

Unidad  
Resistencia de Materiales

Curso  
“Resistencia de Materiales Aplicada”

AÑO 2011

# APUNTES



# MÓDULO I: ESFUERZO Y DEFORMACIONES

## FUERZAS INTERNAS

### 1. Introducción

En el estudio estático de cuerpos y estructuras, se determina la resultante de las fuerzas y se averigua si el cuerpo está en equilibrio o no. Si la resultante es nula el cuerpo está en equilibrio estático, condición general de las estructuras; si la resultante es diferente de cero, se suman las fuerzas inerciales para obtener un equilibrio dinámico.

Por otra parte la rama denominada resistencia de materiales, establece las relaciones entre las cargas aplicadas y los efectos en el interior de los elementos estructurales partiendo de los principios de la mecánica. Por lo cual es fundamental comprender los principios de la mecánica y sus aplicaciones.

### 2. Definición

Para estudiar los efectos de las cargas aplicadas, es necesario conocer la magnitud de las fuerzas internas. Las fuerzas internas son las que están en el interior de los elementos y son las que mantienen unidas todas las partes del cuerpo.

#### 2.1. Formas de estudiar las Fuerzas Internas

La forma de obtener las fuerzas internas representa de forma global el procedimiento típico del análisis estructural, importante tener siempre en cuenta para cualquier estudio de un sistema estructural.

Primero se aísla el elemento o miembro de una disposición particular de elementos estructurales. Sobre este se indica todas las fuerzas aplicadas y reacciones que actúan sobre él. Esta indicación de fuerzas se denomina diagrama de cuerpo libre del elemento. Las reacciones se determinan mediante la ecuaciones de la estática, hiperestáticos las se complementa con cinemáticas.

aplicación de las en los problemas ecuaciones de la estática consideraciones

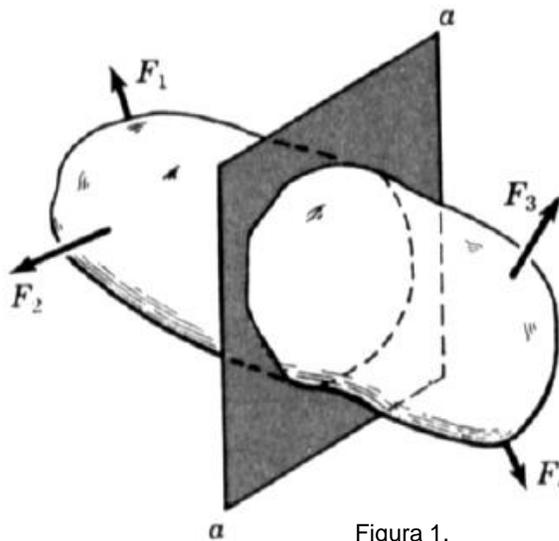


Figura 1.

En la figura 1 el plano a-a corresponde a un plano de corte perpendicular al cuerpo

En el punto en que se desee la magnitud del esfuerzo se hace pasar un plano de corte perpendicular al eje del cuerpo, y parte de éste, a uno u otro lado de la sección, se separa completamente.

En la sección que se investiga se determina el sistema de fuerzas internas necesario para mantener en equilibrio la parte aislada del elemento.

Una vez resuelto en forma apropiada el sistema de fuerzas que actúa en la sección, las fórmulas establecidas permitirán determinar los esfuerzos en la sección considerada. Si se sabe la magnitud del esfuerzo máximo en una sección, se podrá especificar el material apropiado para ella; o, recíprocamente, si se conocen las propiedades físicas de un material, es posible seleccionar un elemento del tamaño adecuado.

En algunos otros problemas, el conocimiento de la deformación en una sección arbitraria de un elemento, originada por las fuerzas internas, permitirá predecir la deformación de la estructura en conjunto y, por tanto, si fuera necesario, diseñar elementos que no se flexionen o cambien excesivamente.

## 2.2. Planos de Estudio

El efecto interno depende de la elección y orientación de la sección a estudiar. Si se orienta un plano de forma tal que se elimine el corte y la resultante sea perpendicular al plano, el efecto de tensión obtenido es el máximo; esta fuerza es la que en resistencia de materiales se estudia para que la estructura resista los efectos internos máximos a cualquier combinación de cargas. Conseguir esta orientación del plano es difícil de lograr, por lo tanto se analizan en planos colocados en la perpendicular al eje del elemento en cualquier sección.

## 3. Notación y Componentes

Por convención se utiliza la siguiente notación; el primer subíndice indica el plano sobre la que actúa la fuerza y el segundo la dirección de cada una.

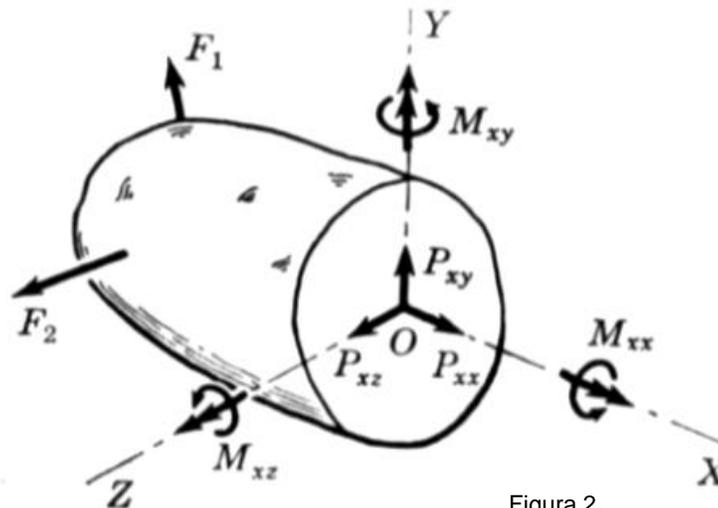


Figura 2.

En la figura 2 se presenta las componentes de las fuerzas Internas. A continuación se describe cada una de ellas.

- Fuerza Axial ( $P_{xx}$ ): realiza la acción de tirar y se representa por la fuerza de tracción (tendencia al alargamiento) y de compresión (tendencia a acortarlo). Se simboliza por P en la figura.



Efecto de Tracción

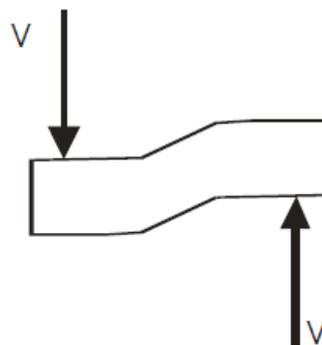
Figura 3.



Efecto de compresión

Figura 4.

- Fuerza Cortante ( $P_{xy}$ ,  $P_{xz}$ ): realiza la acción de deslizamiento de una porción de la sección respecto a la otra. Se simboliza por V.



Fuerza Cortante

Figura 5.

- Momento flector ( $M_{xy}$ ,  $M_{xz}$ ): realiza la acción de curvar el cuerpo o flexionarlo respecto a los ejes Y o Z. Se simboliza por  $M_y$  o  $M_z$ .



Momento Flector

Figura 6.

- Momento torsor ( $M_{xx}$ ): realiza la torsión sobre el sólido. Se simboliza por T o  $M_t$ .



Momento Torsor

Figura 7.

## ESFUERZO SIMPLE (TRACCIÓN COMPRESIÓN)

### 1. Introducción

Una sección de una pieza está solicitada a Tracción-Compresión cuando la resultante de las fuerzas interiores tiene la componente normal a la superficie en estudio, en la siguiente figura se muestra la situación descrita anteriormente, en donde la componente normal corresponde a  $R_x$ .

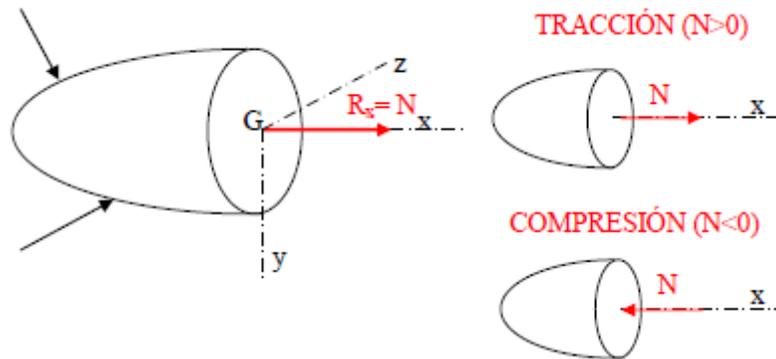


Figura 8.

Algunos ejemplos comunes en donde aparecen los efectos de tracción y compresión, son las barras que componen estructuras y cerchas, y los cables que sujetan barras, por nombrar algunos. En la siguiente figura se presentan tales configuraciones.

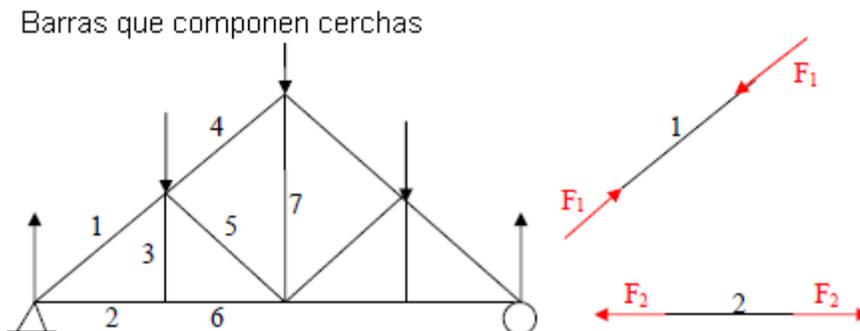


Figura 9.

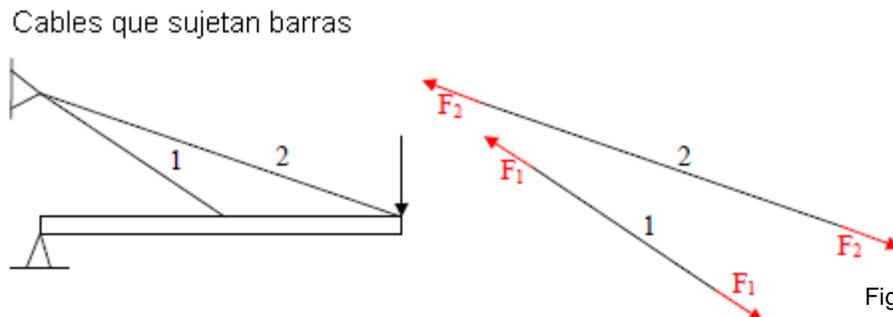


Figura 10.

De la figura se desprende que en una cercha, existirán barras que se encuentren tanto en tracción como en compresión. En el caso de los cables, estos siempre se encontrarán traccionados.

## 2. Esfuerzos

Consideremos una barra prismática trabajando a Tracción-Compresión y cortemos por una sección recta transversal de la misma (A).

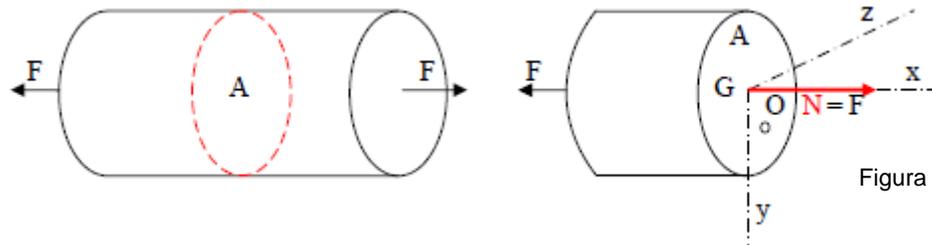


Figura 11.

Para ver como se distribuyen las fuerzas internas o tensiones en dicha sección, tomemos en un punto O (z, y) cualquiera de la sección A, un elemento diferencial de área: dA. Las tensiones se muestran en la figura siguiente, según lo visto en fuerzas internas y en la sección anterior:

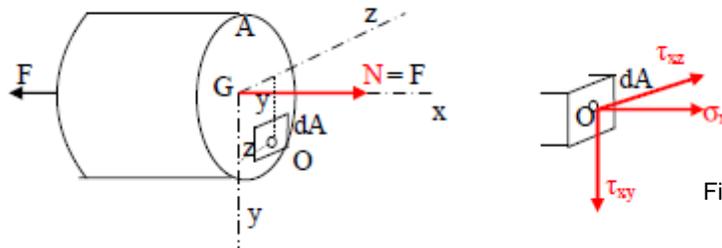


Figura 12.

$$\begin{aligned}
 N &= \int \sigma_x dA = F & V_y &= \int \tau_{xy} dA = 0 & V_z &= \int \tau_{xz} dA = 0 \\
 T &= \int (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dA = 0 & M_y &= \int \sigma_x z dA = 0 & M_z &= \int \sigma_x y dA = 0
 \end{aligned}$$

Se ha tenido en cuenta que al trabajar la sección solo a tracción y compresión;  $V_x = V_z = T = M_y = M_z = 0$ .

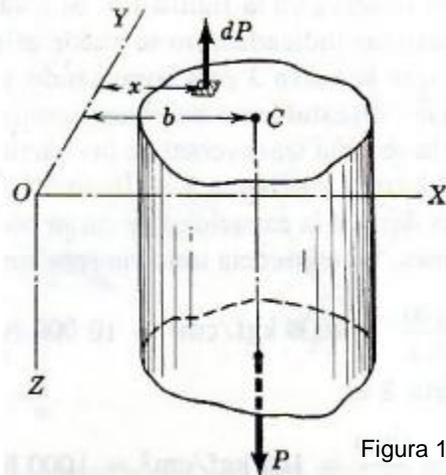
De las ecuaciones anteriores, se obtiene que:

$$\sigma_x = \frac{dF}{dA}$$

Como se aprecia en la fórmula anterior, el esfuerzo  $\sigma_x$  se obtiene dividiendo una fuerza diferencial dF entre el elemento diferencial de área dA. Cuando la resultante de fuerzas es coincidente con el centroide de la sección considerada, el esfuerzo es constante o uniforme, este estado se denomina esfuerzo simple. Y el esfuerzo se expresa de la siguiente forma.

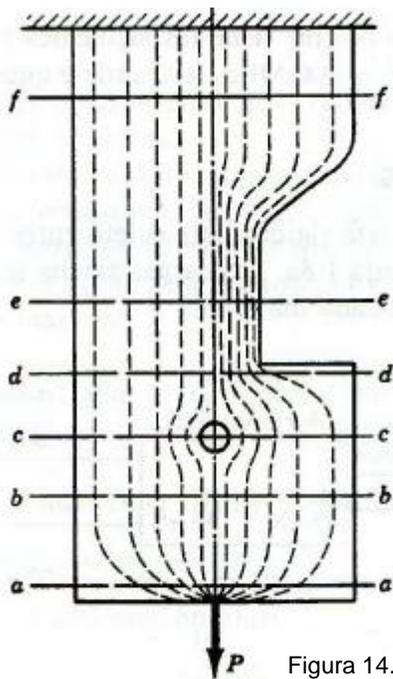
$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

En la siguiente figura se presenta la situación descrita anteriormente, en donde existe un esfuerzo uniforme, si y solo si, P actúa sobre el centroide C de la sección.



Ejemplo:

En la siguiente figura se presenta el perfil de una placa de espesor constante con una carga  $P$  aplicada axialmente.



En las secciones f-f y b-b, la distribución de esfuerzos es uniforme.

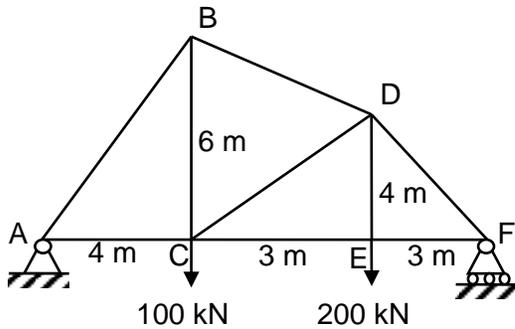
En la sección e-e la distribución de esfuerzos no es uniforme, ya que la línea de acción de la fuerza  $P$  no pasa por el centroide de la sección.

En las secciones c-c y d-d, el esfuerzo tampoco es uniforme, aunque la línea de acción de  $P$  pasa por el centroide, existen cambios bruscos en sus inmediaciones, lo que genera centros en donde se acumulan los esfuerzos.

En la sección a-a, el esfuerzo tampoco es uniforme debido a que se encuentra muy próximo al punto de aplicación de la fuerza.

### 3. Problemas Ilustrativos

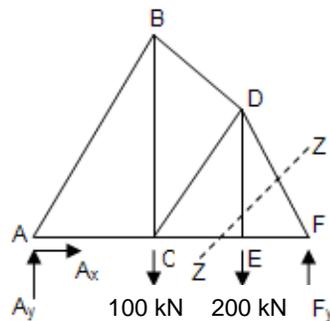
#### 3.1. Problema N°1



Calcule para la armadura de la figura, los esfuerzos producidos en los elementos DF, CE y BD. El área transversal de cada elemento es  $1200 \text{ mm}^2$ . Indique si los elementos están sometidos a tracción o compresión.

#### Solución:

En primer lugar se realizará un diagrama de cuerpo libre de la estructura, el cual se presenta en la siguiente figura.



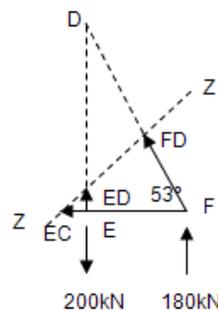
Realizando sumatorias de fuerzas y momento en toda la estructura, se tiene:

$$\sum F_V = 0 \rightarrow A_y + F_y = 300 \text{ kN} \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_y(10 \text{ m}) - (200 \text{ kN})(7 \text{ m}) - (100 \text{ kN})(4 \text{ m}) = 0 \rightarrow F_y = 180 \text{ kN} \quad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene que  $A_y = 120 \text{ kN}$

Realizando un DCL del corte z-z, se obtiene:



Para determinar el esfuerzo  $FD$ , se realizará sumatorias de momento en E igual a cero, en el DCL se asumió que  $FD$  se encuentra en tracción, por lo que si se obtiene una fuerza negativa, significa que el supuesto estaba errado y que  $FD$  se encuentra comprimido.

$$\sum M_E = 0 \rightarrow FD \left(\frac{4}{5}\right) (3 m) + (180 N)(3 m) = 0 \rightarrow FD = -225 kN$$

$$\sigma_{FD} = -\frac{225 \cdot 10^3 N}{1200 \cdot 10^{-6} m^2} = -187.5 MPa \text{ (En compresión)}$$

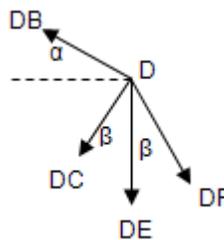
$$\sum F_V = 0 \rightarrow FD \left(\frac{4}{5}\right) + ED + (180 kN) - (200 kN) = 0 \rightarrow ED = 200 kN$$

Como la fuerza sobre el elemento ED dio positiva, significa que se asumió bien en el DCL, y por lo tanto se encuentra el elemento traccionado.

$$\sum F_H = 0 \rightarrow -EC - FD \left(\frac{3}{5}\right) = 0 \rightarrow EC = 135 kN$$

$$\sigma_{EC} = \frac{135 \cdot 10^3 N}{1200 \cdot 10^{-6} m^2} = 112.5 MPa \text{ (En tracción)}$$

A continuación se determinará el esfuerzo en el elemento BD, para ello se construirá un DCL del nudo D, el cual se presenta a continuación.



De la Figura del problema, se tienen las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos \beta = \frac{4}{5} \quad \sin \beta = \frac{3}{5}$$

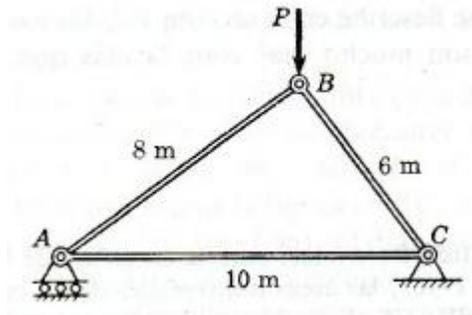
$$\sum F_H = 0 \rightarrow -DB \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) - DC \left(\frac{3}{5}\right) + DF \left(\frac{3}{5}\right) = 0 \rightarrow DB \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + DC \left(\frac{3}{5}\right) = 135 kN \quad (3)$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow DB \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = DE + DF \left(\frac{4}{5}\right) + DC \left(\frac{4}{5}\right) \rightarrow DB \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) - DC \left(\frac{4}{5}\right) = 380 kN \quad (4)$$

Resolviendo simultáneamente (3) y (4), se obtiene  $DB=336.6kN$  y  $DC= -241.7 kN$

$$\sigma_{BD} = \frac{336.518 \cdot 10^3 N}{1200 \cdot 10^{-6} m^2} = 280.4 MPa$$

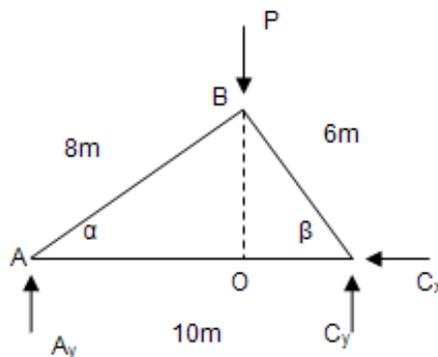
3.2. Problema N°2



Todas las barras de la estructura articulada de la figura, tienen una sección de 30 mm por 60 mm. Determine la máxima carga P que puede aplicarse, de modo que los esfuerzos no excedan de 100 MPa en tensión, ni 80 MPa en compresión.

Solución:

En primer lugar se construirá el DCL de la estructura, el cual se presenta en la siguiente figura.



Para determinar los segmentos AO, CO y BO, se recurre a relaciones trigonométricas, los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  se determinan a partir de la ley del coseno.

$$6^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = 0.8 \rightarrow \alpha = 36.87^\circ$$

$$8^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cos \beta \rightarrow \cos \beta = 0.6 \rightarrow \beta = 53.13^\circ$$

$$CO = CB \cos \beta = 3.6m$$

$$AO = AB \cos \alpha = 6.4m$$

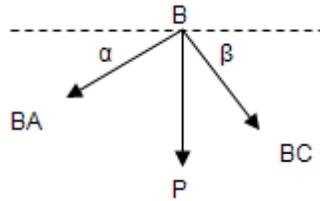
$$BO = CB \sin \beta = AB \sin \alpha = 4.8m$$

Haciendo sumatorias de fuerzas y momentos en toda la estructura, se obtiene:

$$\sum M_C = 0 \rightarrow A_y(10 m) = p(3.6 m) \rightarrow A_y = 0.36 P$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + C_y = P \rightarrow C_y = 0.64 P$$

Construyendo un DCL en el nudo B, se obtiene el siguiente esquema.



$$\sum F_H = 0 \rightarrow BC \left( \frac{6.4}{8} \right) - BA \left( \frac{3.6}{6} \right) = 0 \quad (1)$$

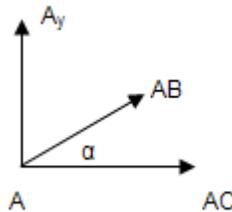
$$\sum F_V = 0 \rightarrow -BC \left( \frac{4.8}{6} \right) - BA \left( \frac{4.8}{8} \right) = P \quad (2)$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) simultáneamente, se obtiene las fuerzas en las barras BC y BA:

$$BC = -\frac{4}{5}P \quad (\text{En compresión})$$

$$BA = -\frac{3}{5}P \quad (\text{En compresión})$$

A continuación, se construirá un diagrama de cuerpo libre en el nudo A, el cual se presenta en la siguiente figura:



$$\sum F_H = 0 \rightarrow AB \left( \frac{6.4}{8} \right) + AC = 0 \rightarrow AC = -\left( -\frac{3}{5}P \right) \left( \frac{6.4}{8} \right) \rightarrow AC = \frac{12}{25}P \quad (\text{En tracción})$$

$$A = 30 \text{ mm} \cdot 60 \text{ mm} = 0.0018 \text{ m}^2$$

Para determinar la fuerza máxima, se determina el producto de la tensión admisible de la barra por la sección, para cada una.

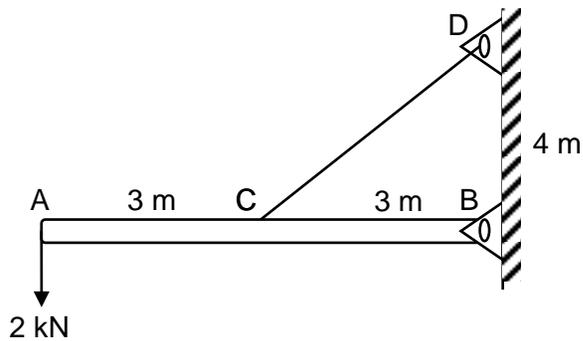
$$\text{Barra BC: } \frac{4}{5}P = (80000 \text{ kPA})(0.0018 \text{ m}^2) \rightarrow P_{\text{máx}} = 180 \text{ kN}$$

$$\text{Barra BA: } \frac{3}{5}P = (80000 \text{ kPA})(0.0018 \text{ m}^2) \rightarrow P_{\text{máx}} = 240 \text{ kN}$$

$$\text{Barra AC: } \frac{12}{25}P = (100000 \text{ kPA})(0.0018 \text{ m}^2) \rightarrow P_{\text{máx}} = 375 \text{ kN}$$

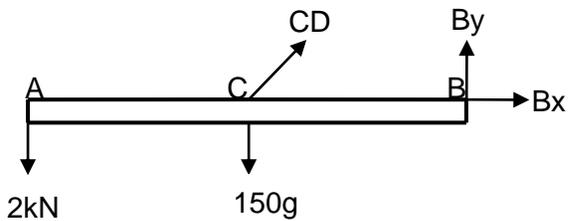
Luego, la máxima carga que soporta la estructura, corresponde a la mínima de las cargas soportadas por las barras, ya que si la carga supera una de las cargas máximas, la barra se romperá. En conclusión la carga máxima que soporta la estructura es de 180 kN.

3.3. Problema N°3



Una barra homogénea AB de 150 kg, soporta una fuerza de 2 kN, como puede verse en la figura. La barra está sostenida por un perno en B y un cable en C de 10 mm de diámetro. Determine el esfuerzo ejercido en el cable.

DCL barra AB



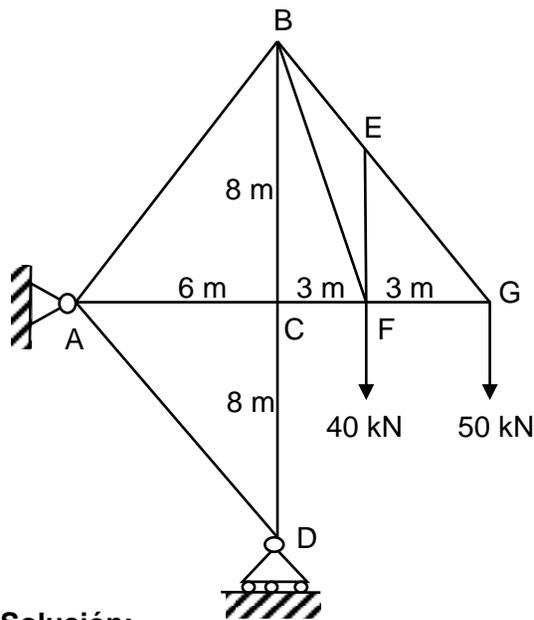
Calculando momento con respecto a B se tiene:

$$CD \left( \frac{4}{5} \right) (3) = 2000(6) + (150 * 9.81)3$$

$$\rightarrow CD = 6.838kN(\text{tracción})$$

$$A = \frac{\pi}{4} (0.01m)^2 = 78.54 * 10^{-6}m^2 \rightarrow \sigma = 87.064 \text{ Mpa}$$

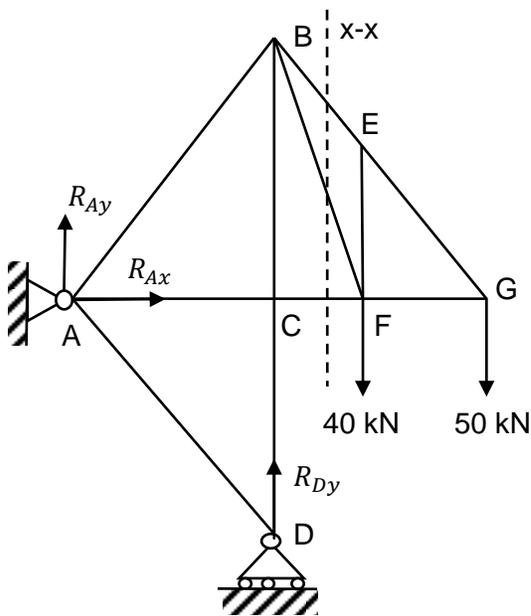
3.4. Problema N°4



Determine para la armadura de la figura, las áreas transversales de las barras BE, BF y CF, de modo que los esfuerzos no excedan de 100 MPa en tensión, ni de 80 MPa en compresión. Para evitar el peligro de un pandeo, se especifica una tensión reducida de compresión.

Solución:

Diagrama de cuerpo libre:



Ecuaciones de equilibrio:

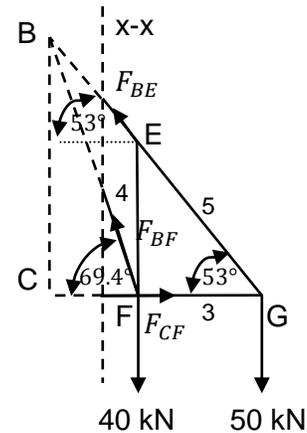
$$\sum M_A = 0 \rightarrow -6 m \cdot R_{Dy} + 9 m \cdot 40 kN + 12 m \cdot 50 kN = 0$$

$$\rightarrow R_{Dy} = 160 kN \quad \sum F_x = 0 \rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_{Ay} + 160 kN - 40 kN - 50 kN = 0$$

$$\rightarrow R_{Ay} = -70 kN$$

Diagrama de cuerpo libre, corte x-x:



Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum M_F = 0 \rightarrow F_{BE} \cdot \cos 53^\circ \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} - 50 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} = 0 \rightarrow F_{BE} = 62.312 \text{ kN fuerza de tracción}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{CF} \text{ kN} - F_{BF} \cdot \cos 69.4^\circ \text{ kN} - 62.312 \cdot \cos 53^\circ \text{ kN} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -40 \text{ kN} - 50 \text{ kN} + F_{BF} \sin 69.4^\circ \text{ kN} + 62.312 \cdot \sin 53^\circ \text{ kN}$$

$$\rightarrow F_{BF} = 42.984 \text{ kN fuerza de tracción}$$

$$\rightarrow F_{CF} = 52.624 \text{ kN fuerza de compresión}$$

Áreas transversales de las barras BE, BF y CF:

$$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow A = \frac{F}{\sigma}$$

- Área barra BE, sometida en esfuerzo de tracción:

$$A_{BE} = \frac{F_{BE}}{\sigma_{\text{máx}}} \rightarrow A_{BE} = \frac{62.312 \text{ kN}}{100} \rightarrow A_{BE} = 623.1 \text{ mm}^2$$

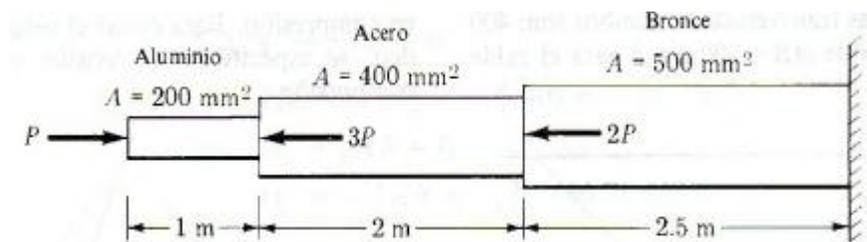
- Área barra BF, sometida en esfuerzo de tracción:

$$\text{barra BF: } A_{BF} = \frac{F_{BF}}{\sigma_{\text{máx}}} \rightarrow A_{BF} = \frac{42.984 \text{ kN}}{100} \rightarrow A_{BF} = 429.8 \text{ mm}^2$$

- Área barra CF, sometida en esfuerzo de compresión:

$$\text{barra CF: } A_{CF} = \frac{F_{CF}}{\sigma_{\text{m}\acute{a}\text{x}}} \rightarrow A_{CF} = \frac{52.624 \text{ kN}}{80} \rightarrow A_{CF} = 657.8 \text{ mm}^2$$

### 3.5. Problema N°5

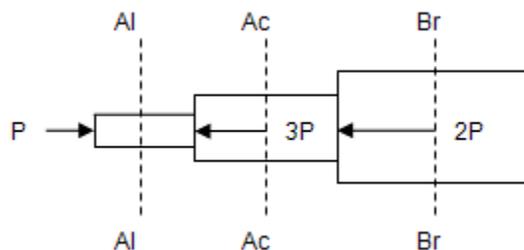


Un tubo de acero se encuentra rígidamente sujeto por un perno de aluminio y por otro de bronce, tal como se muestra en la figura. Las cargas axiales se aplican en los puntos indicados. Calcule el máximo valor de P de modo que no se exceda un esfuerzo de 80MPa en el aluminio; de 150 MPa en el acero; o de 100 MPa en el bronce.

en el aluminio; de 150 MPa en el acero; o de 100 MPa en el bronce.

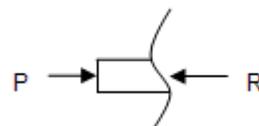
#### Solución:

Realizando un DCL de la estructura, se obtiene la siguiente figura:



Realizando un corte en Al.

$$R = -P \text{ (En compresión)}$$

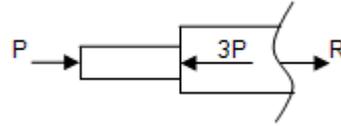


$$\sigma_{Al} = 80 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{P_{Al}}{200 \cdot 10^{-6} m^2} \rightarrow P_{Al} = 16 kN$$

Realizando corte en Ac.

$$R = -P + 3P \text{ (En tracción)}$$

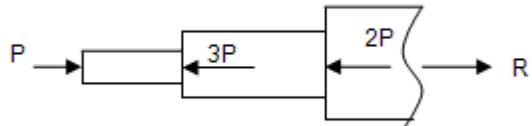
$$\sigma_{Ac} = 150 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{2P_{Ac}}{400 \cdot 10^{-6} m^2} \rightarrow P_{Ac} = 30 kN$$



Realizando corte en Br.

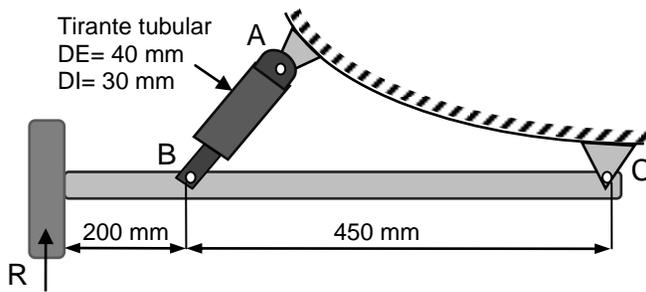
$$R = -P + 3P + 2P = 4P$$

$$\sigma_{Br} = 100 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{4P_{Br}}{500 \cdot 10^{-6} m^2} \rightarrow P_{Br} = 12.5 kN$$



Por lo que se concluye que el máximo valor de P corresponde a 12.5 kN, que es la carga máxima que se puede aplicar sin que el Bronce exceda su esfuerzo admisible.

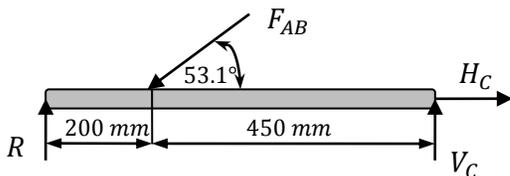
3.3. Problema N°6



En la figura se muestra parte del del tren de aterrizaje de una avioneta. Determine el esfuerzo de compresión en la tornapunta AB producido al aterrizar por una reacción del terreno  $R = 20 \text{ kN}$ . AB forma un ángulo de  $53.1^\circ$  con BC.

Solución:

Diagrama de cuerpo libre:



Ecuación de equilibrio para el momento en el punto C:

$$\sum M_C = 0$$

$$\rightarrow (20 \cdot 10^3 \cdot (0.2 + 0.45) - F_{AB} \sin 53.1^\circ \cdot 0.45) \text{ N} \cdot \text{m} = 0$$

$$\rightarrow F_{AB} = 36.125 \text{ kN}$$

El área del tirante tubular:  $A = \frac{\pi}{4} (D_E^2 - D_I^2) = \frac{\pi}{4} (40^2 - 30^2) \text{ mm}^2 = 549.779 \text{ mm}^2$

Finalmente el esfuerzo de compresión en la tornapunta AB es:

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A} = \frac{36.125 \text{ kN}}{549.779 \text{ mm}^2} \rightarrow \sigma_{AB} = 65.7 \text{ MPa}$$

## ESFUERZO CORTANTE

### 1. Introducción

El esfuerzo cortante o de cizallamiento, se produce debido a fuerzas que actúan paralelamente al plano que las resiste. Debido a esta situación este esfuerzo suele conocerse con el nombre de esfuerzo tangencial.

En la figura 2 las fuerzas  $P_{xy}$  y  $P_{xz}$  producen esfuerzos tangenciales o cortantes en la sección sobre la que actúan.

Los esfuerzos cortantes aparecen siempre que las fuerzas aplicadas induzcan a que una sección del sólido tienda a deslizarse sobre la sección adyacente. A continuación se muestra la figura 15 con ejemplos en donde se producen esfuerzos cortantes.

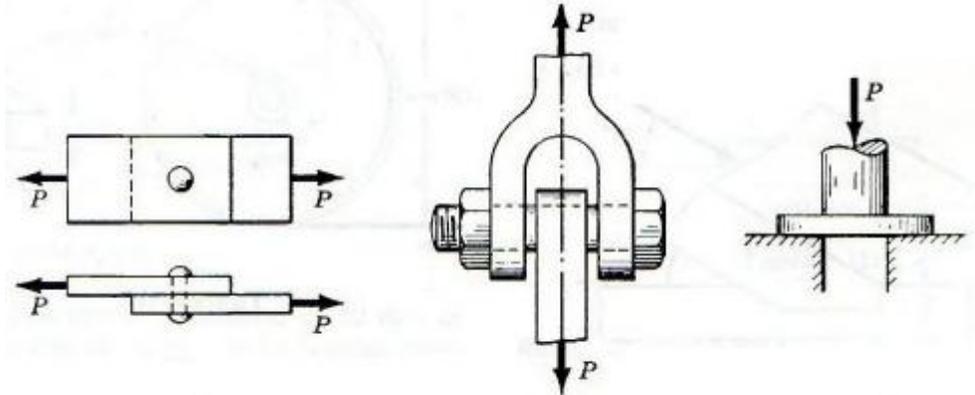


Figura 15.a.

Figura 15.b.

Figura 15.c.

En el caso (a), el remache resiste el corte a través de su sección central.

En el caso (b), el pasador resiste el corte a través de dos secciones.

En el caso (c), se ha de punzonar una placa, la sección de corte corresponde a la sección del punzón.

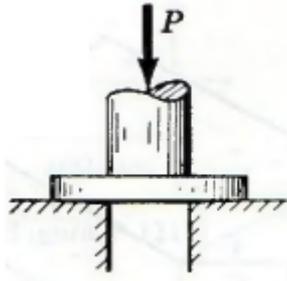
Si la fuerza de corte resultante pasa por el centroide de la sección sometida a cortante, se produce esfuerzo cortante uniforme, y el esfuerzo viene dado por:

$$\tau = \frac{V}{A}$$

En realidad la distribución del esfuerzo cortante en una sección no es uniforme prácticamente en ningún caso, y por ello la expresión anterior debe interpretarse como el esfuerzo cortante medio. Esta situación no restringe su empleo en modo alguno, siempre que el valor del esfuerzo cortante admisible para un material dado tenga en cuenta este hecho, de que la distribución real no es uniforme.

## 2. Problemas Ilustrativos

### 2.1. Problema N°1



Se requiere punzonar una placa, tal como se muestra en la figura, esta placa tiene un esfuerzo cortante último de 300 MPa.

A) Si el esfuerzo de compresión admisible en el punzón es 400 MPa, determinar el máximo espesor de la placa para poder punzonar un orificio de 100 mm de diámetro.

B) Si la placa tiene un espesor de 10 mm, calcular el máximo diámetro que puede punzarse.

#### Solución:

A) Del problema, se tienen los siguientes datos:

$$\begin{aligned}\tau &= 300 \text{ MPa} \quad (\text{Placa}) \\ \sigma_c &= 400 \text{ MPa} \quad (\text{Punzón}) \\ D &= 100 \text{ mm}\end{aligned}$$

En primer lugar se determina el área del orificio de la sección a punzonar.

$$A = \frac{\pi(100 \text{ mm})^2}{4} = 7053.98 \text{ mm}^2$$

A continuación se determina la fuerza aplicada por el punzón, esto se hace considerando el esfuerzo admisible de compresión.

$$\frac{P}{A} = \sigma_c \rightarrow P = A\sigma_c = 7053.98 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 400 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \rightarrow P = 3141.59 \text{ kN}$$

Para determinar el espesor máximo de la placa, se debe considerar que el área sometida a corte corresponde al perímetro del orificio que se desea punzonar, multiplicado por el espesor de la placa. La fuerza aplicada por el punzón se calculó anteriormente.

$$\tau = \frac{P}{\pi D e} \rightarrow e = \frac{P}{\tau \pi D} = \frac{3141.59 \cdot 10^3 \text{ N}}{300 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot \pi \cdot 100 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \rightarrow e = 0.033 \text{ m} = 33 \text{ mm}$$

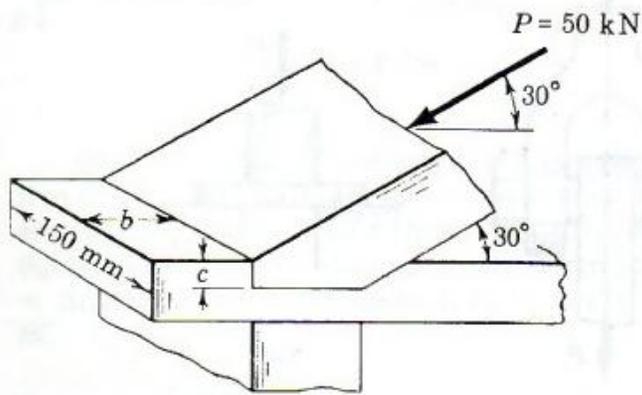
B) Para determinar el diámetro máximo del orificio que se puede punzonar, se realiza un procedimiento similar al anterior, pero en este caso la fuerza P se determina a partir del esfuerzo cortante permisible en la placa.

$$P = \tau \pi D e = 300 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \pi \cdot D \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 9.42478 \cdot 10^6 D \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Para calcular el diámetro D, la fuerza P determinada anteriormente se reemplaza en el esfuerzo de compresión máximo permisible en el punzón.

$$P = \sigma_c A \rightarrow 9.42478 \cdot 10^6 D \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\pi D^2}{4} 400 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \rightarrow D = \frac{4 \cdot 9.42478 \cdot 10^6}{\pi \cdot 400 \cdot 10^6} \text{ m} = 0.03 \text{ m} = 30 \text{ mm}$$

2.2. Problema N°2

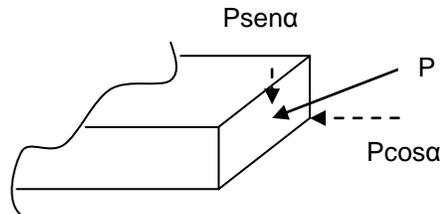


La figura muestra la unión de un tirante y la base de una armadura de madera. Despreciando el rozamiento se pide:

- A) Determinar la dimensión b si el esfuerzo cortante admisible es de 900 kPa.
- B) Calcule también la dimensión c si el esfuerzo de contacto no debe exceder de 7 MPa.

**Solución:**

A) En primer lugar se construirá un DCL de la situación física.



El área de corte corresponde a la dimensión b multiplicada por 0.15 m, la fuerza cortante que actúa sobre esa sección corresponde a la proyección de P sobre la horizontal. Por lo que se tienen las siguientes relaciones:

$$\tau = 900 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2} \quad y \quad \tau = \frac{P \cos \alpha \, N}{(0.15 \, m)b}$$

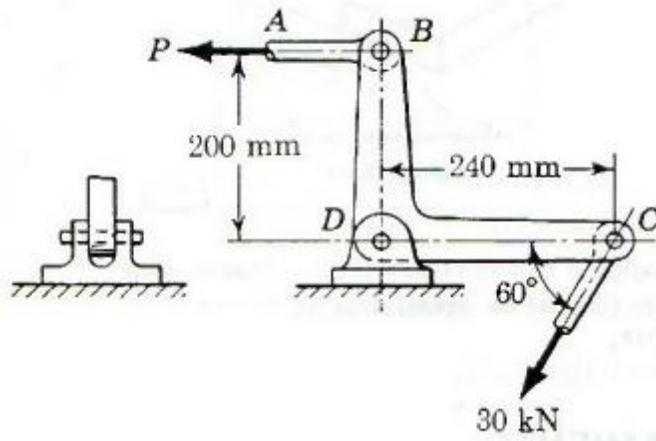
Igualando las expresiones anteriores se obtiene el valor de la dimensión b.

$$\frac{(50 \cdot 10^3 \, N) \cos 30}{(0.15 \, m)b} = 900 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2} \rightarrow b = \frac{50 \cdot 10^3 \cos 30}{0.15 \cdot 900 \cdot 10^3} \, m = 0.321 \, m = 321 \, mm$$

B) El área de contacto corresponde a la dimensión c multiplicada por 0.15 m, realizando un procedimiento similar anterior se llega a la siguiente relación:

$$c = \frac{50 \cdot 10^3 \cos 30}{0.15 \cdot 7 \cdot 10^6} \, m \rightarrow c = 0.0412 \, m = 41.2 \, mm$$

2.3. Problema N°3



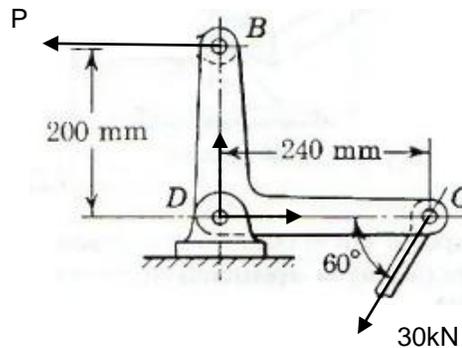
La palanca acodada que se presenta en la figura se encuentra en equilibrio.

A) Determinar el diámetro de la barra AB si el esfuerzo normal está limitado a 100 MPa.

B) Determinar el esfuerzo cortante en el pasador situado en D, considerando que el pasador tiene 20 mm de diámetro.

**Solución:**

A) Construyendo un diagrama de cuerpo libre de la palanca, se tiene:



Empleando las ecuaciones de equilibrio, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\sum M_D = 0 \rightarrow (0.2 \text{ m})P = (30 \sin 60 \text{ kN})(0.24 \text{ m}) \rightarrow P = 31.177 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow D_y = 30 \sin 60 \text{ kN} = 25.981 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow D_x = P + 30 \cos 60 \text{ kN} = 46.177 \text{ kN}$$

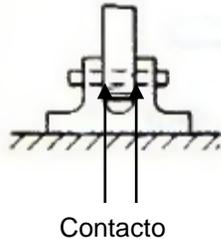
La resultante sobre el pasador se obtiene de la siguiente forma:

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = 52.984 \text{ kN}$$

El esfuerzo normal sobre la barra AB se calcula mediante la siguiente relación:

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{\frac{\pi D_{AB}^2}{4}} \rightarrow D_{AB} = \sqrt{\frac{4P}{\pi \sigma_{AB}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 31.177 \cdot 10^3 N}{\pi \cdot 100 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}}} \rightarrow D_{AB} = 0.02 m = 20 mm$$

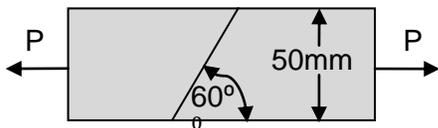
B) De la figura del problema, se desprende que el pasador tiene contacto con la palanca en dos planos, por lo que el área de contacto será el área diametral del pasador multiplicada por dos.



Luego el esfuerzo cortante en el pasador se calcula de la siguiente manera:

$$\tau_D = \frac{D}{2 \frac{\pi d_p^2}{4}} \rightarrow \tau_D = \frac{52.984 \cdot 10^3 N}{\frac{\pi (0.02m)^2}{2}} = 84.327 MPa$$

#### 2.4. Problema N°4



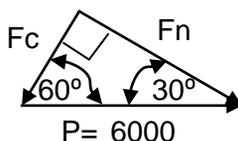
Dos piezas de madera, de 50 mm de ancho y 20 mm de espesor, están pegadas como indica la figura. Se pide:

A) La fuerza cortante y el esfuerzo cortante en la unión si  $P = 6000 N$ .

B) Generalice el procedimiento para demostrar que el esfuerzo cortante en una sección transversal de área  $A$ , tiene dado por  $\tau = (P/2A)(\sin 2\theta)$ .

#### Solución:

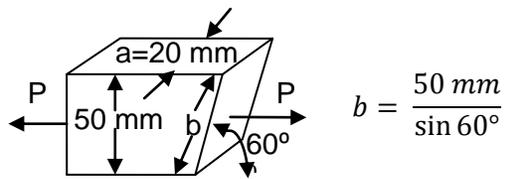
A) Si observamos la sección pedida a  $60^\circ$  tenemos:



$F_c$ : corresponde a la fuerza cortante, pues es componente de la fuerza  $P$  que es paralela al plano que se desea analizar.

$F_n$ : corresponde a la fuerza normal, la cual que produce los esfuerzos de tracción o compresión.

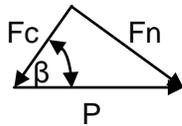
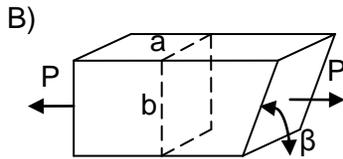
Así la fuerza cortante es:  $F_c = (6000 N)(\sin 30^\circ) = 3000 N$



$$b = \frac{50 \text{ mm}}{\sin 60^\circ}$$

Y el esfuerzo cortante corresponde a la fuerza de corte dividida en la siguiente área: 20 mm (el ancho de la madera) por b (medida en el dibujo).

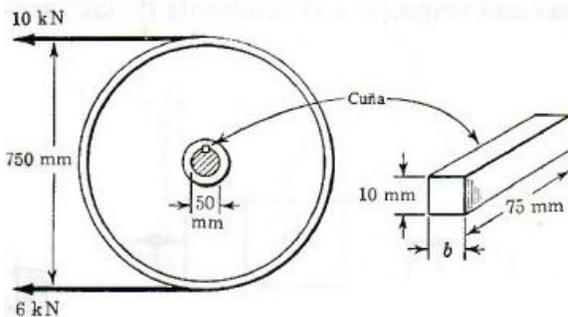
$$\tau = \frac{F_c}{a \cdot b} = \frac{3000 \text{ N}}{(20 \text{ mm}) \left( \frac{50 \text{ mm}}{\sin 60^\circ} \right)} = 2,589 \text{ MPa}$$



Si analizamos el siguiente esquema observamos que el área A de la sección transversal es  $A = a \cdot b$  y que la fuerza cortante es  $F_c = P \cdot \cos \beta$ . Así el esfuerzo cortante es la fuerza de corte dividido el área correspondiente.

$$\tau = \frac{P \cdot \cos \beta}{a \cdot \frac{b}{\sin \beta}} = \frac{P \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta}{A} = \frac{P \cdot \sin 2\beta}{2A}$$

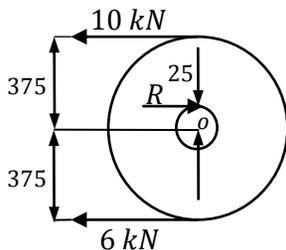
### 2.5. Problema N°5



Una polea de 750 mm sometida a la acción de las fuerzas que se indica en la figura, está montada mediante una cuña en un eje de 50, de diámetro. Calcule el ancho b de la cuña si tiene 75 mm de longitud y el esfuerzo cortante admisible es de 70 MPa.

#### Solución:

Diagrama de cuerpo libre:



En el dibujo tenemos las fuerzas que se aplican sobre la polea, donde R es la fuerza sobre la cuña, la cual desconocemos.

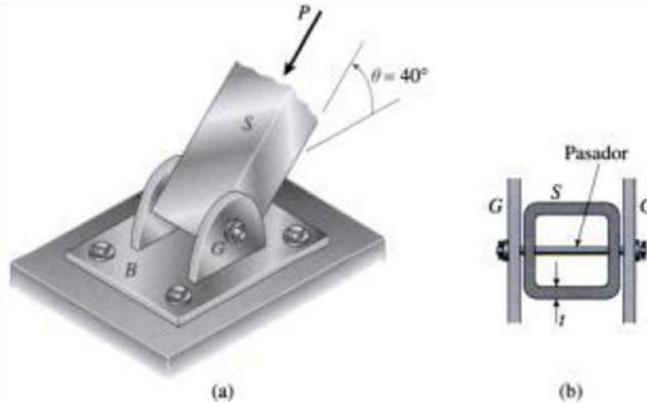
Sumatoria de torque en el punto o

$$\sum M_o = 0 \rightarrow (6 \text{ kN} - 10 \text{ kN}) \cdot 0.375 \text{ m} + R \cdot 0.025 \text{ m} = 0 \rightarrow R = 60 \text{ kN}$$

Así calculamos el ancho b

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{R}{b \cdot 75 \text{ mm}} \rightarrow b = \frac{R}{\tau_{\text{máx}} \cdot 75 \text{ mm}} = \frac{60 \text{ kN}}{70 \text{ MPa} \cdot 75 \text{ mm}} \rightarrow b = 11.4 \text{ mm}$$

2.6. Problema N°6



Una tornapunta de acero S sirve como puntal en un montacargas para botes; transmite una fuerza de compresión  $P= 55 \text{ kN}$  a la cubierta de un muelle (figura a). El puntal tiene una sección transversal cuadrada hueca, con espesor  $t= 9,5 \text{ mm}$  (figura b), y el ángulo  $\theta$  entre el poste y la horizontal es  $40^\circ$ .

Un pasador que atraviesa el poste transmite la fuerza de compresión del poste a dos soportes G, soldados a la placa de base B. La placa de base está sujeta a la cubierta con cuatro anclas.

El diámetro del pasador es  $d= 19 \text{ mm}$  y el diámetro de las anclas es  $d= 13 \text{ mm}$ . Determinar:

A) El esfuerzo cortante en el pasador.

B) El esfuerzo cortante en las anclas.

**Solución:**

A) Como se aprecia en la figura (b), el pasador se corta en dos planos. Por consiguiente el esfuerzo cortante promedio en el pasador (que está a cortante doble) es igual a la carga total aplicada al pasador dividido entre dos veces su área transversal;

$$\tau = \frac{P}{2\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{55000 \text{ N}}{2\pi \frac{(19 \text{ mm})^2}{4}} = 96.992 \text{ MPa}$$

B) El esfuerzo cortante promedio en las anclas es igual al componente horizontal de la fuerza P dividido entre el área transversal total de los cuatro tornillos de anclaje (observe que cada tornillo está sometido a cortante sencillo);

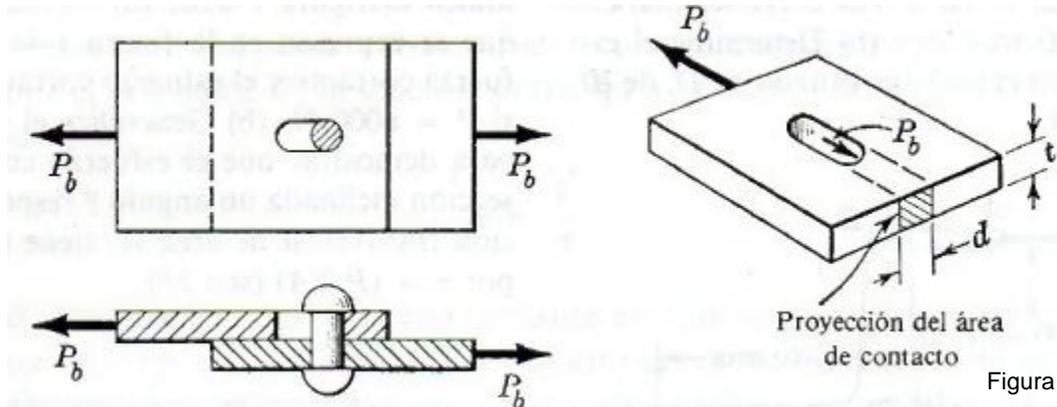
$$\tau = \frac{P \cos 40^\circ}{4\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{(55000 \text{ N})(\cos 40^\circ)}{4\pi \frac{(13 \text{ mm})^2}{4}} = 79.356 \text{ MPa}$$

## ESFUERZO DE CONTACTO O APLASTAMIENTO

### 1. Introducción

Este esfuerzo se produce en la superficie de contacto de dos cuerpos. Algunos ejemplos en donde aparece el esfuerzo de contacto, corresponden al contacto entre un eje y su cojinete, o entre un remache o un perno y las paredes de las placas que sujeta.

En la siguiente figura se aprecia, que por un excesivo esfuerzo de contacto se puede llegar a la fluencia en el material de la placa, del remache o de ambos.

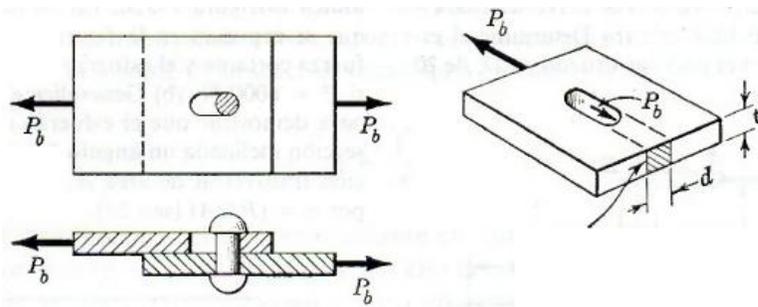


La presión del remache contra las paredes del orificio no es constante, varía desde 0 en los puntos en que no hay contacto, llegando a un valor máximo en el centro de la parte apoyada. Para salvar las dificultades inherentes a tener un esfuerzo de contacto distribuido en forma no uniforme, se hace la suposición de que el esfuerzo de contacto se distribuye uniformemente sobre un área más pequeña, determinada por la proyección de la superficie de contacto sobre un plano diametral al orificio, perpendicular a la dirección de la fuerza. Con ello la carga total se expresa como:

$$P_b = A_b \sigma_b = (td) \sigma_b$$

## 2. Problemas Ilustrativos

### 2.1. Problema N°1



En la figura se supone que el remache tiene 20 mm de diámetro, y una placas de 100 mm de ancho.

A) Si los esfuerzos admisibles son de 140 MPa para el aplastamiento y 80 MPa para el esfuerzo cortante, determinar el mínimo espesor para cada placa.

B) Según las condiciones especificadas en

la parte A), ¿cuál será el máximo esfuerzo medio de tensión en las placas?

#### Solución:

A) Del esfuerzo de corte se sabe que:

$$P = A\tau \rightarrow P = \frac{\pi(0.02m)^2}{4} 80 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} \rightarrow P = 25132.7 N \quad (1)$$

A continuación se determina P a través del esfuerzo de aplastamiento.

$$P = A_b\sigma_b = dt\sigma_b \rightarrow P = (0.02 m) \left( 140 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} \right) d = 2.8 \cdot 10^6 d \frac{N}{m} \quad (2)$$

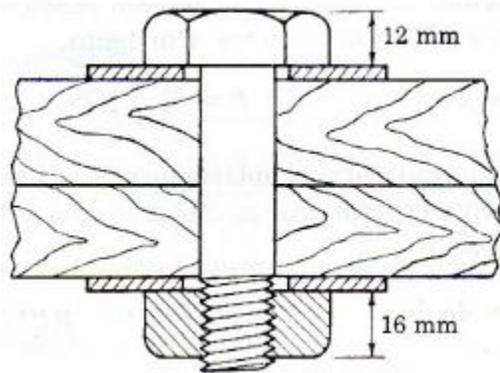
Al igualar (1) con (2), se obtiene el espesor de cada placa

$$2.8 \cdot 10^6 d \frac{N}{m} = 25132.7 N \rightarrow d = 8.98 \cdot 10^{-3} m = 8.98 mm$$

B) Del esfuerzo de tensión se tiene:

$$\sigma_N = \frac{P}{t(a-d)} = \frac{25132.7 N}{8.98 \cdot 10^{-3} m(0.1 m - 0.02 m)} = 35 MPa$$

2.2. Problema N°2



Un tornillo de 22.2 mm de diámetro exterior y 18.6 mm en la rosca, sujeta dos piezas de madera, como se muestra en la figura. Se aprieta la tuerca hasta tener una tensión de 34 kN en el tornillo.

A) Calcular el esfuerzo cortante en la cabeza del tornillo y en la rosca.

B) Determinar el diámetro exterior de las golillas si el interior es de 28 mm y el esfuerzo de aplastamiento admisible en la madera es de 6 MPa.

**Solución:**

A) Se sabe que:

$$\tau = \frac{P}{A} \text{ con } P = 34 \text{ kN} \text{ y } A = \pi Dt$$

Los esfuerzos cortantes en la cabeza y en la rosca del tornillo serán:

$$\tau_{cabeza} = \frac{34 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi(0.0222 \text{ m})(0.012 \text{ m})} = 40.625 \text{ MPa}$$

$$\tau_{rosca} = \frac{34 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi(0.0186 \text{ m})(0.016 \text{ m})} = 36.366 \text{ MPa}$$

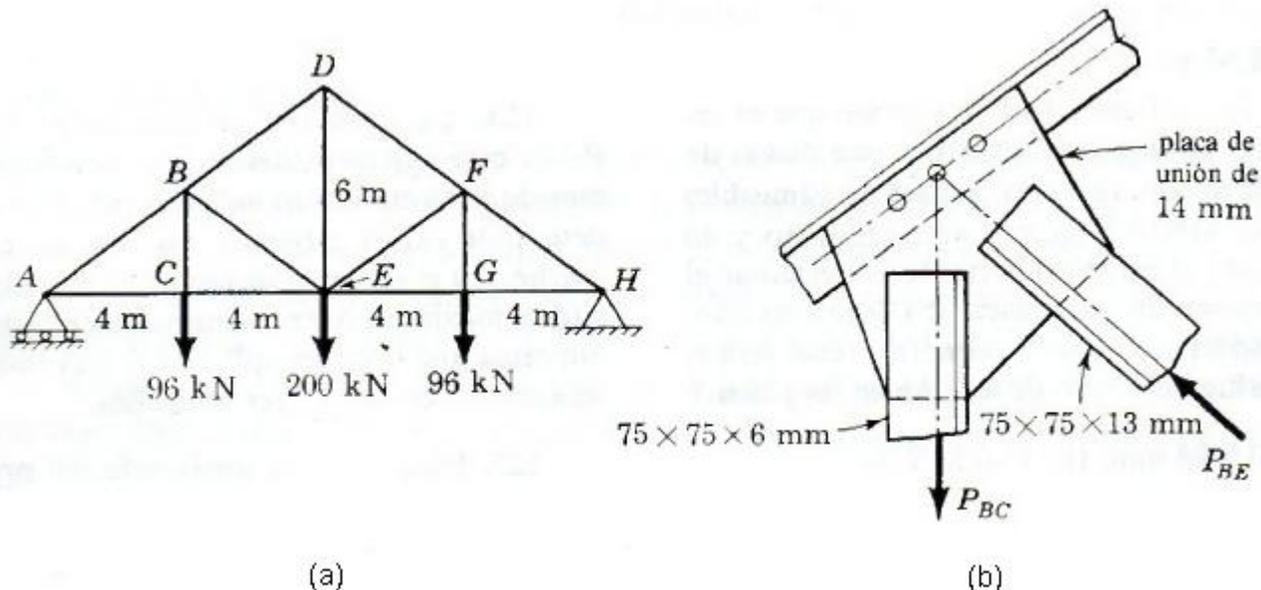
B) El esfuerzo admisible en la golilla se determina mediante la siguiente relación:

$$\sigma_a = \frac{P}{\frac{\pi}{4}(d_{ext}^2 - d_{int}^2)} \rightarrow d_{ext} = \sqrt{\frac{P}{\frac{\pi}{4}\sigma_a} + d_{int}^2}$$

Evaluando la expresión anterior, se obtiene el valor del diámetro exterior de la golilla.

$$d_{ext} = \sqrt{\frac{4 \cdot 34 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi \cdot 6 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} + (0.028 \text{ m})^2} \rightarrow d_{ext} = 0.089 \text{ m} = 89 \text{ mm}$$

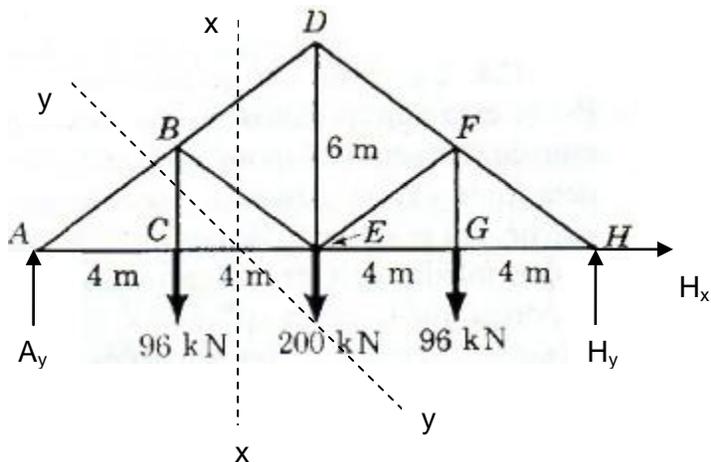
2.3. Problema N°3



En la figura (a), se muestra el esquema de una armadura y en el croquis (b) el detalle de la unión de las barras, mediante una placa, en el nudo B. ¿Cuántos remaches de 19mm de diámetro se necesitan para unir la barra BC a la placa, si los esfuerzos admisibles son  $\tau = 70 \text{ MPa}$  y  $\sigma_b = 140 \text{ MPa}$ ? ¿Cuántos para la barra BE?

**Solución:**

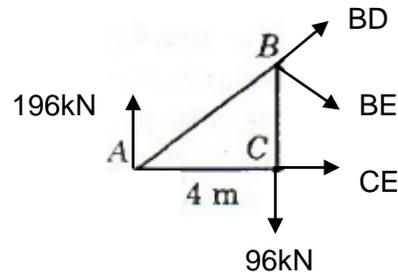
A continuación se construye el DCL de la armadura.



Realizando sumatoria de momentos en el punto H, se obtiene:

$$\sum M_H = 0 \rightarrow A_y(16 \text{ m}) = (96 \text{ kN})(12 \text{ m}) + (200 \text{ kN})(8 \text{ m}) + (96 \text{ kN})(4 \text{ m}) \rightarrow A_y = 196 \text{ kN}$$

Construyendo un DCL del corte x-x, se obtiene la siguiente figura:



$$\sum M_B = 0 \rightarrow CE(3 \text{ m}) = (196 \text{ kN})(4 \text{ m}) \rightarrow CE = 261.333 \text{ kN (Tracción)}$$

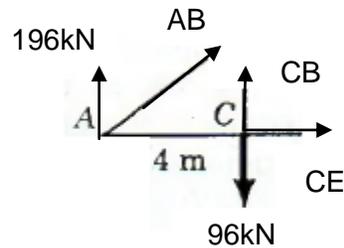
$$\sum F_H = 0 \rightarrow BD \frac{4}{5} + BE \frac{3}{5} + CE = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow BD \frac{3}{5} - BE \frac{4}{5} + 196 \text{ kN} - 96 \text{ kN} = 0 \quad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) simultáneamente, se obtienen BD y CE

$$BD = -269.066 \text{ kN (Compresión)} \quad \text{y} \quad BE = -76.8 \text{ kN (Compresión)}$$

A continuación se construirá un DCL del corte y-y.



$$\sum M_A = 0 \rightarrow CB(4 \text{ m}) = (96 \text{ kN})(4 \text{ m}) \rightarrow CB = 96 \text{ kN (Tracción)}$$

Al considerar más de un remache, el corte resultante se repartirá entre el número de remaches considerados. Para el esfuerzo admisible ocurre una situación similar.

$$\tau = \frac{P}{n \left( \frac{\pi d^2}{4} \right)} \quad \sigma_b = \frac{P}{n(td)}$$

Como existen dos valores de esfuerzos que no se pueden superar por condiciones de diseño, se calcula el número de remaches para ambos esfuerzos, y los remaches a emplear será el número más grande, ya que de esta forma se asegura de satisfacer ambas restricciones.

Para la barra BC:

$$n_{\tau} = \frac{96 \cdot 10^3 N}{\frac{\pi(0.019 m)^2}{4} 70 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}} \rightarrow n_{\tau} = 4.837$$

$$n_{\sigma_b} = \frac{96 \cdot 10^3 N}{(0.006 m)(0.019 m) \left(140 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}\right)} \rightarrow n_{\sigma_b} = 6.015$$

Es importante notar que no se pueden tener fracciones de remaches, por lo que se debe elegir el número entero superior, para este caso con 7 remaches se satisfacen ambas restricciones, por lo que se utilizan 7 remaches.

Para la barra BE:

$$n_{\tau} = \frac{76.8 \cdot 10^3 N}{\frac{\pi(0.019 m)^2}{4} 70 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}} \rightarrow n_{\tau} = 3.869$$

$$n_{\sigma_b} = \frac{76.8 \cdot 10^3 N}{(0.013 m)(0.019 m) \left(140 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}\right)} \rightarrow n_{\sigma_b} = 2.22$$

Luego para asegurar la sujeción de la barra BE se requieren 4 remaches.

## ESFUERZO EN CILINDROS DE PARED DELGADA

### 1. Introducción

Se considera que un depósito cilíndrico tiene pared delgada cuando se cumple la siguiente relación:

$$t < \frac{1}{20}R$$

En donde t corresponde al espesor y R al radio del depósito.

#### 1.1. Esfuerzo Tangencial

La situación física involucrada se presenta en la siguiente figura:

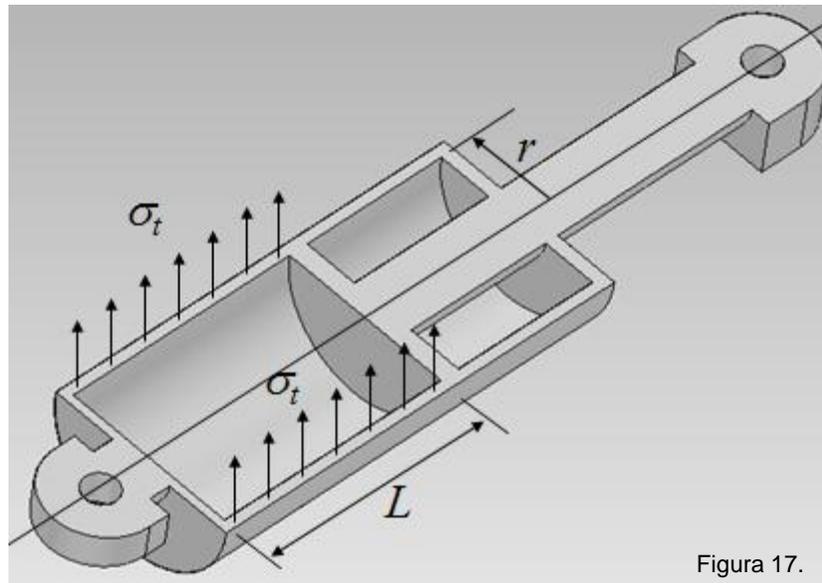


Figura 17.

De la figura se extrae la siguiente relación:

$$p = \frac{F}{A} \rightarrow F = p2rL$$

Realizando equilibrio de fuerzas, considerando que la presión en el interior del estanque debe ser contrarrestada por el esfuerzo tangencial presente en la pared del contenedor, se tiene:

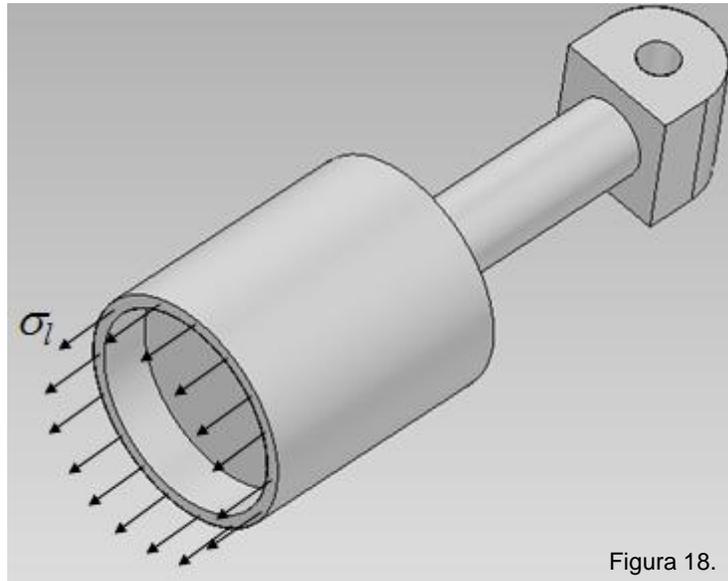
$$2\sigma_t Lt = p2rL \rightarrow \sigma_t = \frac{pr}{t}$$

Dejando la expresión anterior en términos del diámetro del estanque:

$$\sigma_t = \frac{pD}{2t}$$

## 1.2. Esfuerzo Longitudinal

La situación física involucrada se presenta en la siguiente figura:



De la figura se extrae la siguiente relación:

$$p = \frac{F}{A} \rightarrow F = p\pi r^2$$

Realizando equilibrios de fuerzas

$$\sigma_l 2\pi r t = p\pi r^2 \rightarrow \sigma_l = \frac{pr}{2t}$$

Dejando la expresión anterior en término del diámetro del estanque:

$$\sigma_l = \frac{pD}{4t}$$

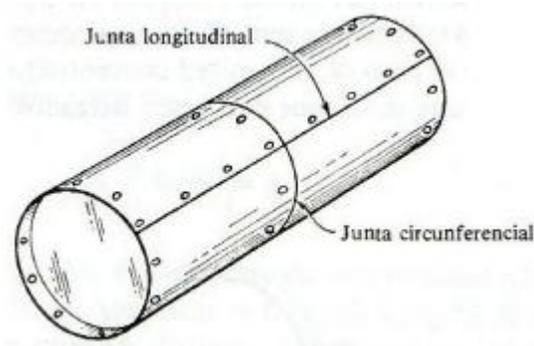
## 1.3. Esfuerzo Radial

La pared al considerarse delgada en comparación con el radio del estanque, en el sentido radial es despreciable el esfuerzo que ejerce, luego el esfuerzo radial tendrá la siguiente forma:

$$\sigma_r = -p$$

## 2. Problemas Ilustrativos

### 2.1. Problema N°1



En el depósito cilíndrico de la figura, la resistencia de las juntas longitudinales es de 480 kN, y de las transversales es de 200 kN. Si la presión interior ha de ser 1.5 MPa, determinar el máximo diámetro que se puede dar al depósito.

#### Solución:

La estrategia para determinar el máximo diámetro, consiste en determinar el diámetro para cada junta, y escoger el menor diámetro, ya que de esta forma se asegura que cada junta soportará la presión deseada.

Para la resistencia longitudinal se tiene:

$$P_l = \frac{\pi D_l^2}{4} p \rightarrow D_l = 2 \sqrt{\frac{P_l}{\pi p}} \rightarrow D_l = 2 \sqrt{\frac{480 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi 1.5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}} \rightarrow D_l = 0.638 \text{ m} = 638 \text{ mm}$$

Para la resistencia transversal se tiene:

$$P_t = (\pi D_t t) \sigma_t = (\pi D_t t) \frac{p D_t}{4t} \rightarrow P_t = \frac{\pi D_t^2}{4} p \rightarrow D_t = 2 \sqrt{\frac{P_t}{\pi p}} = 2 \sqrt{\frac{200 \cdot 10^3 \text{ N}}{\pi 1.5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}} = 0.412 \text{ m} = 412 \text{ mm}$$

Por lo tanto el máximo diámetro que se puede dar al depósito es de 412 mm.

## 2.2. Problema N°2

Una tubería que conduce vapor a 3.5 MPa tiene un diámetro exterior de 450 mm y un espesor de 10 mm. Se cierra uno de sus extremos mediante una placa atornillada al reborde de este extremo, con interposición de una junta o empaquetadura. ¿Cuántos tornillos de 40 mm de diámetro se necesitan para sujetar la tapa si el esfuerzo admisible es de 80 MPa y tiene un esfuerzo de apriete de 55 MPa? ¿Qué esfuerzo circunferencial se desarrolla en la tubería? ¿Por qué es necesario el apriete inicial de los tornillos de la tapa? ¿Qué sucedería si la presión del vapor hiciera duplicar el esfuerzo de apriete?

### Solución:

En primer lugar se determinará la fuerza que se ejerce sobre la junta.

$$F = \frac{\pi D^2}{4} p = \frac{\pi}{4} (0.45 \text{ m})^2 \left( 3.5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) \rightarrow F = 556.651 \text{ kN}$$

A continuación se determina el número de pernos utilizando el esfuerzo de apriete.

$$\sigma = \frac{F}{n_\sigma \left( \pi \frac{d^2}{4} \right)} \rightarrow n_\sigma = \frac{F}{\sigma \left( \pi \frac{d^2}{4} \right)} = \frac{556651 \text{ N}}{55 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0.04 \text{ m})^2} \rightarrow n_\sigma = 8.05 \rightarrow n_\sigma = 9$$

A continuación se determina el número de pernos utilizando el esfuerzo admisible.

$$A = \pi D_{int} t - \frac{n \pi d^2}{4}$$
$$\sigma_a = \frac{F}{A} \rightarrow A = \frac{F}{\sigma_a} \rightarrow \pi t D_{int} - \frac{n \pi d^2}{4} = \frac{F}{\sigma_a} \rightarrow n = \frac{4}{\pi d^2} \left( \pi D_{int} t - \frac{F}{\sigma_a} \right)$$
$$\rightarrow n = 5,7 \approx 6$$

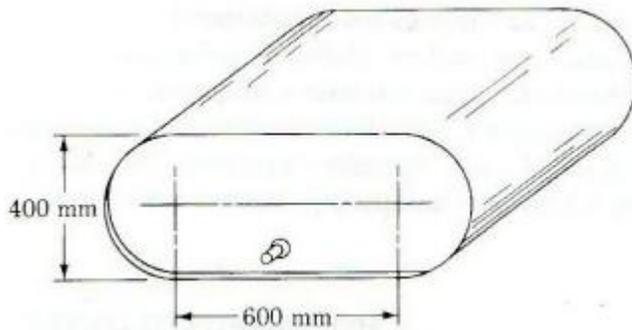
De ambos valores, se escoge el número de pernos que asegure que ambos esfuerzos podrán ser soportados, por lo que se requerirán 17 pernos.

$$\sigma_t = \frac{p D_i}{2t} = \frac{\left( 3.5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) (0.43 \text{ m})}{2(0.01 \text{ m})} = 75.3 \text{ MPa}$$

El apriete inicial permite que los tornillos permanezcan fijos.

Si se duplica el esfuerzo de apriete los pernos fallarían.

2.3. Problema N°3



El depósito de la figura se construyó con una placa de 10 mm de acero. Calcular los esfuerzos máximos tangenciales y longitudinales que se originarán debido a una presión interna de 1.2 MPa

Solución:

El esfuerzo tangencial se determina haciendo equilibrio de fuerzas.

$$2tL\sigma_t = pL(2R + B) \rightarrow \sigma_t = \frac{p(2R + B)}{2t} = \frac{1.2 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} (2 \cdot 0.2 \text{ m} + 0.6 \text{ m})}{2 \cdot 0.01 \text{ m}} \rightarrow \sigma_t = 60 \text{ MPa}$$

El esfuerzo longitudinal se calcula de forma similar.

$$(\pi D + 2B)t\sigma_l = \frac{\pi D^2}{4} p + DBp \rightarrow \sigma_l = \frac{\left(\frac{\pi D^2}{4} + DB\right) p}{(\pi D + 2B)t}$$

$$\sigma_l = \frac{\left(\frac{\pi(0.4 \text{ m})^2}{4} + (0.4 \text{ m})(0.6 \text{ m})\right) 1.2 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}}{(\pi 0.4 \text{ m} + 2 \cdot 0.6 \text{ m})(0.01 \text{ m})} = 17.862 \text{ MPa}$$

## DEFORMACION SIMPLE

### 1. Diagrama Esfuerzo Deformación

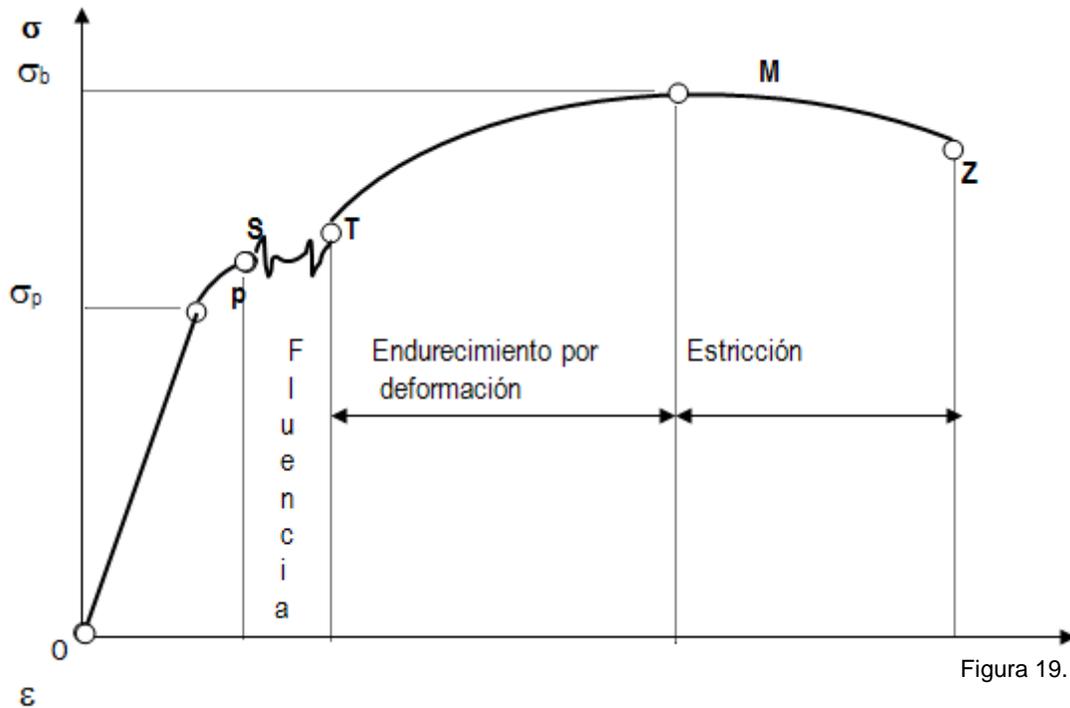


Figura 19.

En la figura anterior, se representa un diagrama típico de ensayo a la tracción del hierro, donde se indican las tensiones límites.

En la parte OP del diagrama las tensiones aplicadas son proporcionales a los alargamientos específicos.

$\sigma_p$  es la tensión límite de proporcionalidad.

En el punto S comienza el escurrimiento del material que termina en el punto T. En un ensayo bien efectuado se puede distinguir entre el punto de fluencia que corresponde a la carga alcanzada, justo antes de que empiece la fluencia, y el punto de fluencia más bajo que corresponde a la carga requerida para mantener la fluencia. Como el punto de fluencia superior es transitorio, debe usarse el punto de fluencia inferior para determinar la resistencia a la fluencia del material.

A partir del punto T continúan aumentando las tensiones aplicadas en función de los alargamientos específicos.

En el punto M se obtiene la tensión máxima “aparente” alcanzada por el material que se denomina Resistencia a la Tracción y corresponde al esfuerzo máximo aplicado. A partir del punto M y aún antes, el material comienza a estrangularse en un punto determinado de la barra (el más débil) y las secciones que resisten el esfuerzo van disminuyendo siendo posible que entre M y Z las tensiones reales sean mayores que  $\sigma_b$ . Así pues,  $\sigma_z$  es la verdadera tensión de rotura.

Después de alcanzar determinado valor máximo de carga, el diámetro de una porción de la probeta empieza a disminuir debido a la inestabilidad local, este fenómeno se conoce como estricción. Cuando la estricción se ha iniciado, cargas más pequeñas son suficientes para mantener a la muestra alargándose aún más, hasta que finalmente se rompe. La ruptura ocurre a lo largo de una superficie cónica que forma un ángulo de 45° con la superficie original de la probeta. Esto indica que los esfuerzos cortantes son los principales causantes de la falla de materiales dúctiles y confirma el hecho de que, bajo carga axial, los esfuerzos cortantes son máximos en superficies que forman un ángulo de 45° con la carga.

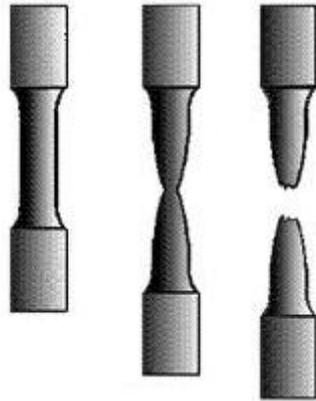


Figura 20.

Hasta ahora se han explicado solo los ensayos de tracción. Si una probeta de material dúctil estuviera cargada a compresión, en lugar de tracción, la curva esfuerzo - deformación obtenida sería esencialmente la misma en cuanto a la parte recta, y el comienzo de la porción correspondiente a fluencia y a endurecimiento por deformación. Particularmente notable es que para un acero dado, la resistencia a la fluencia es la misma a tracción y a compresión. Para valores mayores de la deformación, las curvas esfuerzo - deformación de tracción y compresión difieren y debe notarse que la estricción no ocurre a compresión.

### **1.1. Deformación Unitaria**

Una barra cargada axialmente sufre una variación en su longitud alargándose o acortándose según esté sometida a tracción o a compresión. Sea  $\delta$  la variación total de longitud y  $L$  la longitud total de la barra y que ésta es de material totalmente uniforme en toda su longitud. Se define deformación unitaria  $\varepsilon$  a la relación:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$\varepsilon$  se denomina deformación unitaria a tracción o compresión. En el primer caso significará un alargamiento de la barra y en el segundo un acortamiento de la misma.

Debido a que  $\delta$  y  $L$  son dos longitudes  $\varepsilon$  es adimensional, aunque es frecuente medir  $\delta$  en mm y  $L$  en m, presentando  $\varepsilon$  unidades de mm/m.

## **2. Ley de Hooke**

### **2.1. Deformación Longitudinal**

De la gráfica tensión – deformación, se aprecia que existe una zona en donde la elasticidad proporcional es lineal, por lo que su ecuación analítica será:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Siendo E una constante llamada módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young.

La expresión anterior constituye la Ley de Hooke: en la zona elástica de los materiales, los esfuerzos son proporcionales a los alargamientos unitarios.

El módulo de elasticidad longitudinal E que, según se deduce de la ecuación tiene las dimensiones de esfuerzo, es diferente para cada material.

Otra forma de expresar la Ley de Hooke en forma conveniente, es la que se obtiene al reemplazar  $\sigma$  por su equivalente  $P/A$ , y  $\varepsilon$  por  $\delta/L$  de modo que la ley de Hooke se transforma en:

$$\frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta = \frac{PL}{AE}$$

La expresión anterior tiene validez cuando se cumplen las siguientes hipótesis:

- La carga debe ser axial
- La barra debe ser homogénea y de sección constante
- El esfuerzo no debe sobrepasar el límite de proporcionalidad

### **2.2. Deformación angular**

Las fuerzas cortantes producen una deformación angular o distorsión, de la misma forma que las fuerzas axiales producen deformaciones longitudinales.

La deformación angular media se obtiene de la siguiente manera:

$$\gamma = \frac{\delta_s}{L}$$

Suponiendo que la ley de Hooke también es válida para en cortante, existe una relación lineal entre la distorsión y el esfuerzo cortante. Dada por:

Dada por:

$$\tau = G\gamma$$

En donde G es el módulo de elasticidad al cortante o transversal. La relación entre la deformación tangencial total y las fuerzas cortantes aplicadas viene dada por:

$$\delta_s = \frac{VL}{A_s G}$$

### 3. Relación de Poisson

Al realizar el ensayo de tracción, se comprueba que la barra alargada debido a la tensión axial, experimenta una reducción en sus dimensiones transversales. Poisson fue capaz de demostrar que la relación entre las deformaciones unitarias en estas direcciones es constante, siempre y cuando se trabaje por debajo del límite de proporcionalidad. La relación de Poisson se expresa mediante la siguiente relación:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

Donde  $\varepsilon_x$  corresponde debida solamente a un esfuerzo en la dirección X,  $\varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$  son las deformaciones unitarias que se manifiestan en las direcciones perpendiculares.

#### 3.1. Deformación biaxial

Si un elemento se encuentra sometido simultáneamente a esfuerzos axiales en las direcciones X e Y, mediante la relación de Poisson es posible generalizar la ley de Hooke, obteniéndose las siguientes deformaciones en cada eje:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}$$

Resolviendo el sistema anterior en forma simultánea, es posible obtener el valor de los esfuerzos en cada eje.

$$\sigma_x = \frac{(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)E}{1 - \nu^2} \quad \sigma_y = \frac{(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)E}{1 - \nu^2}$$

#### 3.2. Deformación triaxial

Generalizando para el caso 3D, se tienen las siguientes deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

NOTA: Estas expresiones son válidas cuando se tienen esfuerzos de compresión, sólo hay que aplicar la convención de signo positivo para los alargamientos y signos negativos para los acortamientos y esfuerzos de compresión.

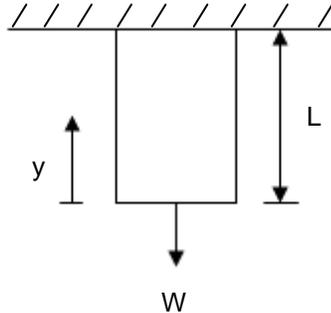
El módulo de Young es posible relacionarlo con el módulo de elasticidad transversal, a través de la relación de Poisson. Esta relación se muestra a continuación.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

#### 4. Problemas Ilustrativos

##### 4.1. Problema N°1

Una barra prismática de longitud  $L$ , sección transversal  $A$  y densidad  $\rho$  se suspende verticalmente de un extremo. Demostrar que su alargamiento total es  $\delta = \rho g L^2 / 2E$ . Llamando  $M$  a su masa total, demostrar que también  $\delta = MgL / 2AE$



**Solución:**

Haciendo equilibrio en el eje Y.

$$\sigma_y A - \rho g A y = 0$$

$$\sigma_y = \rho g y$$

Aplicando ley de Hooke y suponiendo que solo existe deformación en el eje y.

$$\varepsilon_y = \frac{\delta}{dy} = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\rho g y}{E} \rightarrow \delta = \frac{\rho g y}{E} dy$$

Integrando la expresión anterior entre 0 y L, se obtiene el alargamiento.

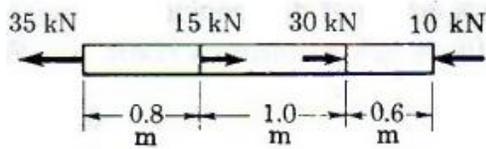
$$\delta = \int_0^L \frac{\rho g y}{E} dy = \frac{\rho g y^2}{E} \Big|_0^L \rightarrow \delta = \frac{\rho g L^2}{2E}$$

Multiplicando y dividiendo la expresión anterior por A, se obtiene:

$$\delta = \frac{\rho g L^2}{2E} \left( \frac{A}{A} \right), \text{ pero } M = \rho V = \rho A L$$

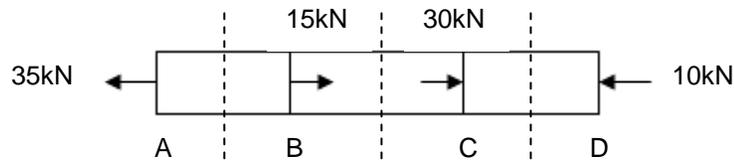
$$\delta = \frac{M g L}{2 A E}$$

4.2. Problema N°2

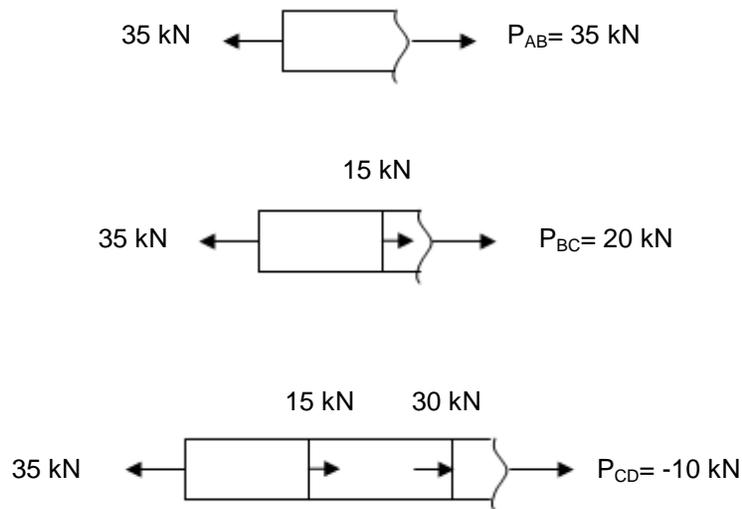


Una barra de aluminio de sección constante  $160 \text{ mm}^2$  soporta unas fuerzas axiales aplicadas en los puntos que indica la figura. Si  $E= 70 \text{ GPa}$ , determinar el alargamiento, o acortamiento total de la barra. (Suponer que el elemento no se pandea).

Solución:



De la figura se parecía que las secciones AB y BC se encuentran traccionadas, por lo que presentaran un alargamiento, en cambio, la sección CD se encuentra comprimida, por lo que presentará un acortamiento. A continuación se determinarán la fuerza presente en cada sección.

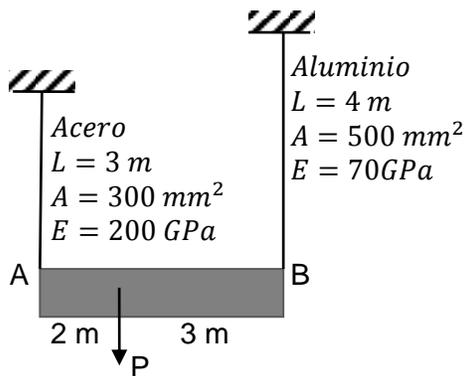


Luego el alargamiento será:

$$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} - \delta_{CD}$$

$$\delta = \frac{(35 \cdot 10^3 \text{ N})0.8 \text{ m} + (20 \cdot 10^3 \text{ N})1 \text{ m} - (10 \cdot 10^3 \text{ N})0.6 \text{ m}}{(160 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2) \left(70 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)} = 3.75 \text{ mm}$$

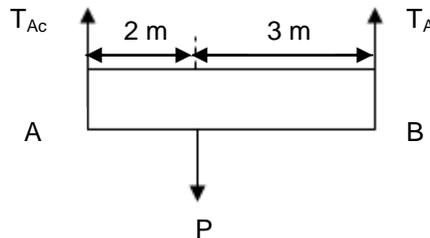
4.3. Problema N°3



La barra rígida AB, sujeta dos varillas verticales como se muestra en la figura, se encuentra en posición horizontal antes de que se aplique la carga P. Si  $P = 50 \text{ kN}$ , determine el movimiento vertical de la barra en el punto de aplicación de la carga.

Solución:

Construyendo el DCL de la barra, se obtiene:



Realizando equilibrio en la barra

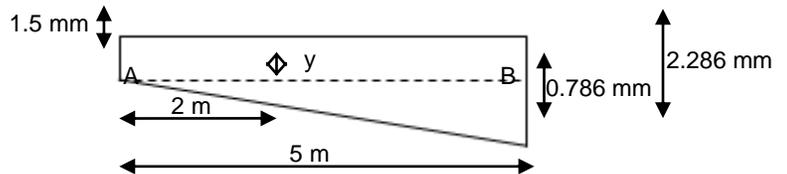
$$\sum M_A = 0 \rightarrow T_{Al}(5 \text{ m}) = P(2 \text{ m}) \rightarrow T_{Al} = 20 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow T_{Ac}(5 \text{ m}) = P(3 \text{ m}) \rightarrow T_{Ac} = 30 \text{ kN}$$

A continuación se determinan los alargamientos en A y en B.

$$\delta_A = \frac{(30 \cdot 10^3 \text{ N})(3 \text{ m})}{(300 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})} = 1.5 \text{ mm}$$

$$\delta_B = \frac{(20 \cdot 10^3 \text{ N})(4 \text{ m})}{(500 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2)(70 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})} = 2.286 \text{ mm}$$

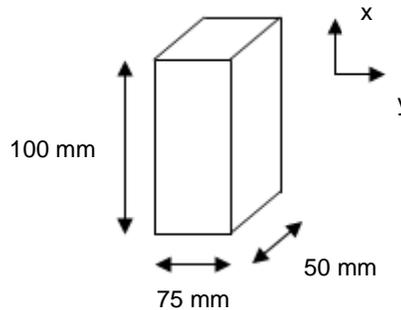


De la semejanza de triángulos, se logra obtener y

$$\frac{y}{2 \text{ m}} = \frac{0.786 \text{ mm}}{5 \text{ m}} \rightarrow y = 0.3144 \text{ mm}$$

#### 4.4. Problema N°4

Un bloque rectangular de aluminio tiene 100 mm de longitud según la dirección X, 75 mm de ancho según la dirección Y y 50 mm de alto en la dirección Z. Está sometido a tres fuerzas según tres direcciones. Una fuerza de tensión uniformemente distribuida de 200 kN en la dirección X y fuerzas de compresión uniforme distribuidas de 160 y 220 kN según las direcciones Y y Z, respectivamente. Si  $\nu = 1/3$  y  $E = 70$  GPa, determinar que carga total uniformemente distribuida en la dirección X produciría la misma deformación transversal en la dirección Z que las cargas dadas.



#### Solución:

En primer lugar se determinarán los esfuerzos actuantes sobre el bloque debido a las cargas aplicadas.

$$\sigma_x = \frac{200 \cdot 10^3 \text{ N}}{(75 \cdot 50)10^{-6} \text{ m}^2} = 53.333 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -\frac{160 \cdot 10^3 \text{ N}}{(100 \cdot 50)10^{-6} \text{ m}^2} = -32 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = -\frac{220 \cdot 10^3 \text{ N}}{(75 \cdot 100)10^{-6} \text{ m}^2} = -29.333 \text{ MPa}$$

A continuación se determina la deformación en z producida por los esfuerzos actuantes.

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{70000 \text{ MPa}} \left[ -29.333 \text{ MPa} - \frac{1}{3}(53.333 \text{ MPa} - 32 \text{ MPa}) \right] = -5.206 \cdot 10^{-4}$$

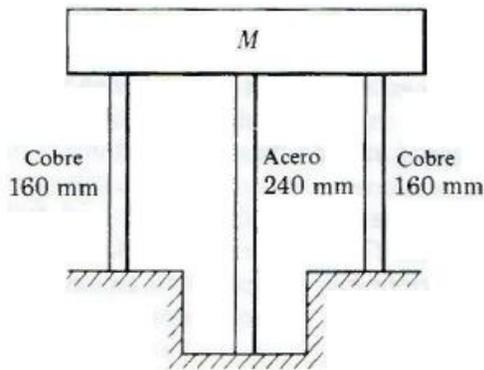
Si se considera que actúa solo carga en X, que produce una deformación  $\varepsilon_z$ , se tiene

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{E} \nu \sigma_x \rightarrow P_x = -\frac{A_x \varepsilon_z E}{\nu}$$

Reemplazando, se tiene:

$$P_x = -\frac{((75 \cdot 50)10^{-6} \text{ m}^2)(-5.206 \cdot 10^{-4})(70 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})}{\frac{1}{3}} \rightarrow P_x = 409.97 \text{ kN}$$

4.5. Problema N°5



Un bloque completamente rígido de masa  $M$  se apoya en tres varillas situadas en un mismo plano, como se indica en la figura. Las varillas de cobre tienen una sección de  $900 \text{ mm}^2$ ,  $E = 120 \text{ GPa}$ , y esfuerzo admisible de  $70 \text{ MPa}$ . La varilla de acero tiene una sección de  $1200 \text{ mm}^2$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ , y el esfuerzo admisible es  $140 \text{ MPa}$ . Calcular el máximo valor de  $M$ .

Solución:

Debido a la simetría que presenta la situación física del problema, se determina que el acortamiento de las barras va a ser el mismo para el cobre y el acero.

$$\delta = \delta_{Ac} = \delta_{Cu} \rightarrow \frac{\sigma_{Ac} L_{Ac}}{E_{Ac}} = \frac{\sigma_{Cu} L_{Cu}}{E_{Cu}} \rightarrow \frac{\sigma_{Ac} (0.240 \text{ m})}{(200 \text{ GPa})} = \frac{\sigma_{Cu} (0.160 \text{ m})}{(120 \text{ GPa})} \rightarrow 0.9 \sigma_{Ac} = \sigma_{Cu} \quad (1)$$

La masa  $M$  máxima que puede tener el bloque, se obtendrá cuando una de las barras llegue a su esfuerzo admisible.

Si la barra de acero llega a su esfuerzo admisible, la barra de cobre tendrá un esfuerzo dado por la relación (1).

$$\sigma_{Ac} = 140 \text{ MPa} \rightarrow \sigma_{Cu} = 126 \text{ MPa} > 70 \text{ MPa}$$

Se aprecia que la barra de cobre supera su esfuerzo admisible, por lo se debe analizar el caso en que la barra de cobre llega a su esfuerzo admisible. De la relación (1) se determina el esfuerzo de la barra de acero.

$$\sigma_{Cu} = 70 \text{ MPa} \rightarrow \sigma_{Ac} = 77.79 \text{ MPa} < 140 \text{ MPa}$$

Como el esfuerzo en el acero es menor que su esfuerzo admisible, la situación es físicamente posible y se puede determinar la masa máxima del bloque.

Haciendo sumatorias de fuerzas verticales en el bloque rígido, se tiene:

$$\sum F_V = 0 \rightarrow 2P_{Cu} + P_{Ac} = Mg \rightarrow M = \frac{2A_{Cu}\sigma_{Cu} + A_{Ac}\sigma_{Ac}}{g}$$

$$M = \frac{2(900 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2) \left(70 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right) + (1200 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2) \left(77.79 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \rightarrow M = 22.359 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

4.6. Problema N°6



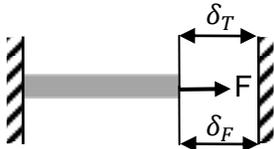
Una varilla de acero de 150 mm<sup>2</sup> de sección está sujeta en sus extremos a dos puntos fijos, estando estirada con una fuerza total de P= 5000 N a 20°C. Calcular el esfuerzo en la varilla a -20°. ¿A qué temperatura se anulará el esfuerzo?

$$\alpha = 11.7 \mu\text{m}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C}) \text{ y } E = 200 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

Solución:

El esfuerzo debido a la fuerza P es:

$$\sigma_P = \frac{P}{A} = \frac{5000 \text{ N}}{150 \text{ mm}^2} = 33.3 \text{ MPa}$$



El esfuerzo debido a la variación de la temperatura se deduce de las deformaciones que se producen en el material. El descenso de la temperatura produce una contracción en la varilla de acero, simbolizada por  $\delta_T$ , pero como la varilla esta fija en ambos extremos para volver a unirla al muro se necesita una fuerza de tracción F que provoca la deformación  $\delta_F$ . Así al igualar las deformaciones se obtiene el esfuerzo:

$$[\delta_T = \delta_F] \quad \alpha \cdot L \cdot \Delta T = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} \rightarrow \sigma_{ter} = \alpha \cdot \Delta T \cdot E$$

La variación térmica corresponde a:  $\Delta T = T_{final} - T_{inicial} = -20^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = -40^\circ\text{C}$ . Al remplazarla en el esfuerzo térmico tenemos:

$$\sigma_{ter} = 11.7 \frac{\mu\text{m}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 40^\circ\text{C} \cdot 200 \text{ GPa} = 93.6 \text{ MPa}$$

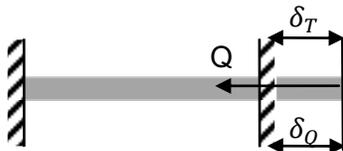
Finalmente el esfuerzo sobre la varilla de acero es:

$$\sigma = \sigma_P + \sigma_{ter} = 33.3 \text{ MPa} + 93.6 \text{ MPa} = 126.9 \text{ MPa}$$

El cual es un esfuerzo de tracción, debido a que la fuerza P estira el material y para unir la varilla al muro se necesita una fuerza F que también lo estira.

Para determinar a qué temperatura se anulará el esfuerzo se tiene:

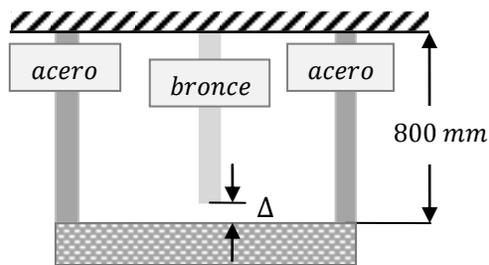
$$\sigma = \sigma_P + \sigma_{ter} = 0 \rightarrow 33.3 \text{ MPa} + \sigma_{ter} = 0 \rightarrow \sigma_{ter} = -33.3 \text{ MPa} \text{ (Esfuerzo de compresión)}$$



$$\begin{aligned} \sigma_{ter} &= \alpha \cdot \Delta T \cdot E = 11.7 \frac{\mu\text{m}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot \Delta T \cdot 200 \text{ GPa} = 33.3 \text{ MPa} \\ &\rightarrow \Delta T = 14.23^\circ\text{C} \rightarrow \Delta T = T_{final} - T_{inicial} = T_{final} - 20^\circ\text{C} = 14.23^\circ\text{C} \\ &\rightarrow T_{final} = 34.23^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Por lo tanto se requiere un aumento temperatura que produce una dilatación del material simbolizada por  $\delta_T$  y para mantener la varilla unida al muro se necesita una fuerza Q que reduzca el material, simbolizada por  $\delta_Q$ , la cual produce el esfuerzo de compresión.

4.7. Problema N°7



A una temperatura de 20°C hay un claro  $\Delta = 20 \text{ mm}$  entre el extremo inferior de la barra y la losa rígida suspendida de las dos barras de acero. Despreciando la masa de la losa, determine el esfuerzo en cada barra cuando la temperatura del conjunto aumenta a 100°C.

Para la barra de bronce,  $A = 600 \text{ mm}^2$ ,  $E = 83 \cdot 10^9 \text{ Pa}$  y  $\alpha = 18.9 \mu\text{m}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ .

Para cada barra de acero,  $A = 400 \text{ mm}^2$ ,  $E = 200 \cdot 10^9 \text{ Pa}$  y  $\alpha = 11.7 \mu\text{m}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ .

**Solución:**

La variación térmica corresponde a:  $\Delta T = T_{\text{final}} - T_{\text{inicial}} = 100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 80^\circ\text{C}$ .

Para las barras de acero se tiene:

- La deformación que experimentan por la variación térmica:

$$\delta_{\text{ter}} = \alpha \cdot L \cdot \Delta T = 11.7 \frac{\mu\text{m}}{(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})} \cdot 800 \text{ mm} \cdot 80^\circ\text{C} = 0.748 \text{ mm}$$

- El equilibrio de las deformaciones por dilatación debido al alza de temperatura y la contracción debido a que se encuentra fijo a la losa:

$$[\delta_{\text{ter}} = \delta_p] \quad 0.748 \text{ mm} = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} \rightarrow 0.748 \text{ mm} = \frac{\sigma \cdot 800 \text{ mm}}{200 \cdot 10^9 \text{ Pa}} \rightarrow \sigma = 187.5 \text{ MPa}$$

Para las barras de bronce se tiene:

- La deformación que experimentan por la variación térmica:

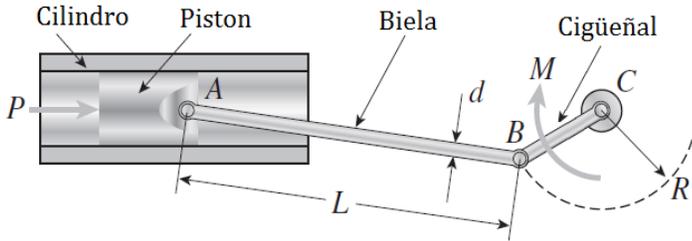
$$\delta_{\text{ter}} = \alpha \cdot L \cdot \Delta T = 18.9 \frac{\mu\text{m}}{(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})} \cdot (800 \text{ mm} - 0.2 \text{ mm}) \cdot 80^\circ\text{C} = 1.209 \text{ mm}$$

- El equilibrio de las deformaciones por dilatación debido al alza de temperatura y la contracción debido a que se encuentra fijo a la losa:

$$[\delta_{\text{ter}} = \delta_p] \quad 1.209 \text{ mm} - 0.2 \text{ mm} = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} \rightarrow 1.009 \text{ mm} = \frac{\sigma \cdot 800 \text{ mm}}{83 \cdot 10^9 \text{ Pa}} \rightarrow \sigma = 104.68 \text{ MPa}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Problema N°1

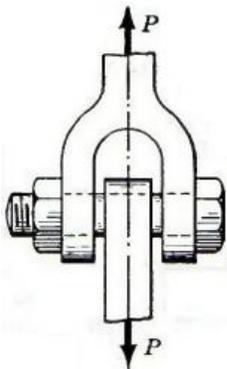


El pistón de un motor está unido a una biela AB, que a su vez está conectada a un brazo de cigüeñal BC. El pistón se desliza sin fricción en un cilindro y está sujeto a una fuerza  $P$  (que se supone constante) mientras se mueve hacia la derecha en la figura. La biela, cuyo diámetro es  $d$  y longitud es  $L$ , está fija en ambos extremos mediante pernos. El brazo de cigüeñal gira respecto al eje en  $C$  y el perno en  $B$  se mueve en un círculo de radio  $R$ . El eje en  $C$ , que está sostenido por cojinetes, ejerce un momento  $M$  contra el brazo de cigüeñal.

- A) Deduzca una expresión para la fuerza máxima permisible,  $P_{adm}$ , con base en el esfuerzo de compresión admisible  $\sigma_c$  en la biela.  
 B) Calcule la fuerza  $P_{adm}$  con los siguientes datos:  $\sigma_c = 160 \text{ MPa}$ ,  $d = 9 \text{ mm}$  y  $R = 0.28 L$ .

Respuesta: A)  $P_{adm} = \sigma_c A_c \cos \alpha = \sigma_c \left(\frac{\pi d^2}{4}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$   
 B)  $P_{adm} = 9.77 \text{ kN}$

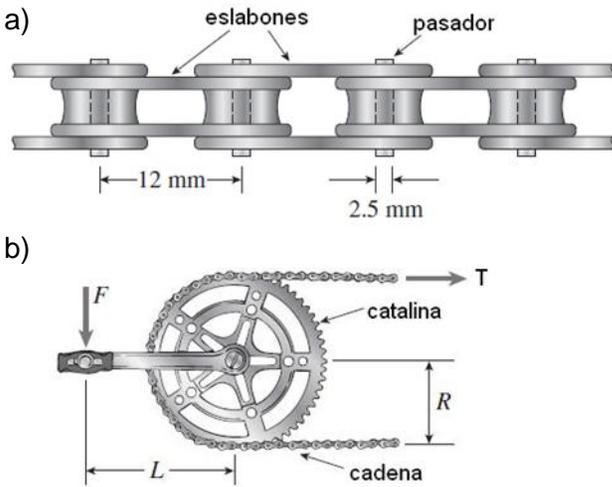
2. Problema N°2



En la articulación de la figura, determine el diámetro mínimo del perno, el mínimo espesor de cada rama de la horquilla si debe soportar una carga  $P$  de 55 kN sin sobrepasar un esfuerzo cortante de 70 MPa ni uno de 140 MPa a compresión.

Respuesta:  $d = 2 \text{ mm}$   
 $t = 9 \text{ mm}$

3. Problema N°3



Una cadena de bicicleta consiste en una serie de eslabones pequeños, cada uno de 12 mm de longitud unidos mediante pasadores de 2.5 mm de diámetro (figura a). La longitud del pedal  $L = 200$  mm y el radio de la catalina  $R = 100$  mm (figura b).

Calcule:

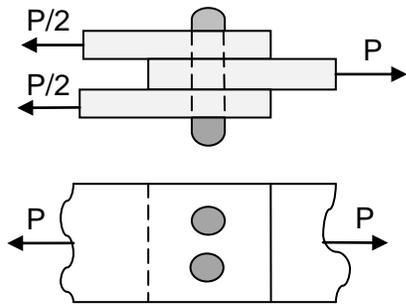
A) la tensión  $T$  en la cadena, cuando la fuerza  $F = 800$  N se aplica a uno de los pedales.

B) el esfuerzo cortante en los pasadores.

Respuesta: A)  $T = 1600$  N

B)  $\tau = 162.975$  MPa

4. Problema N°4



Tres placas de acero cada una de 16 mm de espesor están unidas con dos remaches de 20 mm, como muestra la figura.

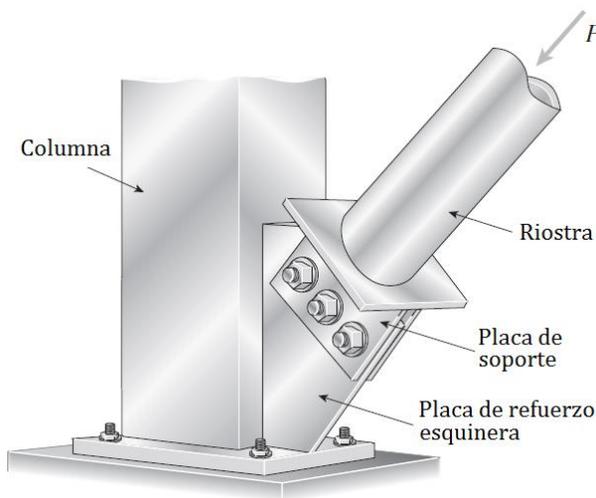
A) Si la carga es  $P = 50$  kN ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo que actúa sobre los remaches?

B) Si el esfuerzo cortante último para esos remaches es 180 MPa ¿qué fuerza se requiere para hacer que los remaches fallen por corte?

Respuesta: A)  $\tau = 39.789$  MPa

B)  $F = 114$  kN

5. Problema N°5



En la figura se ve una conexión atornillada entre una columna vertical y una riostra diagonal (pieza que asegura armazones o estructuras). La conexión consiste en tres tornillos de 16 mm de diámetro que unen dos placas de soporte de 6,4 mm de espesor, soldadas a la riostra, y una placa de refuerzo esquinera de 16 mm de espesor, soldada a la columna. La carga de compresión  $P$  que soporta la riostra es de 36 kN, cuyo su diámetro exterior es  $d_2 = 60$  mm y diámetro interior  $d_1 = 50$  mm. Determine:

A) El esfuerzo de compresión en la riostra.

B) El esfuerzo cortante en los tornillos.

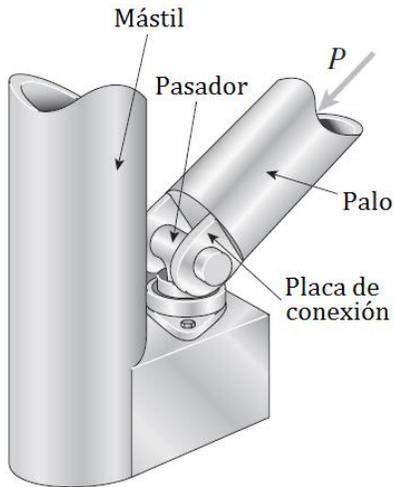
C) El esfuerzo de contacto entre la placa de refuerzo y los tornillos.

Respuesta: A)  $\sigma_c = 41,7$  MPa

B)  $\tau = 29,8$  MPa

C)  $\sigma_b = 23,4$  MPa

6. Problema N°6



El palo de un barco está unido a la base de un mástil por una conexión de pasador. El palo es un tubo de acero de diámetro exterior  $d_2 = 80$  mm y diámetro interior  $d_1 = 70$  mm. El pasador de acero tiene  $d = 25$  mm y las dos placas que unen al palo con el pasador tienen  $t = 12$  mm de espesor.

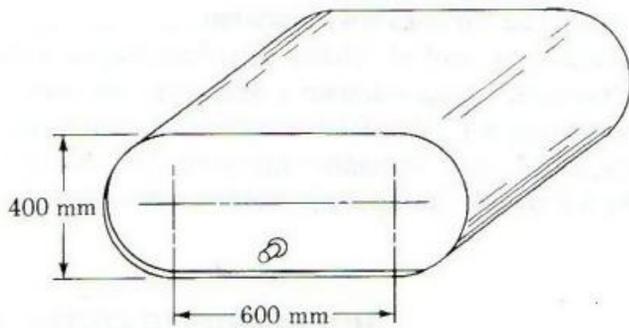
Los esfuerzos admisibles son:

- Esfuerzo de compresión en el palo 70 MPa;
- Esfuerzo cortante en el pasador 45 MPa;
- Esfuerzo de contacto entre el pasador y las placas de conexión 110 MPa.

Determine la fuerza de compresión admisible en el palo ( $P_{adm}$ ).

Respuesta:  $P_{adm} \leq 44,2$  kN

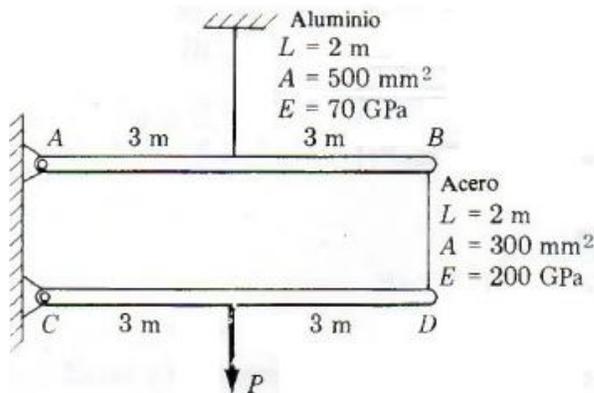
7. Problema N°7



Calcular el mínimo espesor de la placa que forma el depósito de la figura, si el esfuerzo admisible es de 40 MPa y la presión interior vale 1.5 MPa.

Respuesta:  $t = 18.75$  mm

8. Problema N°8



Las barras rígidas AB y CD mostradas en la figura, están apoyadas mediante pernos en A y en C, y mediante las varillas mostradas. Determine la máxima Fuerza P que pueda aplicarse como se muestra si el movimiento vertical de las barras está limitado en 5 mm. Despreciar el peso de todos los miembros.

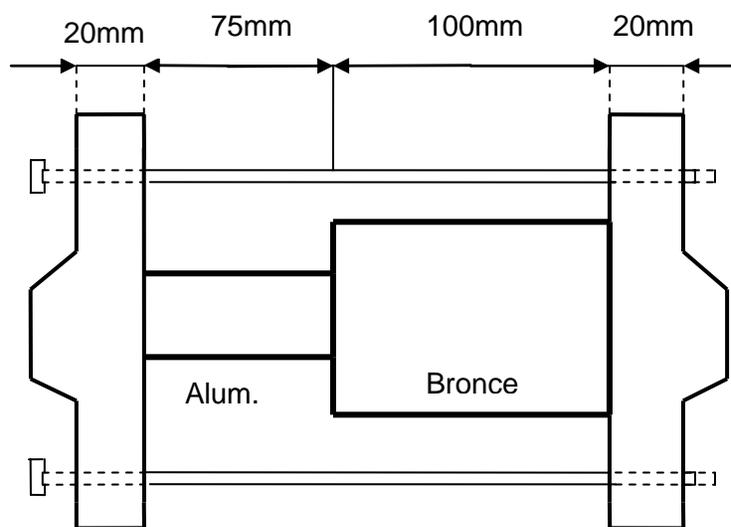
Respuesta: 38.18kN

9. Problema N°9

Un tambor cilíndrico de acero construido de placa soldada de 10 mm, tiene un diámetro interior de 1.2 m. Calcular el aumento del diámetro bajo la acción de una presión interior de 1.5 MPa. Suponer que la relación de Poisson es 0.3 y  $E = 200 \text{ GPa}$ .

Respuesta:  $\delta_x = 0.003 \text{ mm}$ .

10. Problema N°10



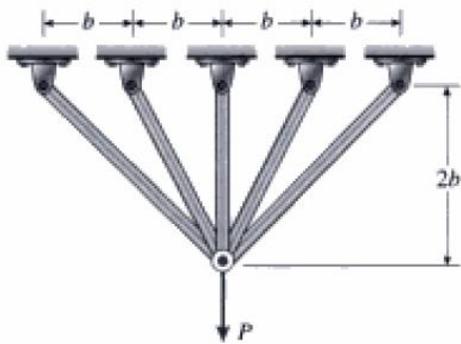
Un cilindro de aluminio y otro de bronce, perfectamente centrados, se aseguran entre dos placas rígidas que se pueden apretar mediante dos tornillos de acero, como se muestra en la figura. A  $10^\circ\text{C}$  no existen fuerzas axiales en conjunto del dispositivo. Determinar las tensiones en cada material a  $90^\circ\text{C}$ , con los siguientes datos:

Aluminio,  $A=1200 \text{ mm}^2$ ,  $E=70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , y  $\alpha=23 \mu\text{m}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ .

Bronce,  $A=1800 \text{ mm}^2$ ,  $E=83 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , y  $\alpha=19,0 \mu\text{m}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ .

Cada tornillo,  $A=500 \text{ mm}^2$ ,  $E=200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\alpha=11,7 \mu\text{m}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ .

Respuesta:  $\sigma_{acero} = 33.75 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{bronce} = 18.75 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{Aluminio} = 28.12 \text{ MPa}$



11. Problema 11

Cinco barras, cada una con 10mm de diámetro, sostienen una carga  $P$ , como muestra la figura. Determine la carga plástica  $P_p$ , si el material es elastoplástico con esfuerzo de fluencia  $\sigma_y = 250MPa$

Respuesta: 82.5kN