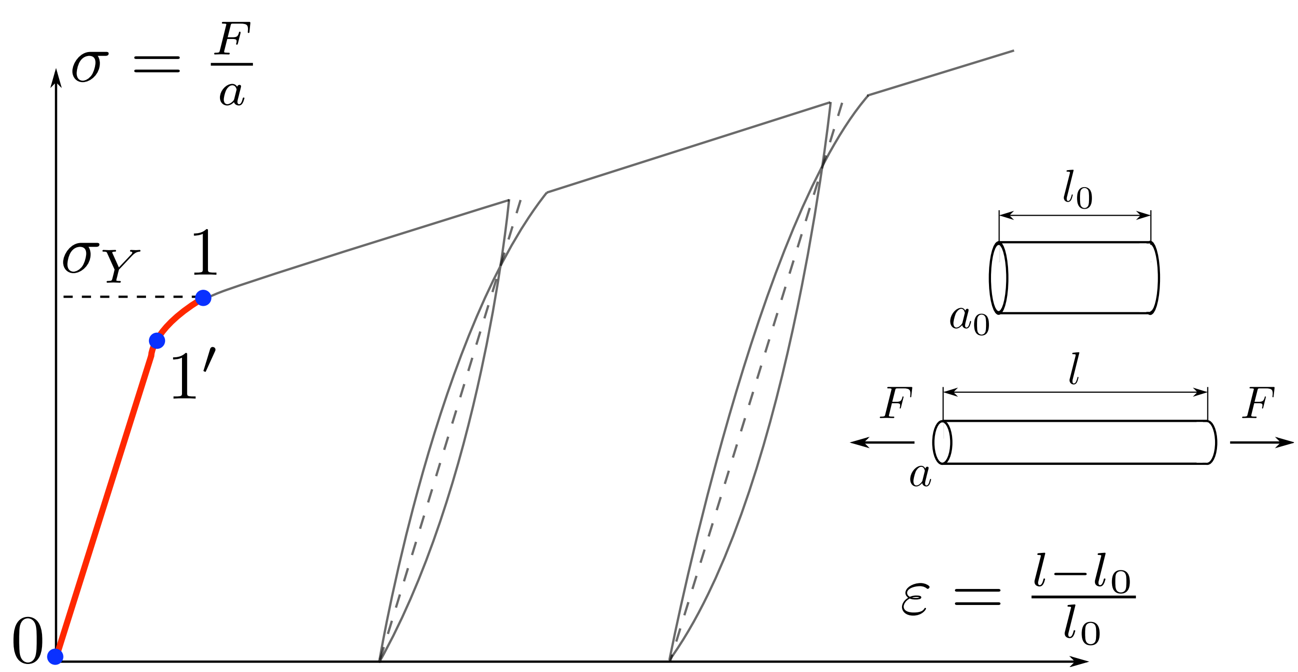
Outline

Índice

Análisis del ensayo a tracción.

Carga elástica.

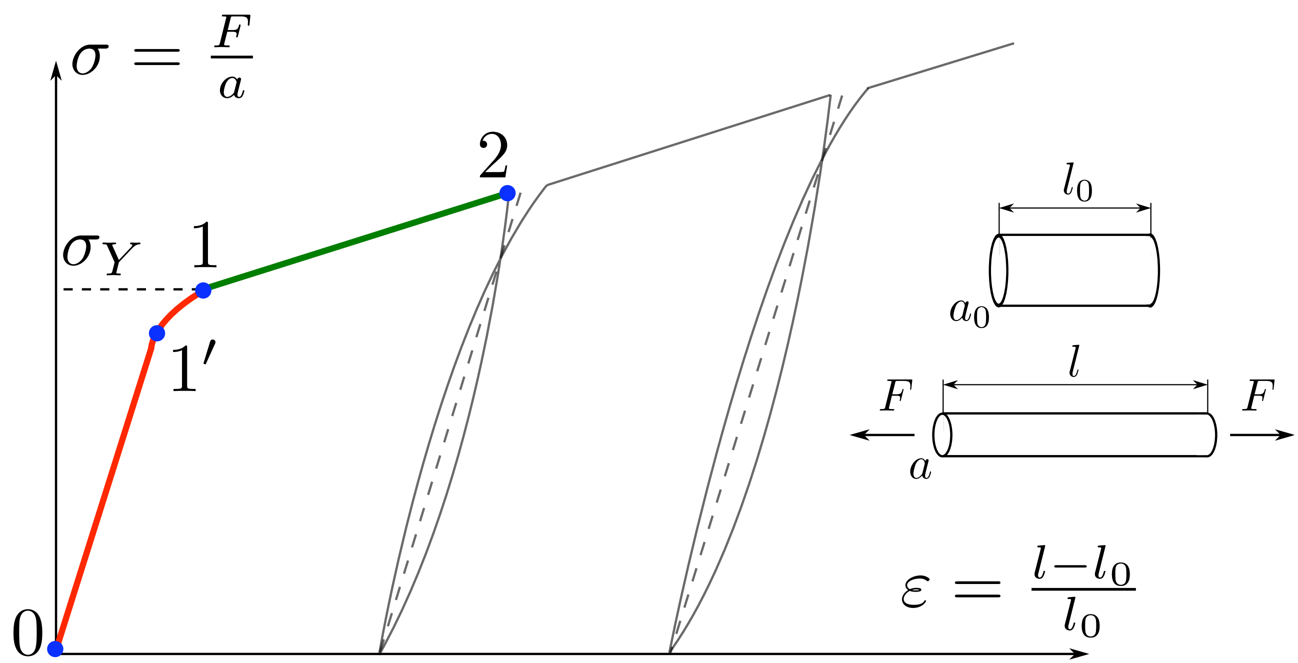
- Hay un comportamiento reversible: si se descarga recuperamos todas las deformaciones y volvemos al punto 0.
- Hay un rango con respuesta lineal y un rango con respuesta no lineal



Análisis del ensayo a tracción.

Carga plástica.

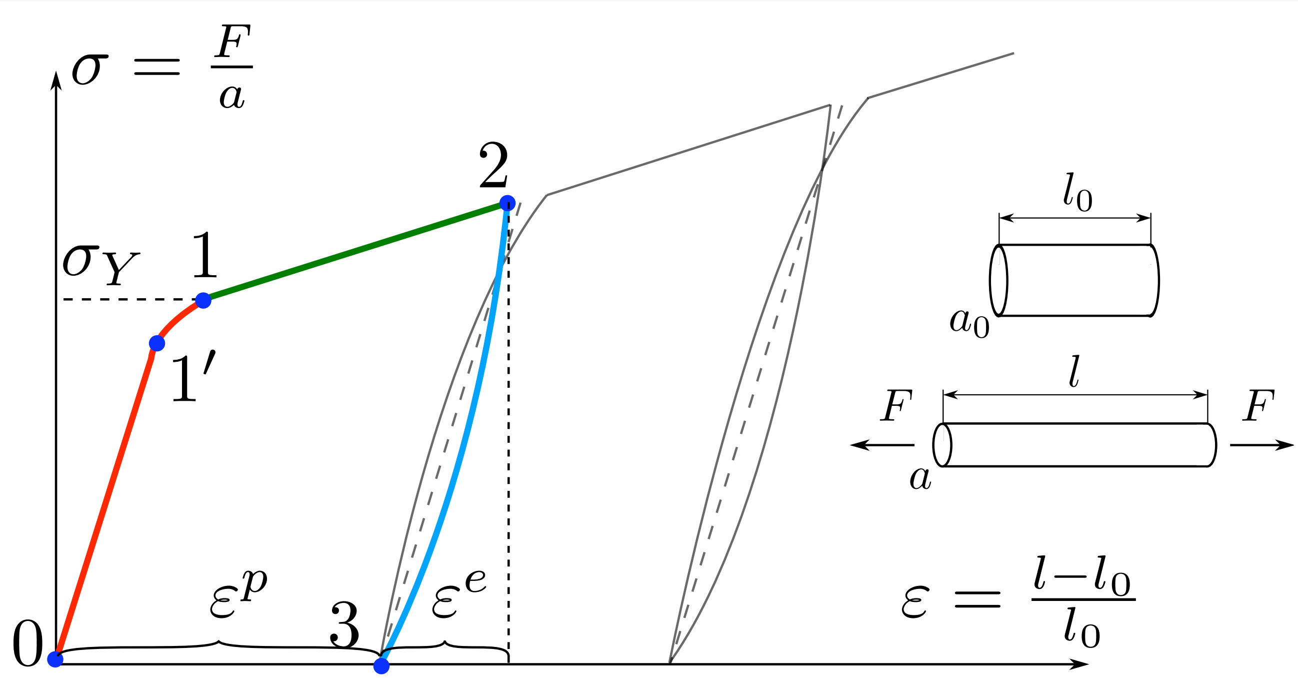
- El comportamiento plástico tiene lugar a partir de un punto límite σ_Y llamado tensión de fluencia.
- Hay una respuesta anelástica: aparecen unas deformaciones no recuperables.



Análisis del ensayo a tracción.

Descarga elástica.

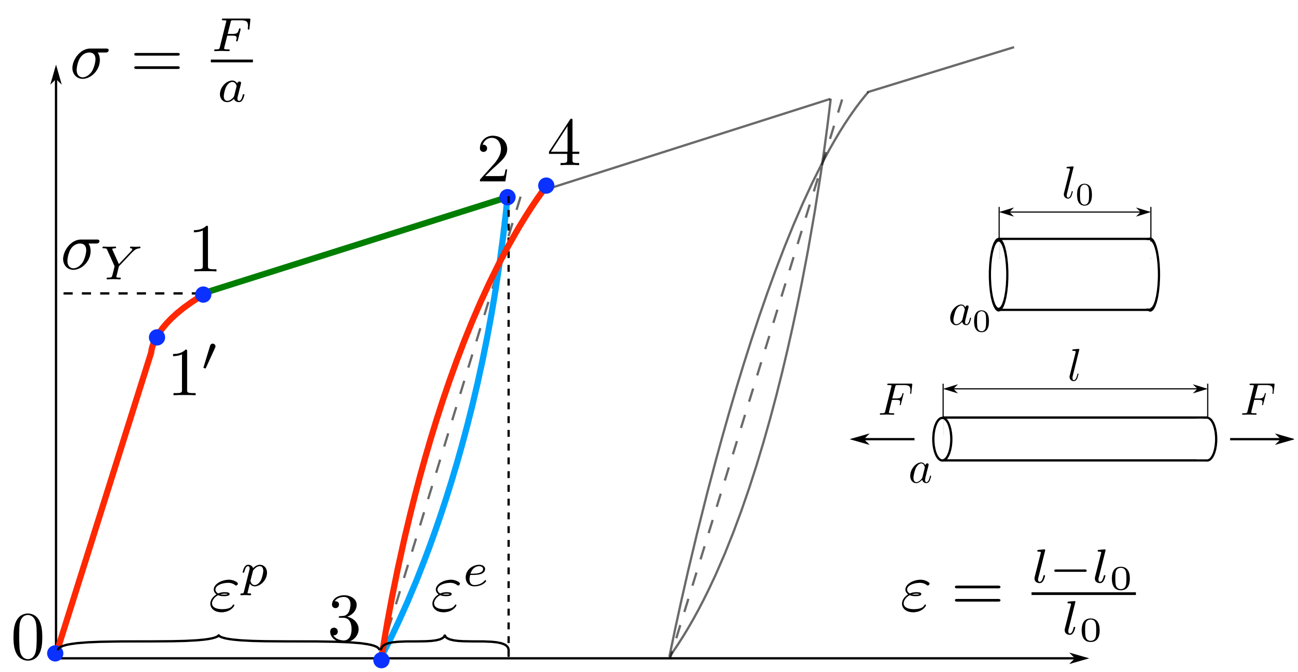
- La pendiente de descarga es la misma que la de la carga elástica inicial.
- Las deformaciones totales se descomponen en una parte recuperable ε^e y en una parte no recuperable ε^p.



Análisis del ensayo a tracción.

Recarga elástica.

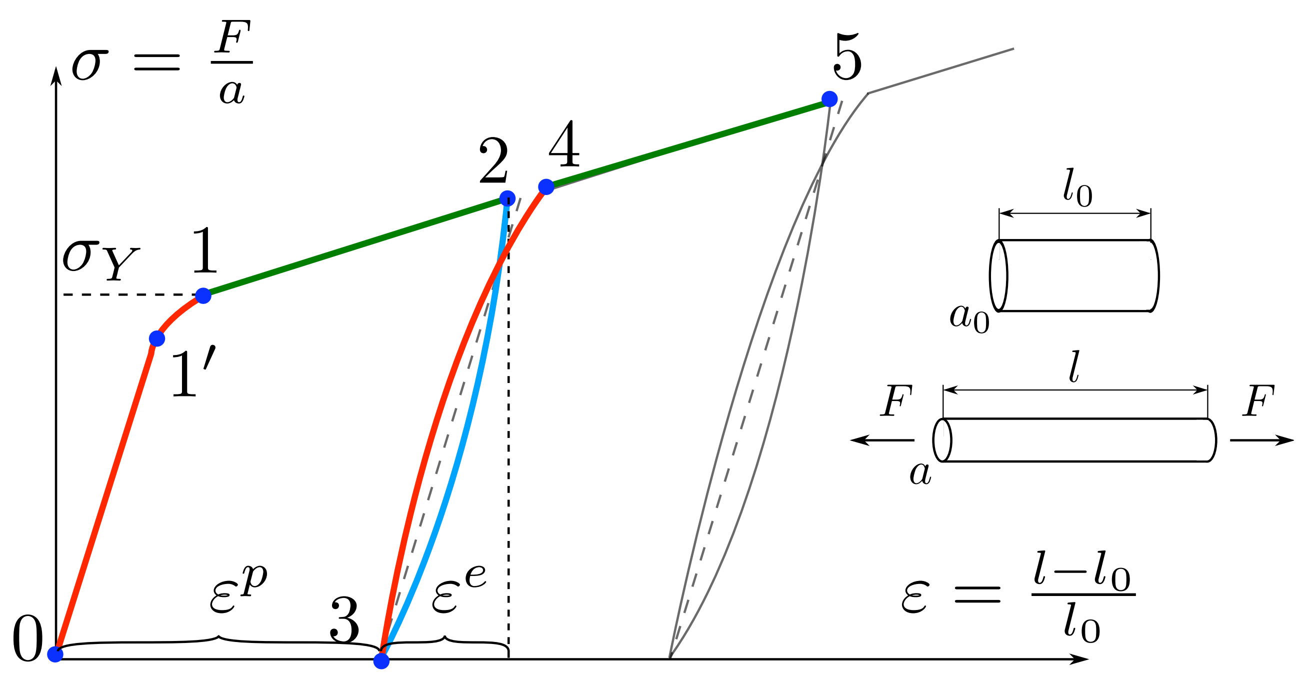
- La pendiente de la recarga es la misma que la de la carga elástica inicial.
- Hay un comportamiento elástico hasta el límite de carga alcanzado anteriormente.



Análisis del ensayo a tracción.

Carga plástica.

- La nueva tensión de fluencia es el valor alcanzado en la anterior carga plástica.
- Continua el proceso anelástico incrementándose las deformaciones no recuperables y aumentando el valor de la tensión de fluencia.



Índice

Comportamiento elástico.

Las deformaciones vuelven a cero cuando el material se descarga.
Si $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, se tiene que para $\sigma = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$.
El comportamiento puede ser lineal o no lineal.

Comportamiento plástico.

Aparecen procesos irreversibles no recuperables.
Cuando el material se descarga las deformaciones no vuelven a cero, quedan deformaciones remanentes, anelásticas o plásticas.

Tensión de comparación.

Valor escalar $\sigma_{co} = \sigma_{co}(\boldsymbol{\sigma})$ que se obtiene a partir del estado tensional.

Límite de fluencia

Propiedad material σ_Y que marca la frontera entre los dominios elásticos y plásticos. Este límite evoluciona debido a los procesos anelásticos.

Dominio elástico

Conjunto de estados tensionales cuya tensión de comparación es menor que el límite de fluencia.

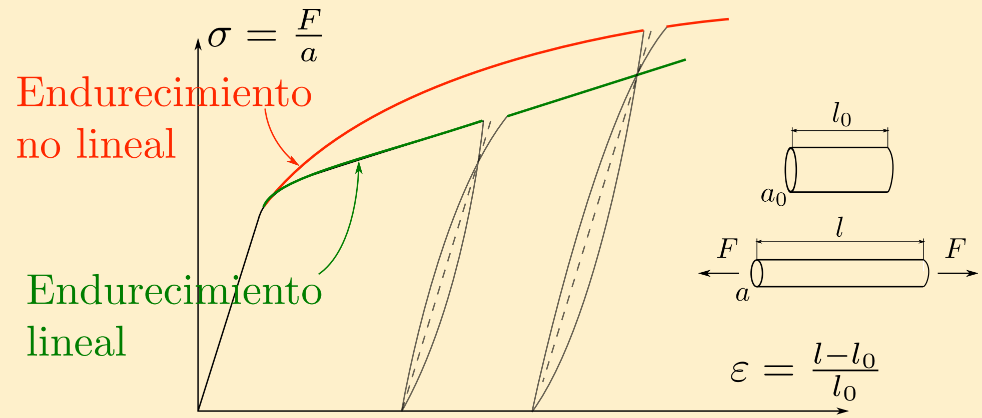
$$\{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R} \mid f(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_{co}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y) < 0\}$$

Función de fluencia

Función que define la frontera del dominio elástico de la forma $f(\boldsymbol{\sigma}) := (\sigma_{co}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y) = 0$.

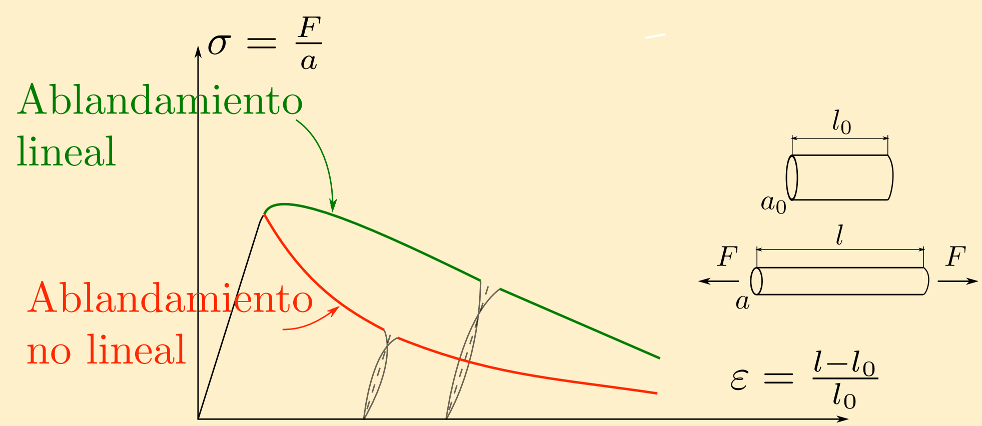
Plasticidad con endurecimiento.

Debido a los procesos anelásticos se aumenta el límite de fluencia.
Puede ser lineal o no lineal



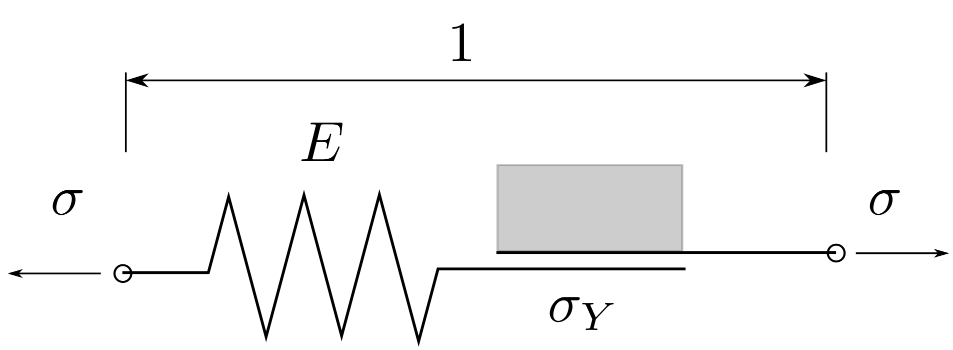
Plasticidad con ablandamiento.

Debido a los procesos anelásticos se reduce el límite de fluencia.
Puede ser lineal o no lineal

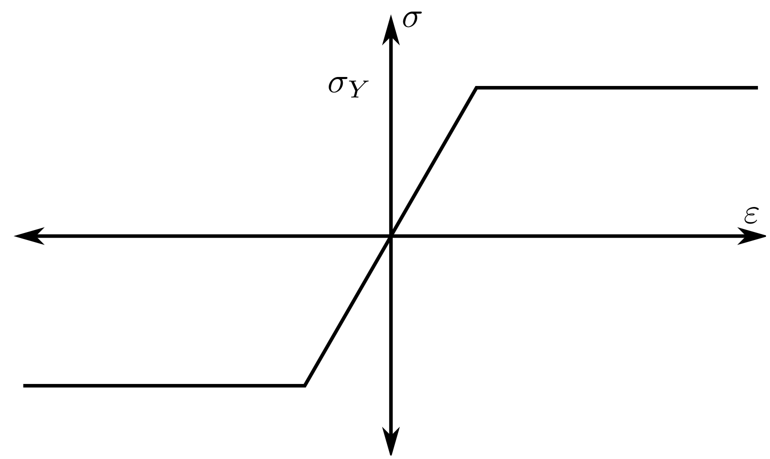


Índice

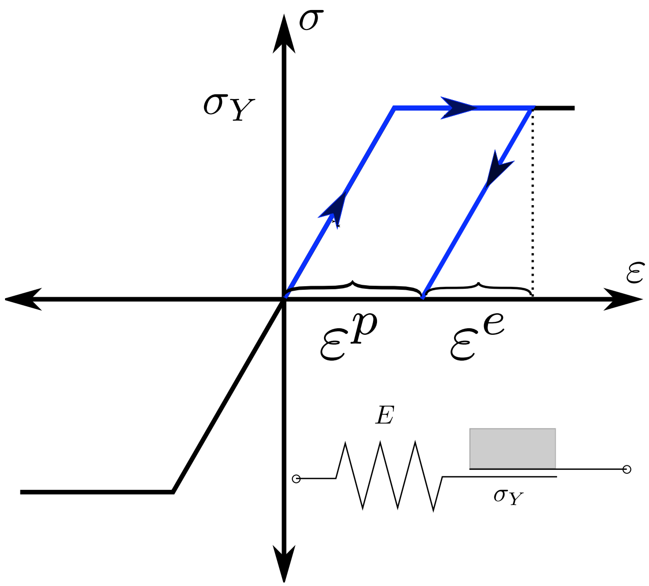
Plasticidad perfecta



Modelo reológico



Plasticidad perfecta



1. Descomposición aditiva de las deformaciones

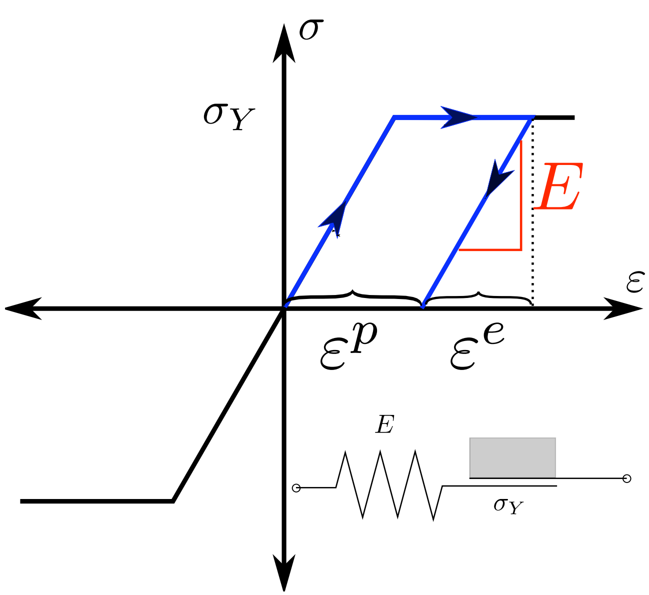
Las deformaciones totales se descomponen en:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

siendo:

- ε deformaciones totales.
- ε^e deformaciones elásticas recuperables.
- ε^p deformaciones inelásticas no recuperables.

Plasticidad perfecta



2. Ley constitutiva tensión-deformacion

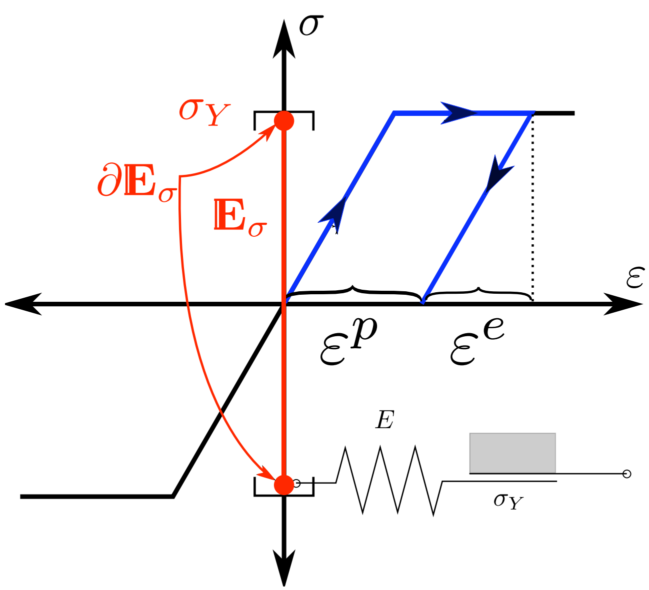
La tensión vale:

$$\sigma = E\,\varepsilon^e = E\,(\varepsilon - \varepsilon^p), \quad \sigma \leq \sigma_Y$$

siendo:

- E el módulo de Young del material.
- σ_Y el el límite de fluencia del material

Plasticidad perfecta



3. Dominios de las tensiones admisibles

El conjunto de las tensiones admisibles es:

$$\mathbb{E}_\sigma = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y \leq 0\}$$

siendo $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y$ la función de fluencia.

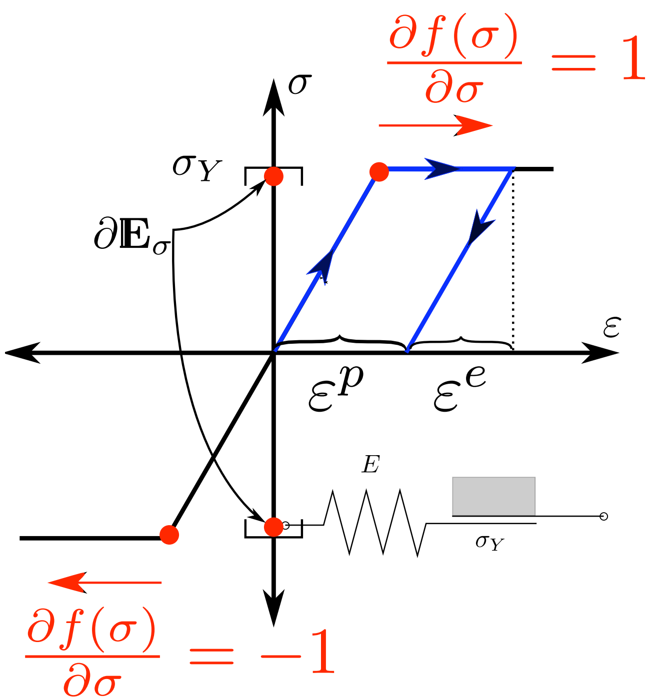
El dominio elástico es el conjunto de las tensiones que son menores al límite de fluencia:

$$\mathrm{int}(\mathbb{E}_\sigma) = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y < 0\}$$

La frontera del dominio elástico es el conjunto de las tensiones que son iguales al límite de fluencia:

$$\partial\mathbb{E}_\sigma = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y = 0\}$$

Plasticidad perfecta



4. Regla de flujo

La variación de las deformaciones plásticas vale:

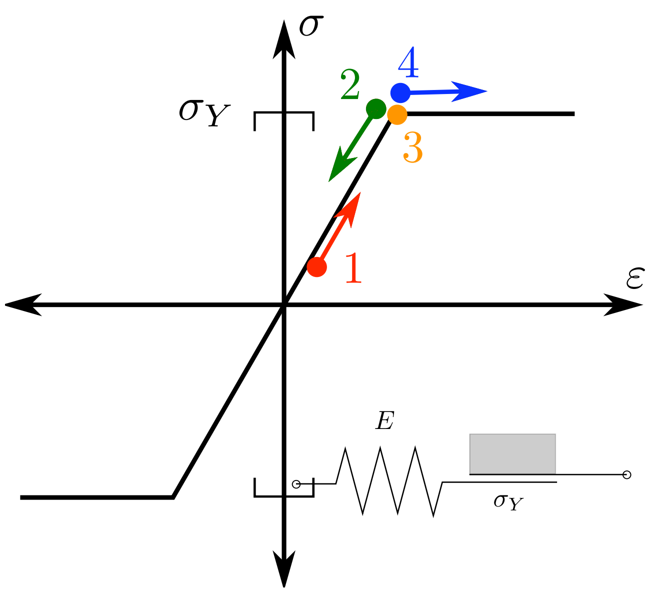
$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \quad \text{si} \quad f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y < 0$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} \quad \text{si} \quad f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y = 0$$

siendo:

- $\gamma \geq 0$ el parámetro de consistencia (tasa del deslizamiento del elemento friccional).
- $\frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} = sign(\sigma)$ es el vector de flujo plástico.

Plasticidad perfecta



5. Condiciones de carga-descarga

Los valores de σ y γ están restringidos por:

- las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma) = 0$$

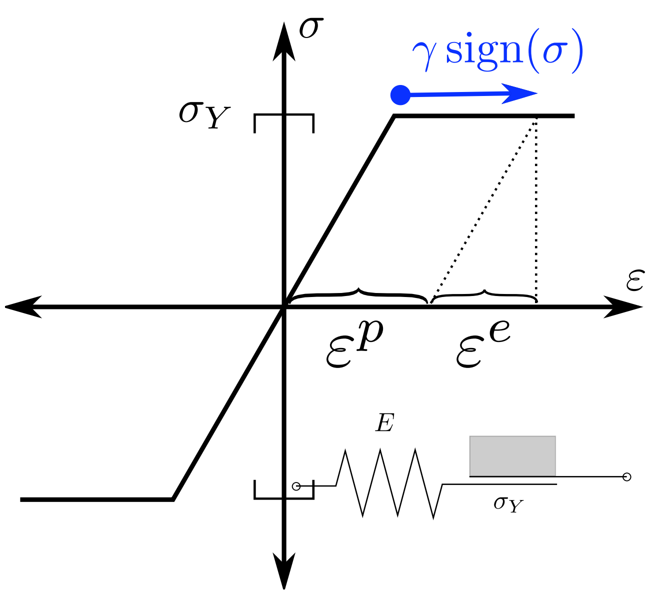
- la condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0$$

Podemos identificar las siguientes situaciones:

$$\begin{cases} f < 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{int}(\mathbb{E}_\sigma) \Rightarrow \gamma = 0 \text{ (elástico)(1)} \\ f = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} \in \partial\mathbb{E}_\sigma \begin{cases} \dot{f} < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \text{ (desc. elást.)(2)} \\ \dot{f} = 0 \text{ y } \gamma = 0 \text{ (carga neutra)(3)} \\ \dot{f} = 0 \text{ y } \gamma > 0 \text{ (carga plástica)(4)} \end{cases} \end{cases}$$

Plasticidad perfecta



6. Valor del parámetro de consistencia

Partimos de la condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0$$

siendo el valor de $\dot{f}$

$$\dot{f}(\sigma) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E\dot{\varepsilon} - \frac{\partial f}{\partial \sigma} E\gamma \mathrm{sign}(\sigma)$$

donde $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \mathrm{sign}(\sigma)$.

Imponiendo carga plástica obtenemos el valor de γ:

$$\dot{f}(\sigma) = 0 \Rightarrow \gamma = \dot{\varepsilon}\, \mathrm{sign}(\sigma)$$

lo que nos permite obtener el valor de $\dot{\varepsilon}^p$ como

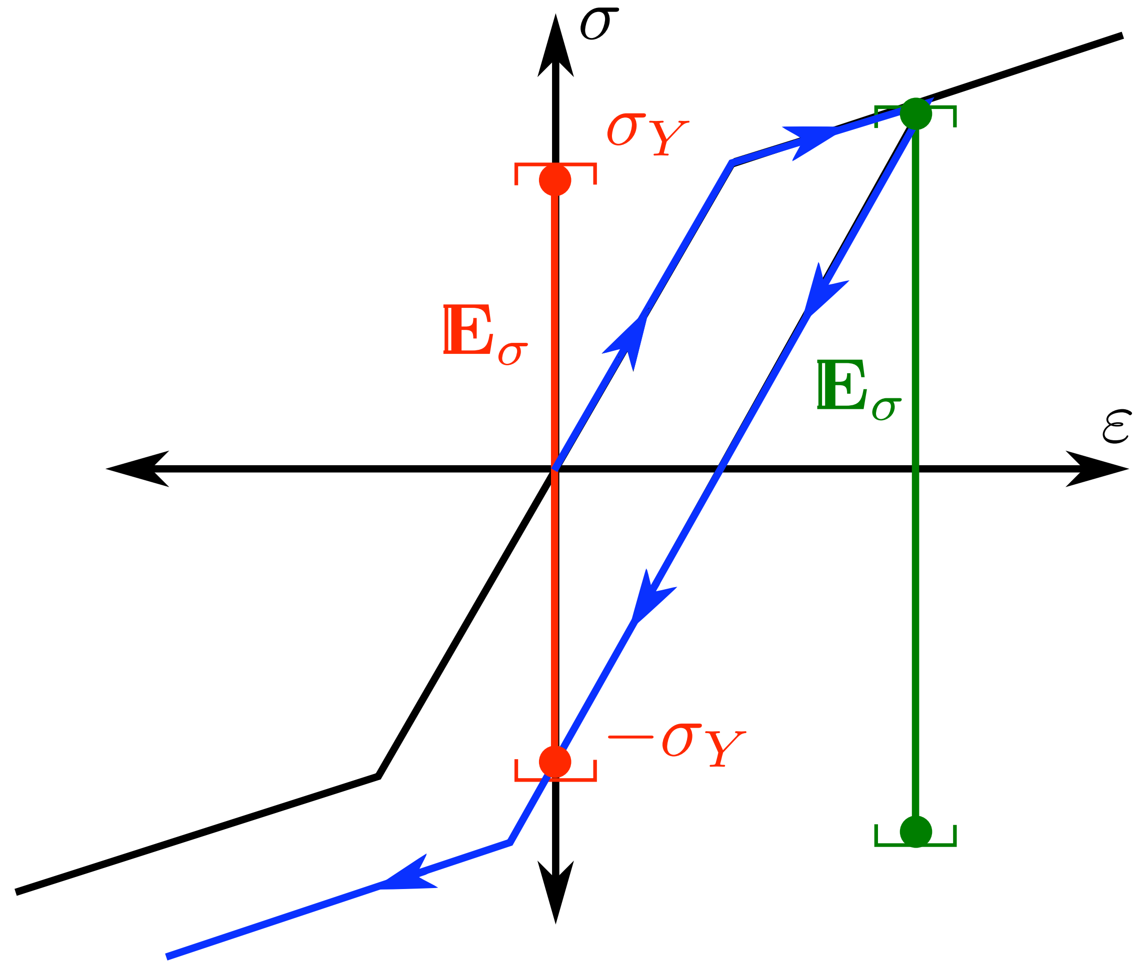
$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} \text{ para } f(\sigma) = 0, \dot{f}(\sigma) = 0$$

Plasticidad perfecta

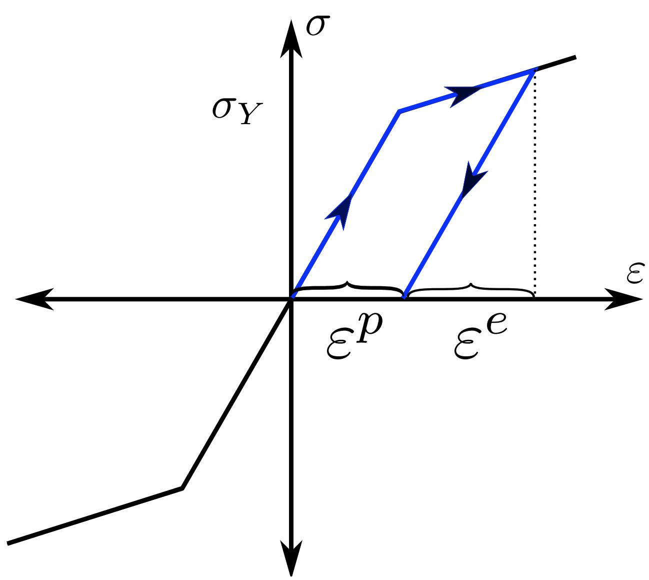
Resumen plasticidad perfecta unidimensional

1. Relación tensión-deformación:
$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$
2. Regla de flujo:
$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma)$$
3. Condición de fluencia:
$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y \leq 0$$
4. Condiciones de complementaridad de Kuhn-Tucker:
$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma) = 0$$
5. Condición de consistencia:
$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0$$

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal



Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal



1. Descomposición aditiva de las deformaciones

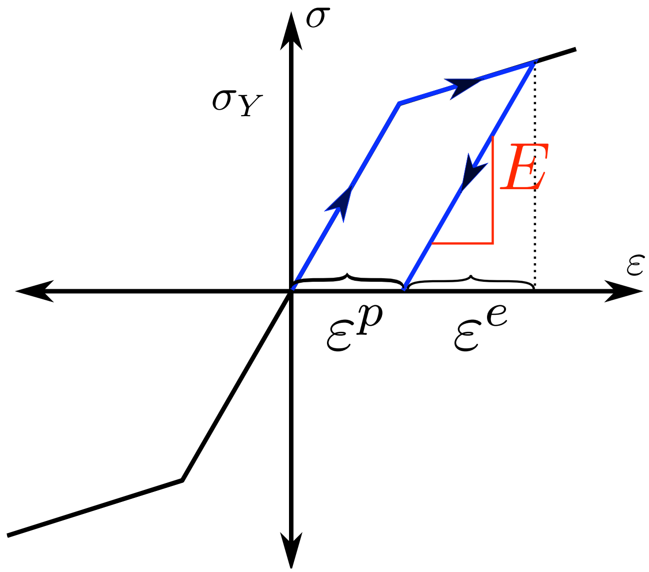
Las deformaciones totales se descomponen en:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

siendo:

- ε deformaciones totales.
- ε^e deformaciones elásticas recuperables.
- ε^p deformaciones inelásticas no recuperables.

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal



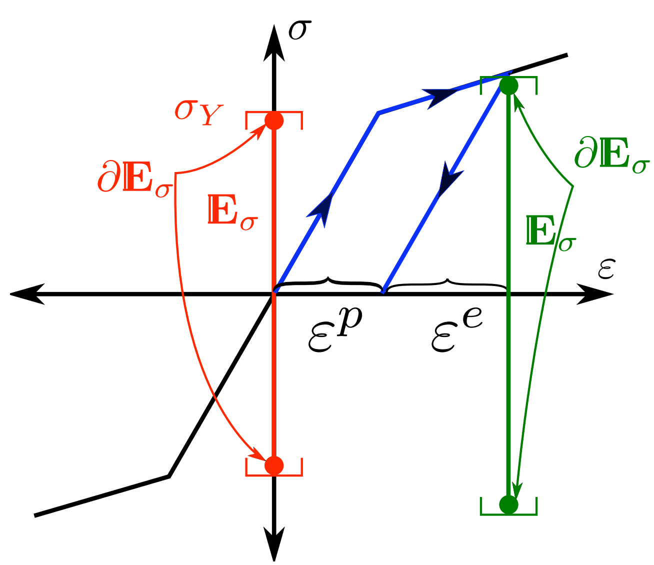
2. Ley constitutiva tensión-deformacion

La tensión vale:

$$\boldsymbol{\sigma} = E\,\varepsilon^e = E\,(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

siendo E el módulo de Young del material.

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal



3. Dominio de las tensiones admisibles

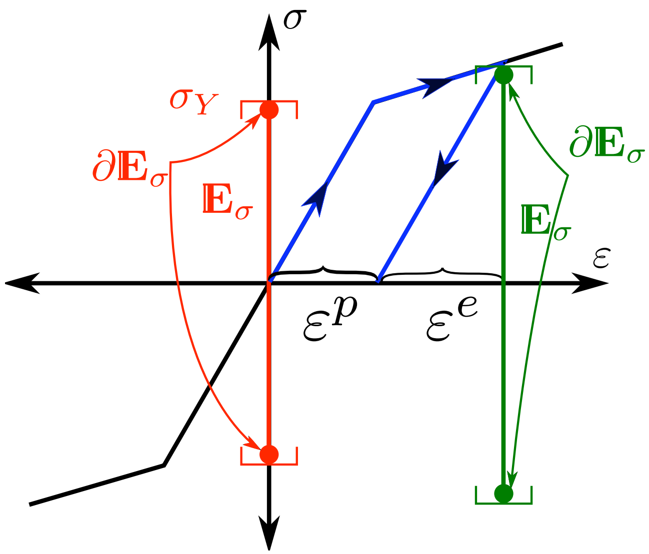
El conjunto de las tensiones admisibles es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\sigma &= \{(\sigma,\alpha) \in \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}_+ \mid \\ &\qquad f(\sigma,\alpha) = |\sigma| - (\sigma_Y + K\alpha) \le 0\} \end{aligned}$$

siendo $f(\sigma,\alpha) = |\sigma| - (\sigma_Y + K\alpha)$ la función de fluencia y donde:

- σ_Y el el límite de fluencia del material en el estado inicial cuando no han ocurrido deformaciones plásticas.
- K es el modulo de endurecimiento isotrópico.
- α es una variable interna tipo deformación no negativa que acumula las deformaciones plásticas históricas en valor absoluto.

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal



3. Dominio elástico y frontera del dominio elástico

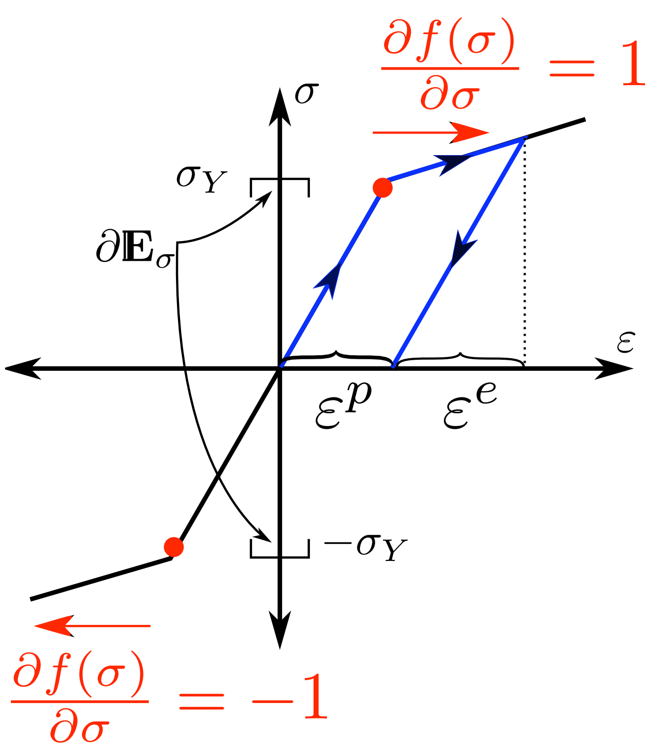
El dominio elástico es el conjunto de las tensiones que son menores al límite de fluencia:

$$\begin{aligned}\operatorname{int}(\mathbb{E}_\sigma) &= \{(\sigma,\alpha) \in \mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R}_+ | \\ &\qquad f(\sigma,\alpha) = |\sigma| - (\sigma_Y + K\alpha) < 0\}\end{aligned}$$

La frontera del dominio elástico es el conjunto de las tensiones que son iguales al límite de fluencia:

$$\begin{aligned}\partial\mathbb{E}_\sigma &= \{(\sigma,\alpha) \in \mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R}_+ \mid \\ &\qquad f(\sigma,\alpha) = |\sigma| - (\sigma_Y + K\alpha) = 0\}\end{aligned}$$

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal



4. Regla de flujo y ley de endurecimiento isotrópico

La variación de las deformaciones plásticas vale:

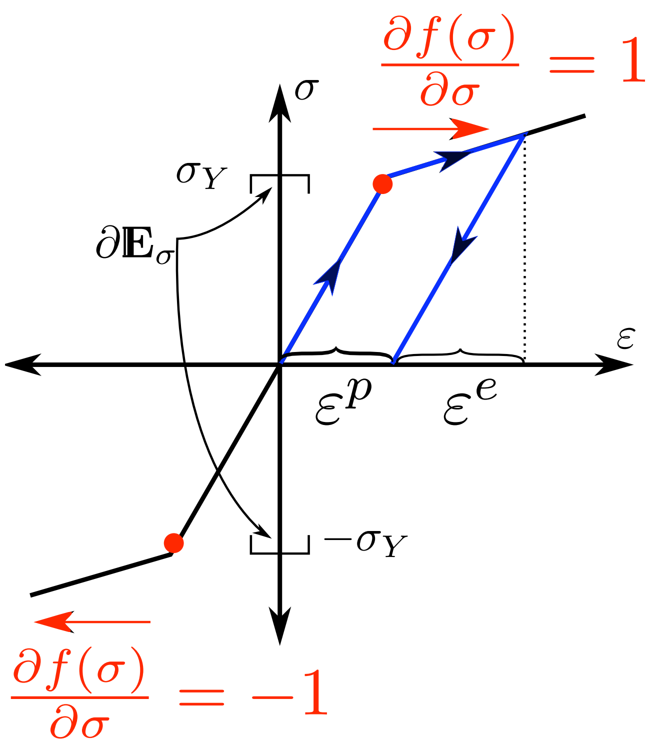
$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \ \text{ si } \ f(\sigma,\alpha) < 0$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f(\sigma,\alpha)}{\partial \sigma} \ \text{ si } \ f(\sigma,\alpha) = 0$$

siendo:

- $f(\sigma,\alpha) = |\sigma| - (\sigma_Y + K\,\alpha)$ la función de fluencia.
- $\gamma \geq 0$ el parámetro de consistencia (tasa del deslizamiento).
- $\frac{\partial f(\sigma,\alpha)}{\partial \sigma} = sign(\sigma)$ es el vector de flujo plástico.

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal



4. Regla de flujo y ley de endurecimiento isotrópico

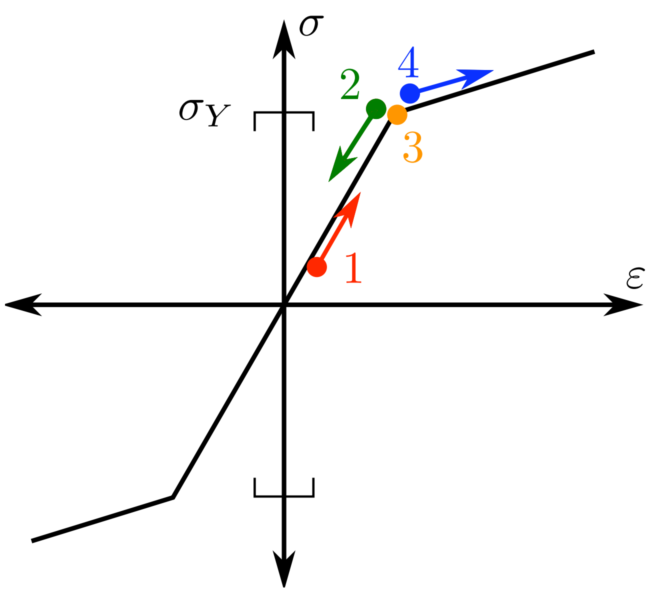
La variación de la variable interna tipo deformación α vale:

$$\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon^p}| = \gamma$$

siendo entonces su valor en un instante dado:

$$\alpha(t) = \int_0^t \dot{\alpha} \mathrm{d}t = \int_0^t |\dot{\varepsilon^p}| \mathrm{d}t$$

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal



5. Condiciones de carga-descarga

Los valores de σ y γ están restringidos por:

- las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma,\alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma,\alpha) = 0$$

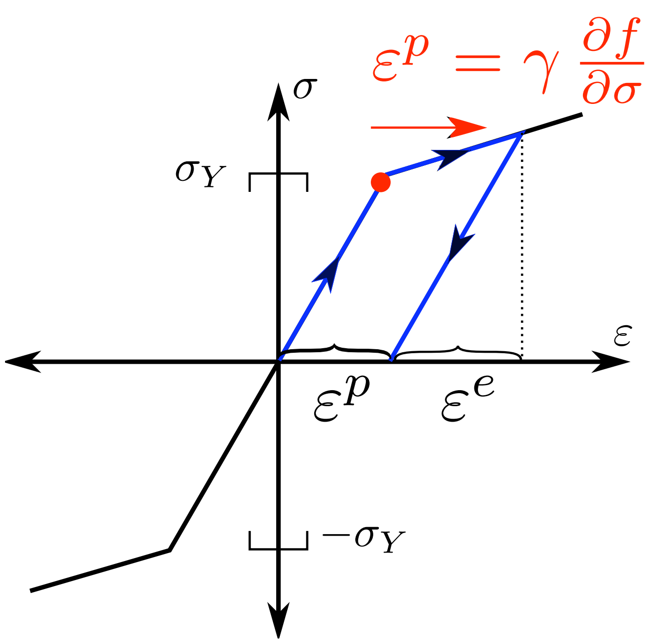
- la condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\sigma,\alpha) = 0$$

Podemos identificar las siguientes situaciones:

$$\begin{cases} f < 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{int}(\mathbb{E}_\sigma) \Rightarrow \gamma = 0 \text{ (elástico)(1)} \\ f = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} \in \partial\mathbb{E}_\sigma \begin{cases} \dot{f} < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \text{ (desc. elást.)(2)} \\ \dot{f} = 0 \text{ y } \gamma = 0 \text{ (carga neutra)(3)} \\ \dot{f} = 0 \text{ y } \gamma > 0 \text{ (carga plástica)(4)} \end{cases} \end{cases}$$

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal



6. Valor del parámetro de consistencia

Partimos de la condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\sigma,\alpha) = 0$$

siendo el valor de $\dot{f}$:

$$\begin{aligned} \dot{f}(\sigma,\alpha) &= \frac{\partial f}{\partial \sigma}\dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\dot{\alpha} \\ &= \mathrm{sign}(\sigma)E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) - K\dot{\alpha} \\ &= \mathrm{sign}(\sigma)E\dot{\varepsilon} - \gamma[E+K] \end{aligned}$$

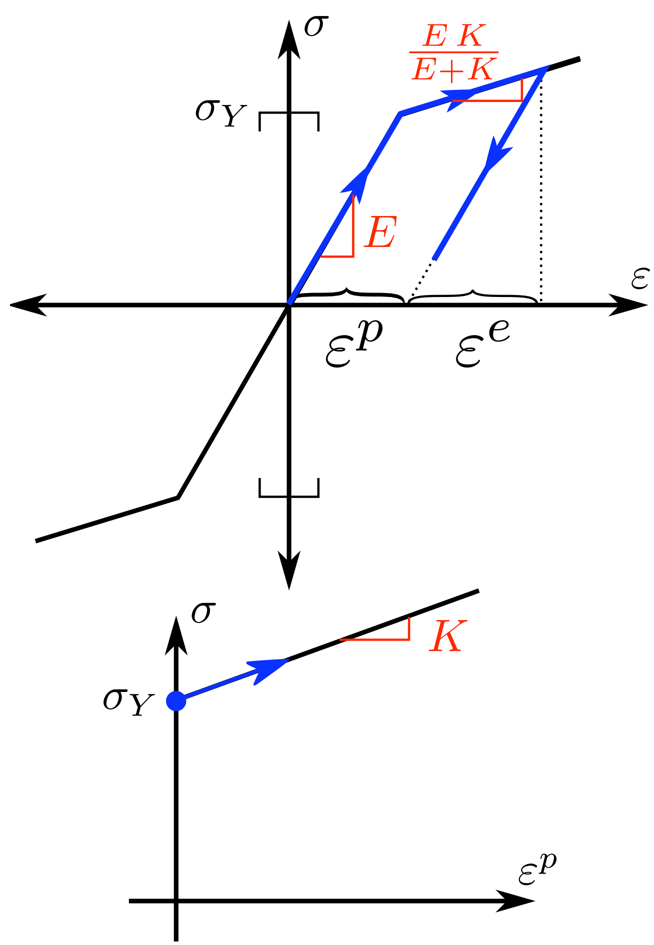
Imponiendo carga plástica obtenemos el valor de γ:

$$\dot{f}(\sigma,\alpha) = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\mathrm{sign}(\sigma)E\,\dot{\varepsilon}}{E+K}$$

lo que nos permite obtener el valor de $\dot{\varepsilon}^p$ como:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{E\,\dot{\varepsilon}}{E+K} \text{ para } f(\sigma,\alpha) = 0, \dot{f}(\sigma,\alpha) = 0$$

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal



7. Módulo tangente elastoplástico

Partimos de la relación entre la tasa de tensión y la de deformaciones:

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p)$$

y del valor de la tasa de deformación plástica:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \frac{E\,\dot{\varepsilon}}{E+K} \text{ para } f(\sigma,\alpha)=0, \dot{f}(\sigma,\alpha)=0 \\ \dot{\varepsilon}^p &= 0 \text{ para } f(\sigma,\alpha)<0 \end{aligned}$$

Substituyendo obtenemos la relación entre la tasa de tensiones y la tasa de deformaciones:

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E\,\dot{\varepsilon} & \text{si } \gamma = 0 \\ \frac{E\,K}{E+K}\dot{\varepsilon} & \text{si } \gamma > 0 \end{cases}$$

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal

Resumen plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal

1. Relación tensión-deformación:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

2. Regla de flujo y ley de endurecimiento isotrópico:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \gamma \operatorname{sign}(\sigma) \\ \dot{\alpha} &= \gamma \end{aligned}$$

3. Condición de fluencia:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_Y + K\alpha) \leq 0$$

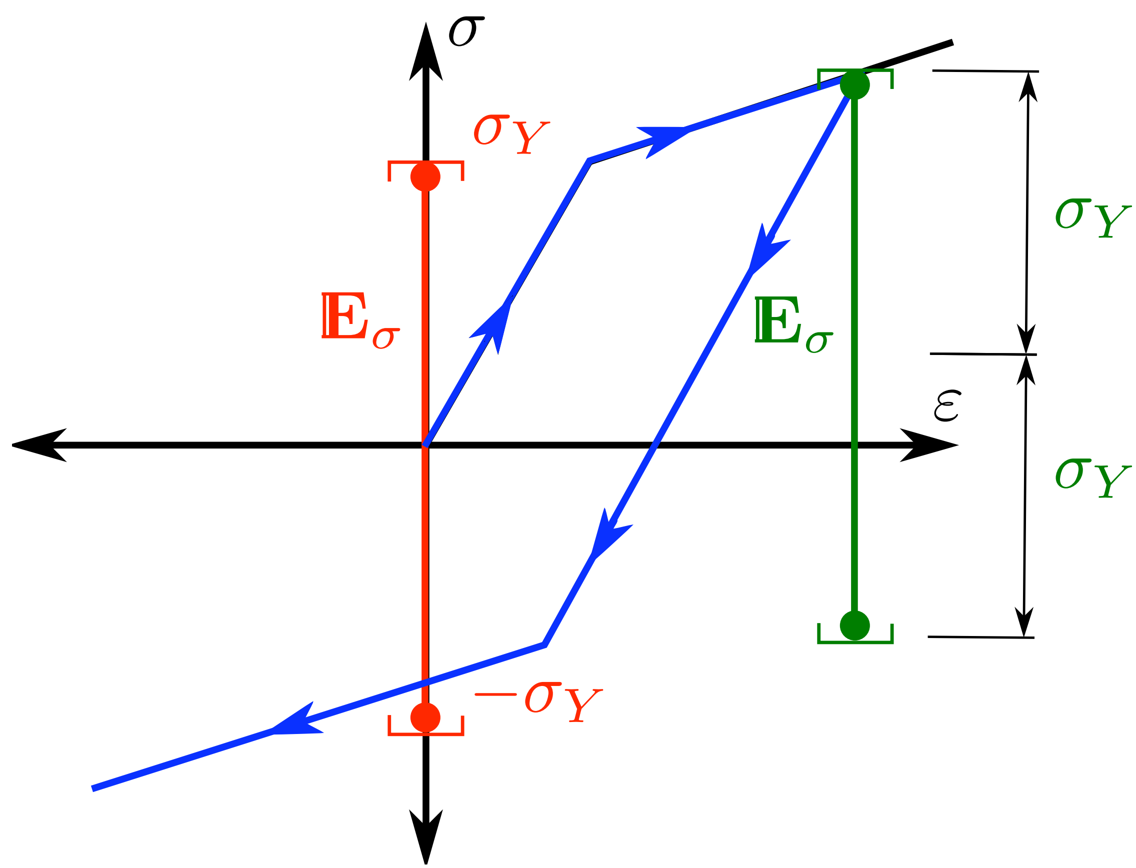
4. Condiciones de complementaridad de Kuhn-Tucker:

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, \alpha) = 0$$

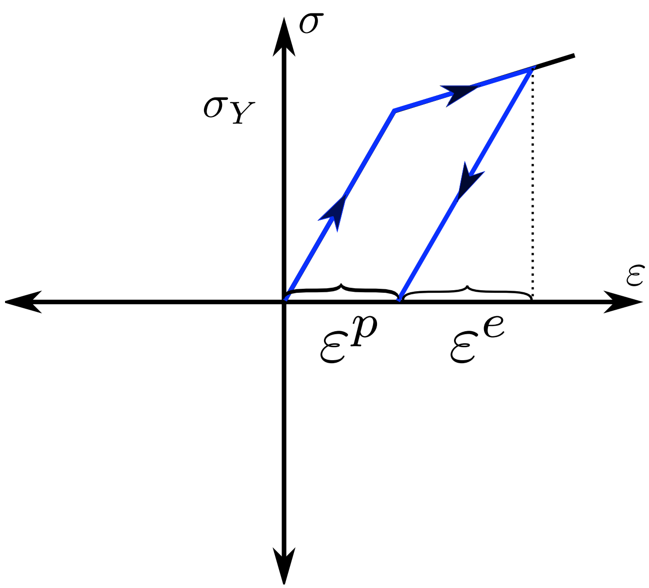
5. Condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0$$

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal y cinemático



Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal y cinemático



1. Descomposición aditiva de las deformaciones

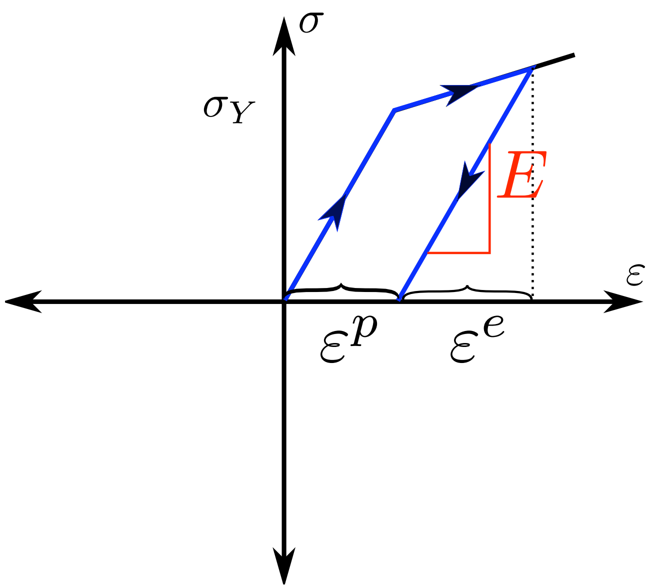
Las deformaciones totales se descomponen en:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

siendo:

- ε deformaciones totales.
- ε^e deformaciones elásticas recuperables.
- ε^p deformaciones inelásticas no recuperables.

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal y cinemático



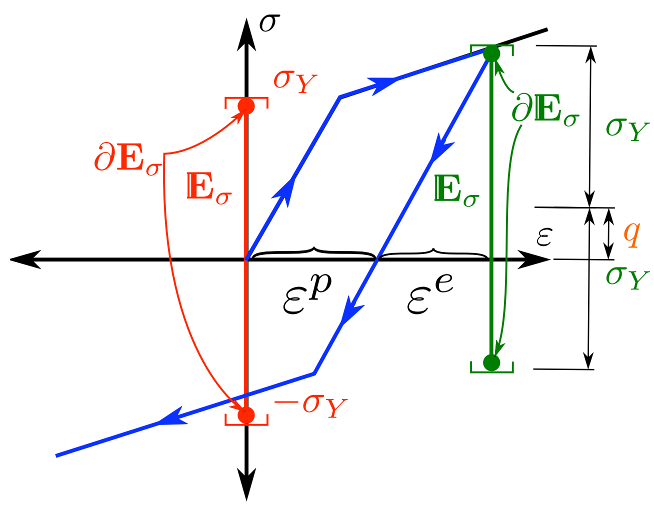
2. Ley constitutiva tensión-deformacion

La tensión vale:

$$\boldsymbol{\sigma} = E\,\varepsilon^e = E\,(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

siendo E el módulo de Young del material.

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal y cinemático



Endurecimiento cinemático

3. Dominio de las tensiones admisibles

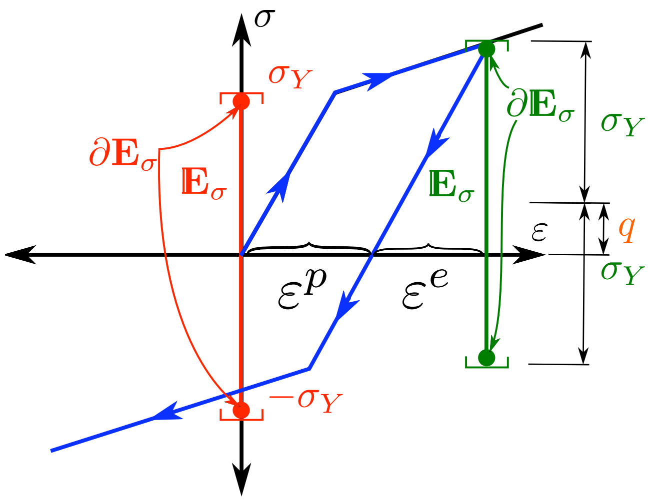
El conjunto de las tensiones admisibles es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\sigma &= \{(\sigma, q, \alpha) \in \mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R}_+ \mid \\ &\qquad f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - (\sigma_Y + K\alpha) \leq 0\}\end{aligned}$$

siendo $f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - (\sigma_Y + K\alpha)$ la función de fluencia y donde:

- σ_Y el el límite de fluencia del material en el estado inicial.
- K es el modulo de endurecimiento isotrópico.
- α es una variable interna tipo deformación no negativa que acumula las deformaciones plásticas históricas en valor absoluto.
- q es una variable interna tipo tensión que define la situación del centro de la superficie de fallo.

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal y cinemático



Endurecimiento cinemático

3. Dominio elástico y frontera del dominio elástico

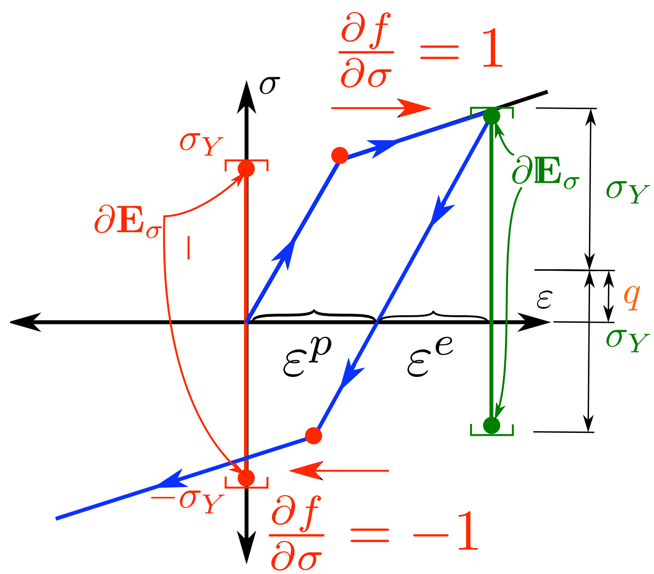
El dominio elástico es el conjunto de las tensiones que son menores al límite de fluencia:

$$\begin{aligned} \mathrm{int}(\mathbb{E}_\sigma) &= \{(\sigma, q, \alpha) \in \mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R}_+ | \\ &\qquad f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - (\sigma_Y + K\alpha) < 0\} \end{aligned}$$

La frontera del dominio elástico es el conjunto de las tensiones que son iguales al límite de fluencia:

$$\begin{aligned} \partial\mathbb{E}_\sigma &= \{(\sigma, q, \alpha) \in \mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R}_+ \, | \\ &\qquad f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - (\sigma_Y + K\alpha) = 0\} \end{aligned}$$

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal y cinemático



Endurecimiento cinemático

4. Regla de flujo y ley de endurecimiento isotrópico y cinemático

La variación de las deformaciones plásticas vale:

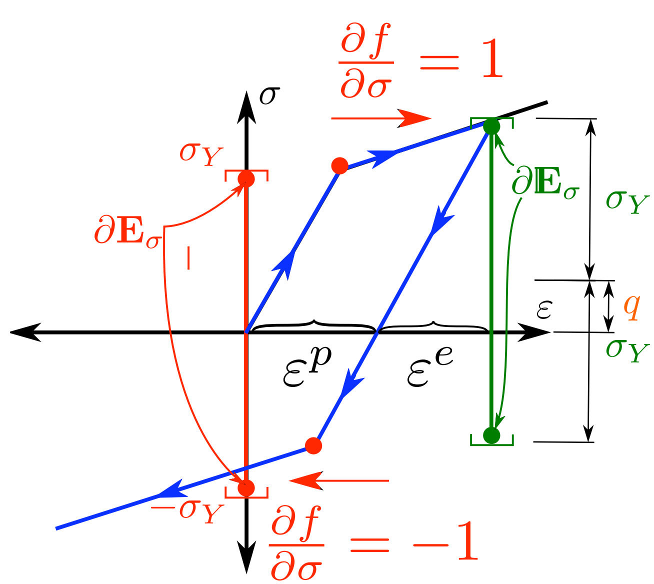
$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \text{ si } f(\sigma, q, \alpha) < 0$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f(\sigma, q, \alpha)}{\partial \sigma} \text{ si } f(\sigma, q, \alpha) = 0$$

siendo:

- $f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - (\sigma_Y + K\,\alpha)$ la función de fluencia.
- $\gamma \geq 0$ el parámetro de consistencia (tasa del deslizamiento).
- $\frac{\partial f(\sigma,q,\alpha)}{\partial \sigma} = sign(\sigma - q)$ es el vector de flujo plástico.

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal y cinemático



Endurecimiento cinemático

4. Regla de flujo y ley de endurecimiento isotrópico y cinemático

La variación de la variable interna α vale:

$$\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}^p| = \gamma$$

siendo entonces su valor en un instante dado:

$$\alpha(t) = \int_0^t \dot{\alpha} \mathrm{d}t = \int_0^t |\dot{\varepsilon}^p| \mathrm{d}t$$

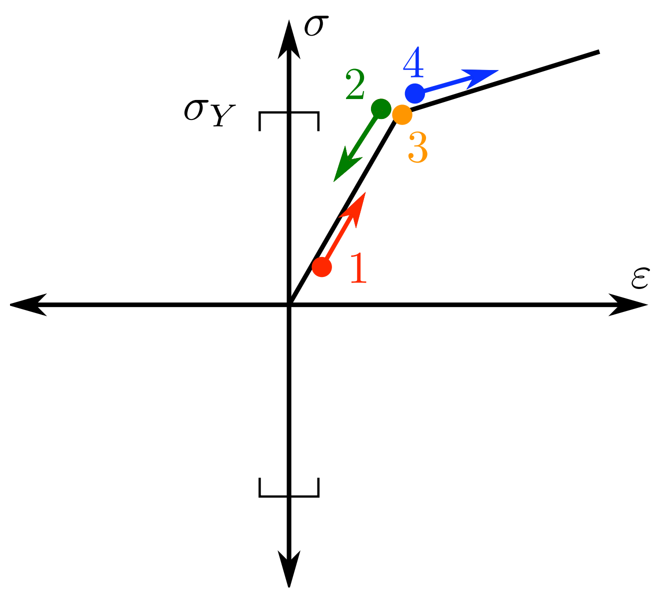
La variación de la variable interna q vale:

$$\dot{q} = H\dot{\varepsilon}^p = \gamma H \operatorname{sign}(\sigma - q)$$

siendo entonces su valor en un instante dado:

$$q(t) = \int_0^t \dot{q} \mathrm{d}t = \int_0^t H\dot{\varepsilon}^p \mathrm{d}t$$

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal y cinemático



5. Condiciones de carga-descarga

Los valores de σ y γ están restringidos por:

- las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, q, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, q, \alpha) = 0$$

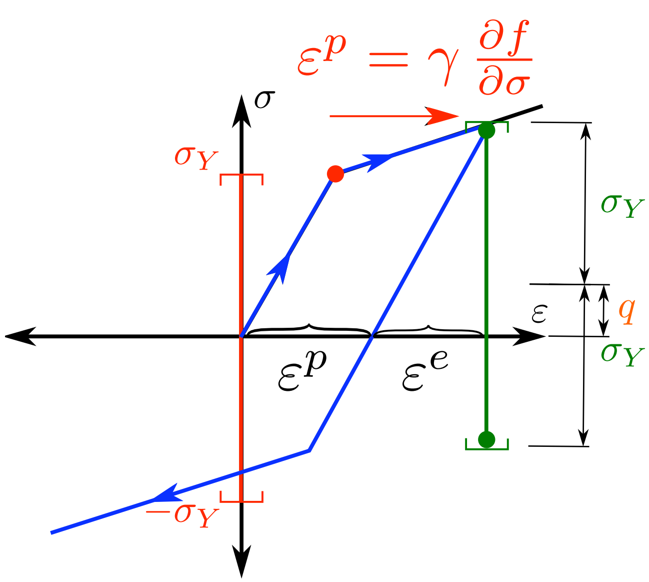
- la condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0$$

Podemos identificar las siguientes situaciones:

$$\begin{cases} f < 0 \Leftrightarrow \sigma \in \mathrm{int}(\mathbb{E}_\sigma) \Rightarrow \gamma = 0 \text{ (elástico)(1)} \\ f = 0 \Leftrightarrow \sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma \begin{cases} \dot{f} < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \text{ (desc. elást.)(2)} \\ \dot{f} = 0 \text{ y } \gamma = 0 \text{ (carga neutra)(3)} \\ \dot{f} = 0 \text{ y } \gamma > 0 \text{ (carga plástica)(4)} \end{cases} \end{cases}$$

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal y cinemático



Endurecimiento cinemático

6. Valor del parámetro de consistencia

Partimos de la condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\sigma, q, \sigma) = 0$$

siendo el valor de $\dot{f}$:

$$\begin{aligned} \dot{f}(\sigma, q, \alpha) &= \frac{\partial f}{\partial \sigma}\dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} \\ &= \text{sign}(\sigma - q)[E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) - \dot{q}] - K\dot{\alpha} \\ &= \text{sign}(\sigma)E\dot{\varepsilon} - \gamma[E + (H + K)] \end{aligned}$$

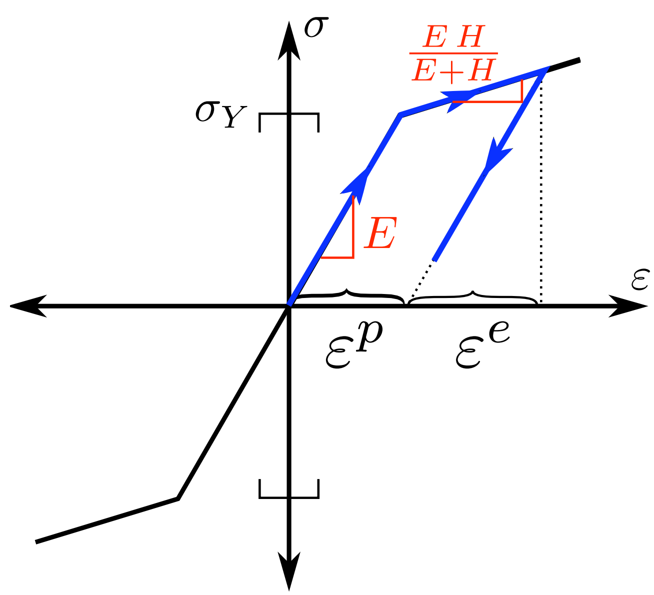
Imponiendo carga plástica obtenemos el valor de γ:

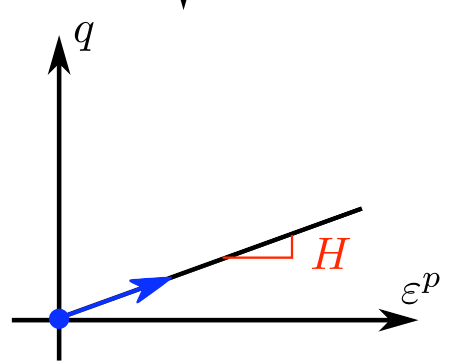
$$\dot{f}(\sigma, q, \alpha) = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\text{sign}(\sigma - q)E\,\dot{\varepsilon}}{E + (H + K)}$$

lo que nos permite obtener el valor de $\dot{\varepsilon}^p$ como:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{E\,\dot{\varepsilon}}{E + (H + K)} \text{ para } f(\sigma, q, \alpha) = 0, \dot{f}(\sigma, q, \alpha) = 0$$

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal y cinemático





Endurecimiento cinemático

7. Módulo tangente elastoplástico

Partimos de la relación entre la tasa de tensión y la de deformaciones:

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p)$$

y del valor de la tasa de deformación plástica:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{E\,\dot{\varepsilon}}{E+(H+K)} \quad \text{para } f(\sigma,q,\alpha)=0, \dot{f}(\sigma,q,\alpha)=0$$

$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \quad \text{para } f(\sigma,q,\alpha)<0$$

Substituyendo obtenemos la relación entre la tasa de tensiones y la tasa de deformaciones:

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E\,\dot{\varepsilon} & \text{si } \gamma = 0 \\ \frac{E\,(H+K)}{E+(H+K)}\,\dot{\varepsilon} & \text{si } \gamma > 0 \end{cases}$$

Plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal y cinemático

Resumen plasticidad con endurecimiento isotrópico lineal y cinemático

1. Relación tensión-deformación:
$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$
2. Regla de flujo y ley de endurecimiento isotrópico y cinemático:
$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \gamma \operatorname{sign}(\sigma - q) \\ \dot{\alpha} &= \gamma \\ \dot{q} &= \gamma H \operatorname{sign}(\sigma - q) \end{aligned}$$
3. Condición de fluencia:
$$f(\sigma, q, \alpha) = |\sigma - q| - (\sigma_Y + K\alpha) \leq 0$$
4. Condiciones de complementaridad de Kuhn-Tucker:
$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, q, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, q, \alpha) = 0$$
5. Condición de consistencia:
$$\gamma \dot{f}(\sigma, q, \alpha) = 0$$

Índice

Ingredientes plasticidad tridimensional general

1. Descomposición aditiva del tensor de deformaciones

El tensor de deformaciones se pude descomponer en una parte elástica y una parte plástica.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

Como las deformaciones totales $\boldsymbol{\varepsilon}$ son la variable independiente y las deformaciones plásticas $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ se definen a partir de la regla de flujo, la anterior ecuación define las deformaciones elásticas $\boldsymbol{\varepsilon}^e$.

Ingredientes plasticidad tridimensional general

2. Energía libre de Helmholtz

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\xi}) = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^p(\boldsymbol{\xi}) \text{ con } \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \end{cases}$$

donde:

- $\boldsymbol{\xi} = \{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_m\}$ son las variables internas tipo deformación.
- $\mathbb{C}^e = \bar{\lambda}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{I}$ es el módulo constitutivo elástico, con $\bar{\lambda}$ y μ los módulos de Lamé y **1** y **I** los tensores unitarios de orden dos y cuatro.

Ingredientes plasticidad tridimensional general

3. Ecuaciones constitutivas

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

$$\boldsymbol{\chi}_i = -\frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\xi}_i} \text{ con } i = 1, \ldots, m$$

donde:

- $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy.
- $\boldsymbol{\chi} = \{\boldsymbol{\chi}_1, \ldots, \boldsymbol{\chi}_m\}$ son las variables internas tipo tensión.

Ingredientes plasticidad tridimensional general

4a. Dominio de las tensiones admisibles.

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}} = \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \,|\, f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) \leq 0\}$$

donde:

- $\mathbb{S}$ es el conjunto de los tensores simétricos de segundo orden.
- $f : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de fluencia que se expresa como:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) = \widetilde{f}(\boldsymbol{\sigma}) - \widehat{f}(\sigma_Y, \boldsymbol{\chi})$$

siendo:

- $\widetilde{f}(\boldsymbol{\sigma})$ la tensión equivalente (o de comparación)
- $\widehat{f}(\sigma_y, \boldsymbol{\chi})$ la tensión límite de fluencia que incluye los efectos del endurecimiento, con σ_y la tensión límite de fluencia en el estado inicial.

4b. Dominio elástico y frontera del dominio elástico.

El dominio elástico es el conjunto de estados tensionales cuya tensión de comparación es menor al límite de fluencia.

$$\mathrm{int}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}}) = \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \,|\, f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) < 0\}$$

La frontera del dominio elástico es el conjunto de estados tensionales cuya tensión de comparación es igual al límite de fluencia.

$$\partial\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}} = \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \,|\, f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) = 0\}$$

La frontera del dominio elástico definie una superficie llamada superficie de fluencia.

Ingredientes plasticidad tridimensional general

5. Reglas de flujo asociado y leyes de endurecimiento

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}; \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = \gamma \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})}{\partial \boldsymbol{\chi}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = -\gamma \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})$$

donde:

- $\gamma \geq 0$ es el parámetro de consistencia.
- $\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ es la regla de flujo plástico en plasticidad asociada
- $\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi})$ es la función que define el tipo de endurecimiento.

Ingredientes plasticidad tridimensional general

6. Condiciones de carga/descarga de Kuhn-Tucker y condición de consistencia

Condiciones de carga/descarga de Kuhn-Tucker:

$$\gamma \geq 0,\ f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\chi}) \leq 0,\ \gamma f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\chi}) = 0$$

Condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\chi}) = 0$$

Podemos identificar las siguientes situaciones:

$$\begin{cases} f < 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{int}(\mathbb{E}_\sigma) \Rightarrow \gamma = 0 \text{ (elástico)} \\ f = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} \in \partial\mathbb{E}_\sigma \begin{cases} \dot{f} < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \text{ (desc. elást.)} \\ \dot{f} = 0 \text{ y } \gamma = 0 \text{ (carga neutra)} \\ \dot{f} = 0 \text{ y } \gamma > 0 \text{ (carga plástica)} \end{cases} \end{cases}$$

Ingredientes plasticidad tridimensional general

7. Valor del parametro de consistencia

Partimos de la condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) = 0$$

siendo el valor de $\dot{f}$:

$$\begin{aligned}
\dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}^e : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} \\
&= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}^e : \dot{\varepsilon} - \gamma \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{h} \right]
\end{aligned}$$

Imponiendo carga plástica obtenemos el valor de γ:

$$f = 0, \dot{f} = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}^e : \dot{\varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{h}}$$

Ingredientes plasticidad tridimensional general

8. Módulo tangente elastoplástico

Partimos de la relación entre la tasas de tensiones y de deformaciones:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^e : [\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p] = \mathbb{C}^e : \left[\dot{\varepsilon} - \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right]$$

Substituyendo el valor de γ obtenido anteriormente:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^e : \dot{\varepsilon} - \frac{\mathbb{C}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbb{C}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{h}} : \dot{\varepsilon}$$

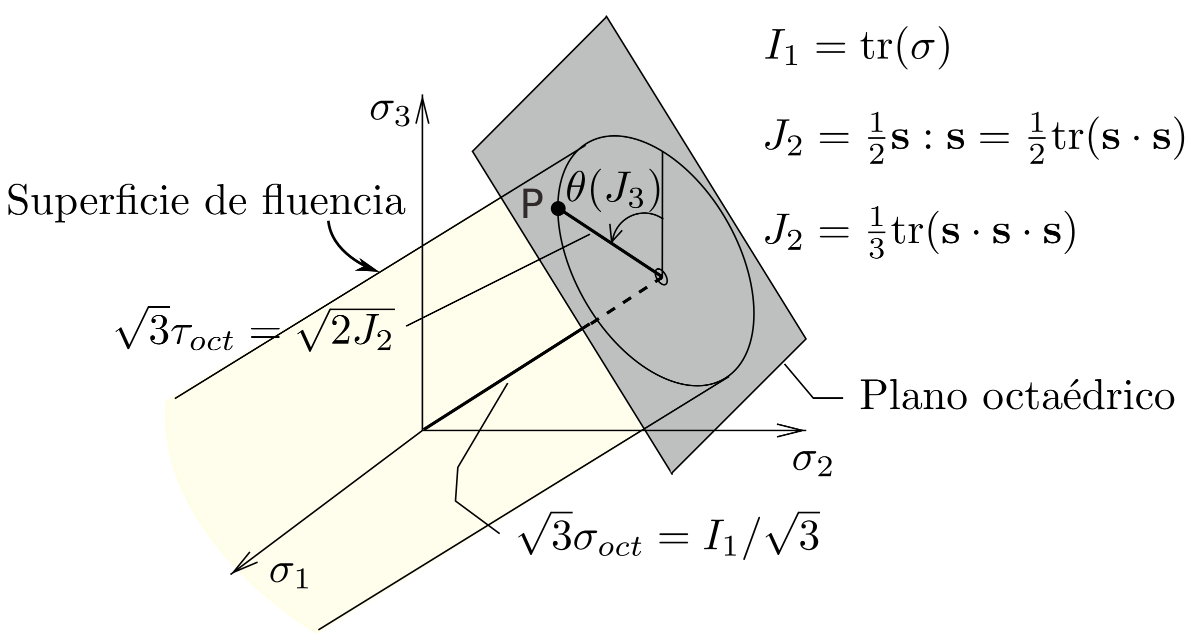
se obtiene el valor del módulo elastoplástico:

$$\mathbb{C}^{ep} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{C}^e & \text{si } \gamma = 0 \\ \mathbb{C}^e - \frac{\mathbb{C}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbb{C}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{h}} & \text{si } \gamma > 0 \end{array} \right\}$$

Índice

Modelo de plasticidad J2

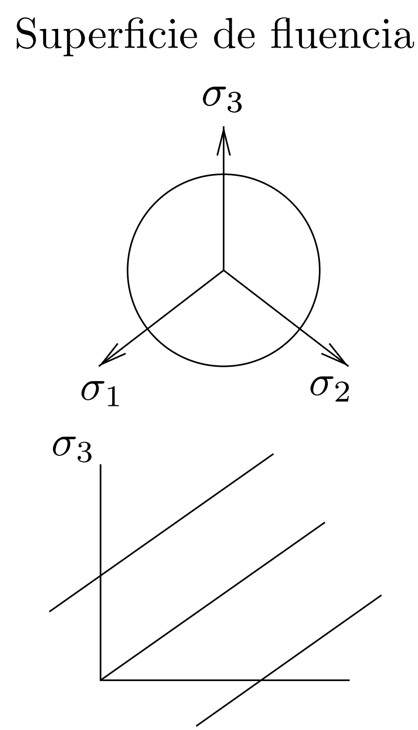
En el modelo de plasticidad asociada de Von Mises se utiliza una superficie de fluencia para la cual los estados de tensión hidrostáticos están siempre dentro del dominio elástico y el fallo es debido a los estados desviadores.



$$I_1 = \mathrm{tr}(\sigma)$$

$$J_2 = \tfrac{1}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})$$

$$J_2 = \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{s})$$



Ingredientes plasticidad J2

1. Descomposición aditiva del tensor de deformaciones

El tensor de deformaciones se pude descomponer en una parte elástica y una parte plástica.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

Como las deformaciones totales $\boldsymbol{\varepsilon}$ son la variable independiente y las deformaciones plásticas $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ se definen a partir de la regla de flujo, la anterior ecuación define las deformaciones elásticas $\boldsymbol{\varepsilon}^e$.

Ingredientes plasticidad J2

2. Energía libre de Helmholtz

$$\psi(\varepsilon, \xi) = \psi^e(\varepsilon^e) + \psi^p(\xi) \text{ con } \begin{cases} \varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p \\ \psi^e(\varepsilon) = \frac{1}{2}\, \varepsilon^e : \mathbb{C}^e : \varepsilon^e \end{cases}$$

donde ξ es la variables interna tipo deformación llamada *deformación plástica equivalente.*

Ingredientes plasticidad J2

3. Ecuaciones constitutivas

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbb{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

$$\chi = -\frac{\partial \psi^p}{\partial \xi}$$

donde:

- $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy.
- χ es la variable interna tipo tensión.
- $\mathbb{C}^e = \bar{\lambda}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu\mathbf{I}$ es el módulo constitutivo elástico

Ingredientes plasticidad J2

4a. Dominio de las tensiones admisibles.

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}} = \{(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} \,|\, f(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \leq 0\}$$

donde:

- $\mathbb{S}$ es el conjunto de los tensores simétricos de segundo orden.
- $f : \mathbb{S} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función de fluencia que se expresa como:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \chi) = \sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}} - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y - \chi)$$

siendo **s** la componente desviadora del tensor de tensiones.

Ingredientes plasticidad J2

4b. Dominio elástico y frontera del dominio elástico.

El dominio elástico es el conjunto de estados tensionales cuya tensión de comparación es menor al límite de fluencia.

$$\mathrm{int}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}}) = \{(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} \,|\, f(\boldsymbol{\sigma}, \chi) < 0\}$$

La frontera del dominio elástico es el conjunto de estados tensionales cuya tensión de comparación es igual al límite de fluencia.

$$\partial\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}} = \{(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} \,|\, f(\boldsymbol{\sigma}, \chi) = 0\}$$

La frontera del dominio elástico definie una superficie llamada superficie de fluencia.

Ingredientes plasticidad J2

5. Reglas de flujo asociado y leyes de endurecimiento

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \chi)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}$$

$$\dot{\xi} = \gamma \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \chi)}{\partial \chi} = \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma \quad \text{con } \xi|_{t=0} = 0$$

$$\dot{\chi} = \gamma \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \chi) = K(\chi(\xi))\dot{\xi}$$

donde:

- $\gamma \geq 0$ es el parámetro de consistencia.
- $\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma},\chi)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ es la regla de flujo plástico en plasticidad asociada
- $K(\chi(\xi))$ es el módulo de endurecimiento isótropo (para K constante estamos ante el caso lineal).

Ingredientes plasticidad J2

6. Condiciones de carga/descarga de Kuhn-Tucker y condición de consistencia

Condiciones de carga/descarga de Kuhn-Tucker:

$$\gamma \geq 0,\ f(\boldsymbol{\sigma},\chi) \leq 0,\ \gamma f(\boldsymbol{\sigma},\chi) = 0$$

Condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma},\chi) = 0$$

Podemos identificar las siguientes situaciones:

$$\begin{cases} f < 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{int}(\mathbb{E}_\sigma) \Rightarrow \gamma = 0 \text{ (elástico)} \\ f = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} \in \partial\mathbb{E}_\sigma \begin{cases} \dot{f} < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \text{ (desc. elást.)} \\ \dot{f} = 0 \text{ y } \gamma = 0 \text{ (carga neutra)} \\ \dot{f} = 0 \text{ y } \gamma > 0 \text{ (carga plástica)} \end{cases} \end{cases}$$

Ingredientes plasticidad J2

7. Valor del parametro de consistencia

Partimos de la condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \chi) = 0$$

siendo el valor de $\dot{f}$:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \cdot \dot{\chi} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} : \mathbb{C}^e : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) + \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\chi} \\ &= \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} : \mathbb{C}^e : \dot{\varepsilon} - \gamma \left[\frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} : \mathbb{C}^e : \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} + \frac{2}{3} K \right] \end{aligned}$$

Imponiendo carga plástica obtenemos el valor de γ:

$$f = 0, \dot{f} = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{\frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} : \mathbb{C}^e : \dot{\varepsilon}}{\frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} : \mathbb{C}^e : \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} + \frac{2}{3} K}$$

Ingredientes plasticidad J2

8. Módulo tangente elastoplástico

Partimos de la relación entre la tasas de tensiones y de deformaciones:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^e : [\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p] = \mathbb{C}^e : \left[\dot{\varepsilon} - \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right]$$

Substituyendo el valor de γ obtenido anteriormente:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^e : \dot{\varepsilon} - \frac{\mathbb{C}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbb{C}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C}^e : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{h}} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

se obtiene el valor del módulo elastoplástico:

$$\mathbb{C}^{ep} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{C}^e & \text{si } \gamma = 0 \\ \mathbb{C}^e - \frac{\mathbb{C}^e : \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \otimes \mathbb{C}^e : \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}}{\frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} : \mathbb{C}^e : \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} + \frac{2}{3}K} & \text{si } \gamma > 0 \end{array} \right\}$$

Bibliografía

- *Computational inelasticity*. J.C. Simo, T.J.R. Hughes. Springler, 1991
- *Inelastic analysis of solids and structures*. M. Kokic, K.J. Bathe. Springler, 2005.
- *Nonlinear Finite Element Methods*. Peter Wriggers. Springler, 2008.
- *Non linear finite element analysis of solids and structures. Volume 1*. M.A. Crisfield. Wiley, 1991.