinará capacidad de carga y dimensionamiento de vigas sometidas a flexión y a esfuerzo cortante.

1. Problemas Ilustrativos

1.1. Problema N°12



Calcular las dimensiones del cuadrado más pequeño que sea la sección transversal de la viga mostrada en la figura, si $\tau \leq 900 \text{ kPa}$ y $\sigma \leq 8 \text{ MPa}$

Solución:

A continuación se construyen los diagramas de fuerza cortante y momento flector para determinar las sollicitaciones máximas.

Del DCL de la estructura

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow R_2(3 \text{ m}) + 5 \text{ kN} \cdot \text{m} - (4 \text{ kN})(2 \text{ m}) = 0 \rightarrow R_2 = 1 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow R_1 + R_2 - 4 \text{ kN} = 0 \rightarrow R_1 = 3 \text{ kN}$$

- Zona I:

$$0 \leq x < 1 \text{ m}$$

$$V = 3 \text{ kN}$$

$$M = (3 \text{ kN})x$$

- Zona II:

$$1 \text{ m} \leq x < 2 \text{ m}$$

$$V = 3 \text{ kN}$$

$$M = (3 \text{ kN})x - 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- Zona III:

$$2 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$$

$$V = -1 \text{ kN}$$

$$M = 3 \text{ kN} \cdot \text{m} - (1 \text{ kN})x$$

Diagrama Fuerza cortante

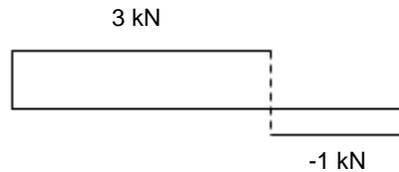
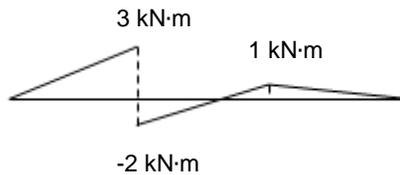


Diagrama Momento Flector



Cumpliendo la condición del esfuerzo cortante, para una sección cuadrada de lado a se tiene:

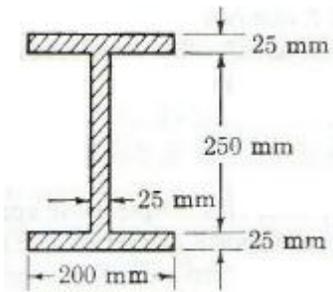
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3 V}{2 a^2} = \frac{3 (3000 \text{ N})}{2 a^2} \leq 900 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \rightarrow a \geq 0.071 \text{ m}$$

Cumpliendo la condición de limitación del esfuerzo por flexión

$$\sigma = \frac{6M}{a^3} = \frac{6(3000 \text{ N} \cdot \text{m})}{a^3} \leq 8 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \rightarrow a \geq 0.131 \text{ m}$$

Por lo tanto, para que se cumpla con ambas condiciones, la sección cuadrada transversal de la viga, debe tener un tamaño de al menos 0.131 m.

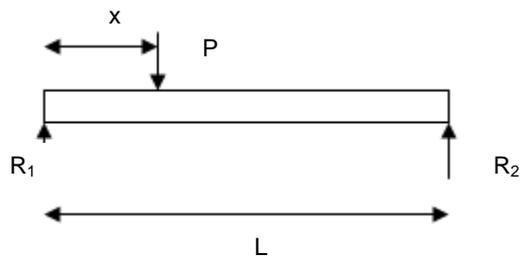
1.2. Problema N°13



Una viga compuesta, de madera, de sección según como se muestra en la figura, se utiliza para soportar una carga P en un punto de un claro de 8 m. Determinar P y su posición de manera que causen simultáneamente $\sigma_{m\acute{a}x} = 8 \text{ MPa}$ y $\tau_{m\acute{a}x} = 1.2 \text{ MPa}$.

Solución:

Construyendo el DCL de la viga



$$\sum M_1 = 0 \rightarrow R_2 L - Px = 0 \rightarrow R_2 = P \frac{x}{L}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow R_1 + P \frac{x}{L} - P = 0 \rightarrow R_1 = P \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Calculando la fuerza cortante y el momento flector, se obtiene

$$V = P \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$M = Px \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Del enunciado del problema, se debe cumplir con la siguiente relación:

$$\frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\tau_{m\acute{a}x}} = \frac{8}{1.2}$$

Además

$$\frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\tau_{m\acute{a}x}} = \frac{Mc}{I \frac{VQ}{Ib}} = \frac{Mcb}{VQ}$$

A continuación se determina el momento estático del perfil, con respecto al eje neutro

$$Q = (0.025m)(0.125 m)(0.0625 m) + (0.2 m)(0.025 m)(0.1375 m) = 8.83 \cdot 10^{-4} m^3$$

Reemplazando el valor de la fuerza cortante y el momento flector en la relación anterior, se obtiene:

$$\frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\tau_{m\acute{a}x}} = \frac{Px \left(1 - \frac{x}{8m}\right) (0.15 m)(0.025 m)}{P \left(1 - \frac{x}{8m}\right) (8.83 \cdot 10^{-4} m^3)} = \frac{8}{1.2}$$

Resolviendo la ecuación anterior, se obtiene la posición de la aplicación de la carga P, medida desde la reacción R₁

$$x = 1.57 m$$

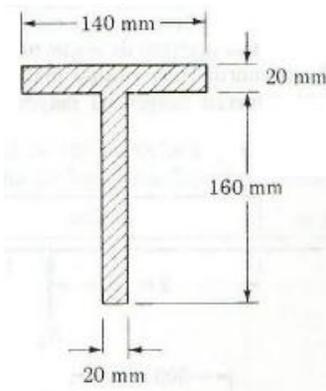
Para determinar la carga P, se deja la fuerza cortante en función de P, y se utiliza la condición de esfuerzo cortante máximo.

$$I = \frac{(0.025 m)(0.25)^3}{12} + 2 \left[\frac{(0.2 m)(0.025 m)^3}{12} + (0.2 m)(0.025 m)(0.1375 m)^2 \right] = 2.221 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$V = P \left(1 - \frac{1.57 m}{8 m}\right) = 0.804P$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{0.804P(8.83 \cdot 10^{-4} m^3)}{(2.221 \cdot 10^{-4} m^4)(0.025 m)} = 1.2 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} \rightarrow P = 9.4 kN$$

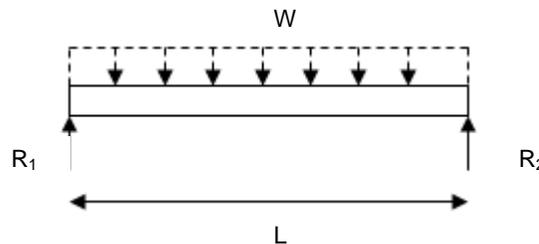
1.3. Problema N°14



Una viga simplemente apoyada de L metros de longitud, soporta una carga distribuida uniformemente de 16 kN/m a todo su largo y tiene la sección mostrada en la figura. Calcular el valor de L que ocasione un máximo esfuerzo por flexión de 40 MPa. En estas condiciones, ¿Cuánto vale el máximo esfuerzo cortante?

Solución:

En primera instancia se calcula el momento máximo, para se construirá el DCL de la viga.



Haciendo equilibrio y empleando la simetría del problema, se tiene:

$$\sum F_V = 0 \rightarrow R_1 = R_2 = \frac{wL}{2}$$

Calculando la fuerza cortante y el momento flector, se tiene:

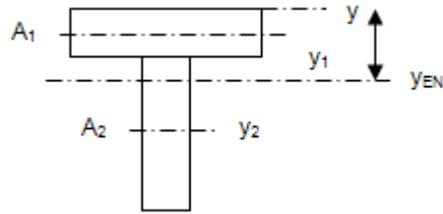
$$V = w \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

$$M = \frac{wx}{2} (L - x)$$

El momento flector es máximo cuando la fuerza cortante se hace cero,

$$V = 0 \rightarrow x = \frac{L}{2} \quad M|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{wL^2}{8}$$

A continuación se determinara el momento de Inercia, la posición de la fibra neutra, y el momento estático de la sección, como se pide el máximo esfuerzo cortante, se calcula el momento estático con respecto al eje neutro.



$$y_{EN} = \frac{(20 \text{ mm})(160 \text{ mm})(100 \text{ mm}) + (140 \text{ mm})(20 \text{ mm})(10 \text{ mm})}{(20 \text{ mm})(160 \text{ mm}) + (140 \text{ mm})(20 \text{ mm})} = 58 \text{ mm}$$

$$I = \left[\frac{(0.02 \text{ m})(0.16 \text{ m})^3}{12} + (0.02 \text{ m})(0.16 \text{ m})(0.042 \text{ m})^2 \right] + \left[\frac{(0.14 \text{ m})(0.02 \text{ m})^3}{12} + (0.14 \text{ m})(0.02 \text{ m})(0.048 \text{ m})^2 \right] = 1.9016 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$Q = (0.02 \text{ m})(0.038 \text{ m})(0.019 \text{ m}) + (0.14 \text{ m})(0.02 \text{ m})(0.048 \text{ m}) = 1.4884 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Empleando la condición de máximo esfuerzo debido a flexión, es posible hallar el valor de la longitud L

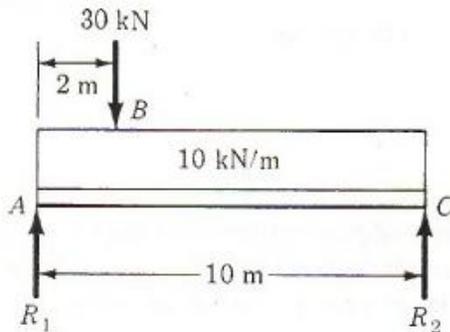
$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{\left(16000 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right) L^2}{8} (0.18 \text{ m} - 0.058 \text{ m})}{1.9016 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4} \leq 40 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \rightarrow L \leq 1.77 \text{ m}$$

A continuación se determina el máximo esfuerzo cortante:

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(16000 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(1.77 \text{ m})\right)(1.4884 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3)}{(1.9016 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4)(0.02 \text{ m})} = 5.5 \text{ MPa}$$

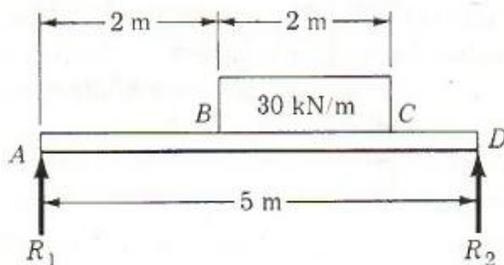
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Problema N°1



Para la viga que se muestra en la figura, determinar los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

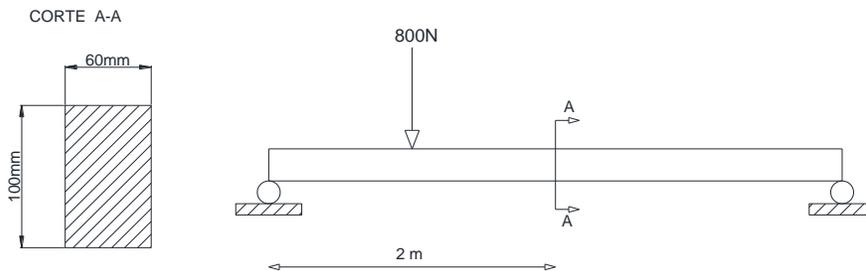
2. Problema N°2



Para la viga de la figura construir los diagramas de Fuerza cortante y momento flector.

3. Problema N°3

Una viga simplemente apoyada, de sección rectangular de 60 mm de ancho por 100 mm de altura, y de 4 m de longitud, está sometida a una carga concentrada de 800 N en un punto situado a 1 m de uno de los apoyos. Determinar los diagramas de fuerza cortante y momento flector indicando los máximos. Determinar el esfuerzo de corte y esfuerzo normal por flexión en una fibra situada a 10 mm de la parte superior de la sección, para una sección situada en la mitad del claro.

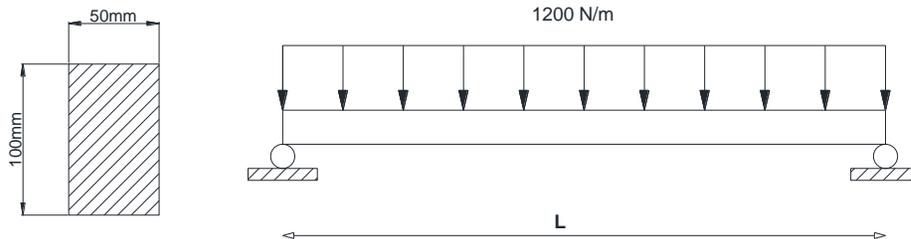


Respuesta:

$$\begin{aligned}
 V_{max} &= 600 \text{ N} \\
 M_{max} &= 600 \text{ N/m} \\
 V(2m) &= -200 \text{ N} \\
 M(2m) &= 400 \text{ N/m} \\
 \sigma_{(2m)} &= 6 \text{ MPa} \\
 \tau_{2m} &= 32000 \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

4. Problema N°4

Una barra rectangular simplemente apoyada, de 50 mm de ancho por 100 mm de espesor, soporta una carga de 1200 N/m uniformemente distribuida sobre toda su longitud. ¿Cuál es la longitud máxima de la barra si el esfuerzo flexionante está restringido a 20 MPa?

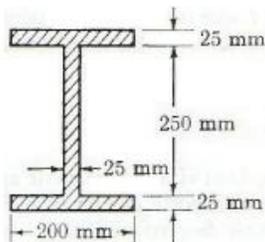


Respuesta:
L_{max} = 2357 mm

5. Problema N°5

Una viga de madera de 90 mm de ancho y 160 mm de altura está sometida a una fuerza cortante vertical de 20 kN. Determinar el esfuerzo cortante en puntos tomados de 20 en 20 mm a lo alto de la viga, a partir de su borde superior.

6. Problema N°6

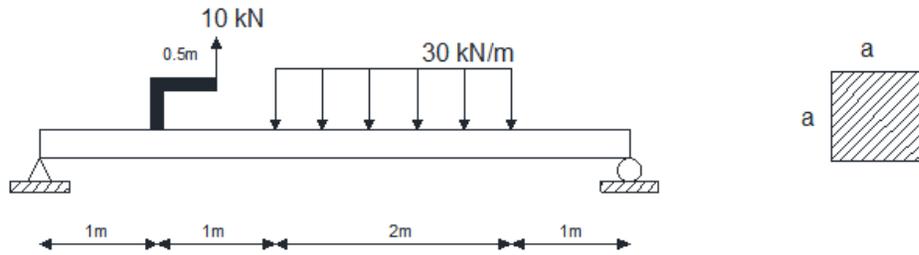


Una viga simplemente apoyada de claro L y carga concentrada P en el centro, tiene una sección I como la indicada en la figura. Determinar la relación entre $\sigma_{m\acute{a}x}$ y $\tau_{m\acute{a}x}$.

Respuesta : $\frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\tau_{m\acute{a}x}} = 2.12 L$

7. Problema N°7

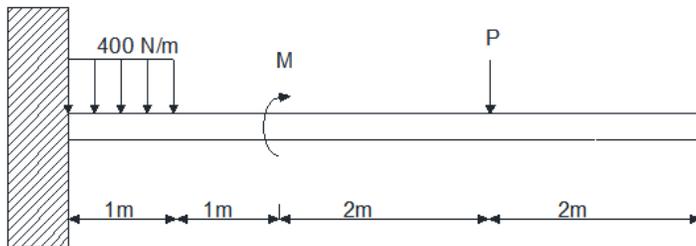
En la siguiente viga, el esfuerzo admisible es de 150MPa. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector, indicando los máximos. Suponiendo que la sección de la viga es cuadrada, determinar el lado "a"



Respuestas: $R_1=17\text{kN}$, $R_2=33\text{kN}$, $V_{\text{max}}=27\text{ kN}$; $M_{\text{max}}=51.15\text{kNm}$, $a=0.13\text{m}$

8. Problema N°8

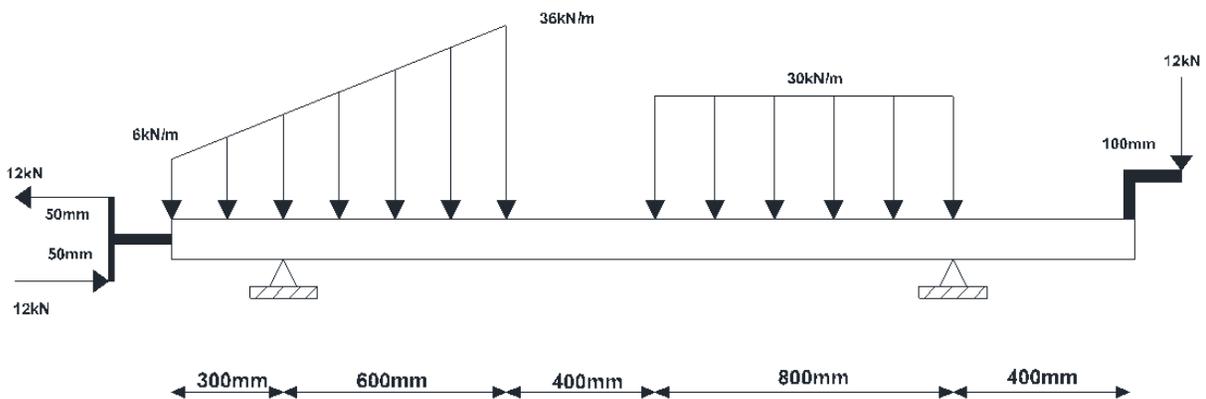
Considere la viga en voladizo mostrada en la figura. Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector, indicando los máximos. Considerar la carga puntual $P=500\text{ N}$ y el momento aplicado $M=100\text{ Nm}$.



Respuestas:
 $R_1=900\text{N}$, $M_1=2300\text{Nm}$
 $V_{\text{max}}=900\text{N}$, $M_{\text{max}}=2300\text{Nm}$

9. Problema N°9

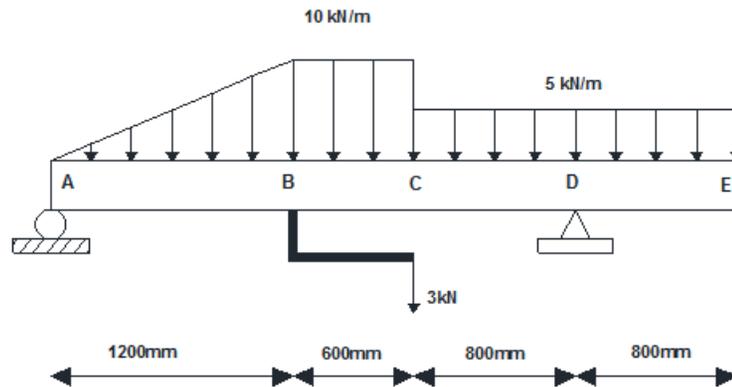
Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de momento flector y fuerza cortante en la siguiente viga.



Respuestas:
 $R_1=18,87\text{kN}$; $R_2=33,06\text{ kN}$; $V_{\text{max}}=24.03\text{ kN}$; $M_{\text{max}}=6\text{ kNm}$

10. Problema N°10

En la siguiente viga calcular las reacciones en los apoyos y luego dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector, indicando los máximos.

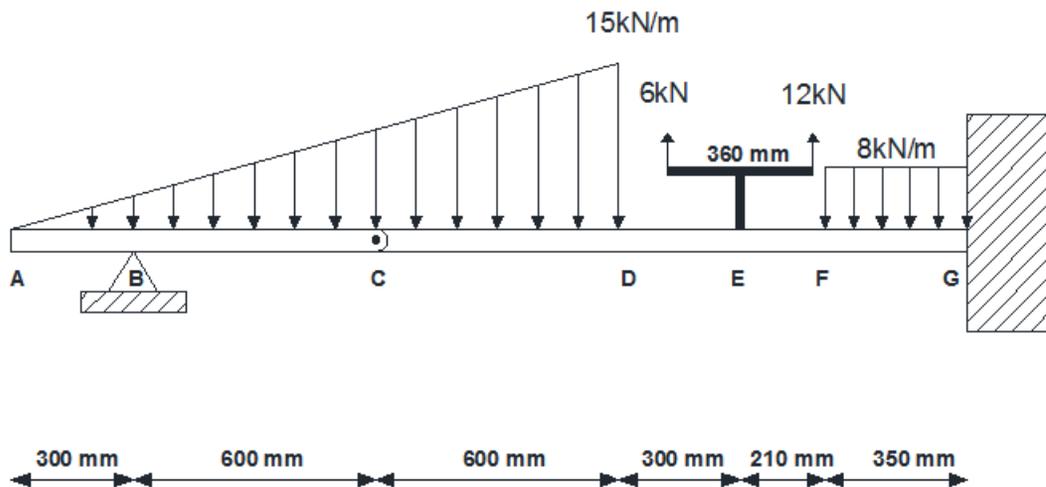


Respuestas:

$R_1=7,62 \text{ kN}$; $R_2=15,38 \text{ kN}$; $V_{\max}=11,38 \text{ kN}$; $M_{\max}=8,54 \text{ kNm}$

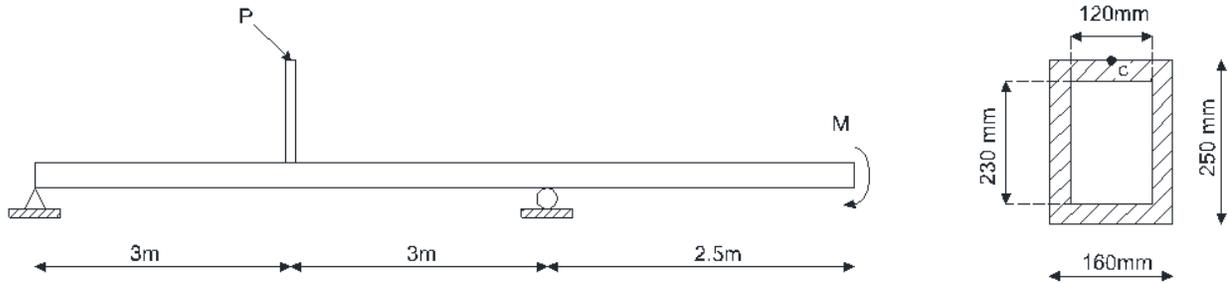
11. Problema N°11

Calcular las reacciones en la siguiente viga compuesta y dibujar los diagramas de fuerzas cortantes y momento flector. El esfuerzo de corte máximo en el pasador es de 20MPa, calcular el diámetro de este, si está sometido a cortante doble.



12. Problema N°12

Para la siguiente viga, simplemente apoyada, calcular las reacciones, dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector. Considerando la sección en corte de la viga como se muestra en la figura, calcular los esfuerzos máximos en el punto C. La fuerza aplicada en 45° sobre el pivote de 2m de altura, es de $600\sqrt{2} \text{ N}$ y el momento aplicado en el extremo de la barra es de 800 Nm



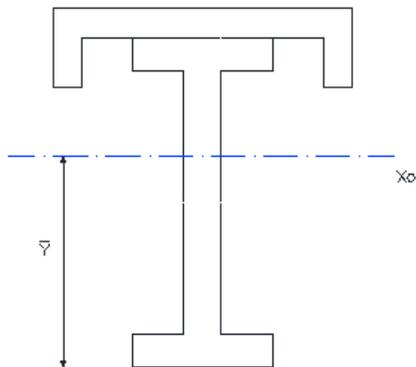
Respuestas:

$R_{1x}=600\text{N}$; $R_{1y}=33,33\text{N}$; $R_{2y}=633,33\text{N}$; $V_{\text{max}}=633,33\text{N}$; $M_{\text{max}}=1100\text{Nm}$

$\sigma_{\text{máx}} = 1,55\text{MPa}$ y $\tau_{\text{máx}} = 0,0834\text{MPa}$

13. Problema N°13

Determinar la distancia \bar{y} al eje neutro X_0 del perfil compuesto indicado en la figura y calcular el momento de inercia respecto de este eje. La sección está compuesta por un perfil C250x23 y uno W360x57.



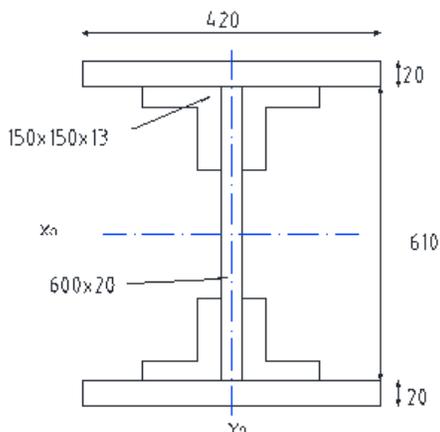
Respuestas:

$\bar{y}=227,2\text{mm}$

$I_{X_0}=220,9 \cdot 10^6$

14. Problema N°14

Se construye una columna con 4 ángulos de $150 \times 150 \times 13$, que se unen a un alma de 600×20 y a dos placas de 460×20 . Calcular el momento de inercia respecto del eje neutro X_0 , si para los ángulos, $I_x=I_y=8,05 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$, $\bar{x}=\bar{y}=42,3 \text{ mm}$ y $A=3730 \text{ mm}^2$

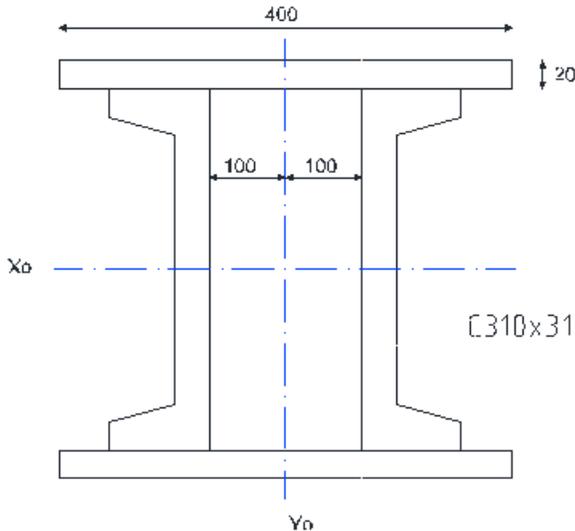


Respuesta:

$I_{E.N}=3250 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

15. Problema N°15

Calcular los momentos de inercia de la sección con respecto a los ejes de simetría. La sección está compuesta por dos perfiles C310x31 y dos placas de 400x20.



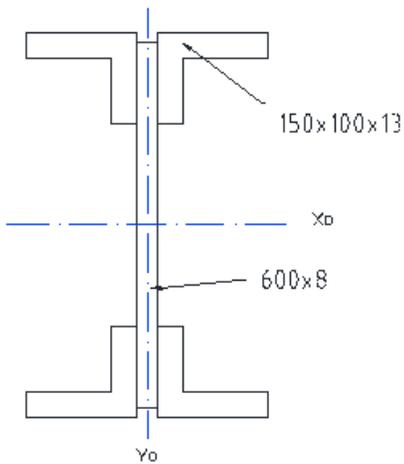
Respuestas:

$$I_{X_0} = 530 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{Y_0} = 324,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

16. Problema N°16

Calcular el momento de inercia de la viga de sección compuesta por 4 ángulos de 150x100x13 y un alma de 600x8, con respecto al eje neutro X_0 , como se indica en la figura.



Repuestas

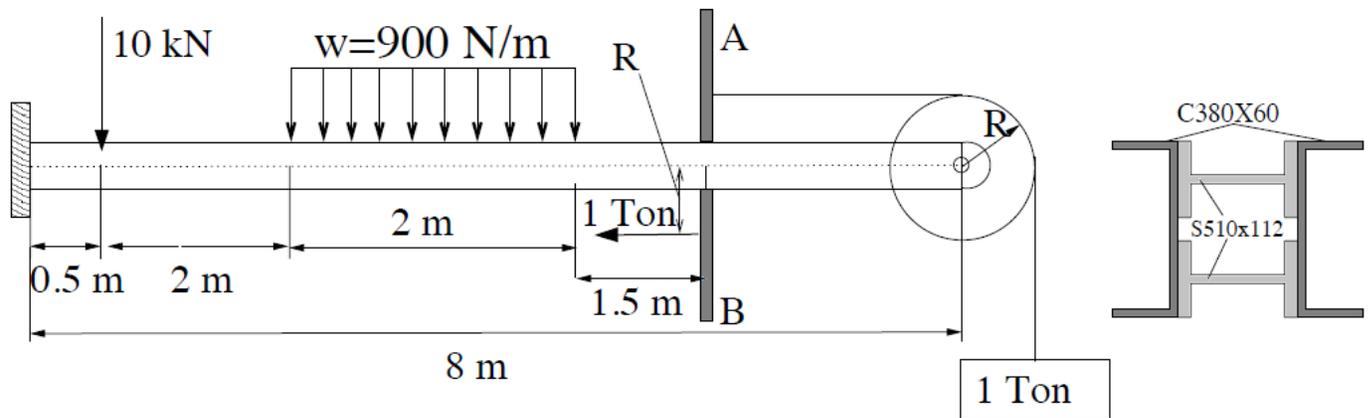
$$I_{EN} = 1121 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

17. Problema N°17 (PEP 1, 2 Semestre 2011)

La siguiente viga soporta una carga puntual de 10 kN, una carga distribuida de 900 N/m y en el extremo derecho soporta una carga de 1 tonelada, mediante una polea de radio 400mm.

La placa rígida AB que sujeta la cuerda está perfectamente unida a la viga. La viga se fabrica con dos perfiles C380x60 y dos perfiles S510x112, los cuales están perfectamente soldados. Se pide:

- Calcular las reacciones en la viga,
- Dibujar los momentos de fuerza cortante y momento flector, indicando los máximos
- Momento de inercia de la viga
- Esfuerzo normal por flexión normal en el eje neutro y esfuerzos máximos por flexión normal



18. Problema N°18 (PEP 1, 1 Semestre 2011)

La figura muestra 2 vigas unidas por un pasador en C. Estas vigas son de acero ($E=200\text{GPa}$ y $\nu=0,27$) y están unidas mediante un pasador en C. Ambas, se fabrican con 2 perfiles L soldados a una plancha de 12 mm de espesor, tal como se muestra en la vista 1-1. En el punto B, se suelda un elemento muy rígido BE y a este se le suelda un elemento deformable EF de sección rectangular como muestra la vista 2. Se pide:

- Reacciones en los apoyos
- Diámetro del pasador C si soporta un esfuerzo cortante doble máximo de 25 MPa
- Diagramas de fuerza cortante y momento flector de toda la estructura, indicando los máximos
- Momento de inercia de la viga y del elemento EF
- Esfuerzo de corte máximo por flexión y esfuerzo normal máximo por flexión en la viga AD

