Mecánica de medios continuos – 15904
Ecuaciones de Balance y Leyes constitutivas

Dr Ing. Claudio García Herrera

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica
`claudio.garcia@usach.cl`

Santiago de Chile, 8 de Noviembre de 2010

Índice

1 Ecuaciones de balance

2 Ecuaciones constitutivas

Derivada material

- La *derivada material* de una magnitud $\omega(\mathbf{x}, t) = \Omega(\mathbf{X}, t)$, sea ésta escalar, vector o tensor, se define como:

$$\dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right|_{X},$$

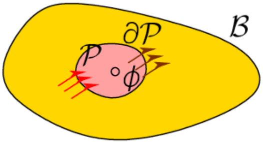
(se mide la derivada siguiendo la partícula, $\mathbf{X}$).

- Si se parte de una descripción Euleriana $\omega(\mathbf{x}, t)$, empleando la regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{x}} \cdot \underbrace{\left.\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right|_{X}}_{\mathbf{v}=\dot{\mathbf{x}}} + \left.\frac{\partial \omega}{\partial t}\right|_{x}; \qquad \dot{\omega} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\omega \cdot \mathbf{v} + \omega_{,t}$$

- $\omega_{,t} \stackrel{\text{def}}{=} \partial\omega/\partial t$: *velocidad espacial* o *Euleriana*
- $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\omega \cdot \mathbf{v}$: término convectivo

Teorema del transporte de Reynolds (1)



Establece la derivada material de una medida global de la cantidad de una magnitud ϕ en un subdominio cualquiera $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ (región material):

$$\boxed{\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{P}} \phi \, dV}_{\text{(a)}} = \underbrace{\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dV}_{\text{(b)}} + \underbrace{\int_{\partial\mathcal{P}} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\text{(c)}}}$$

donde:

(a) Variación de ϕ poseída por el material que está en cada instante dentro de región material $\mathcal{P}$ (derivada material)

(b) $\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{P}} \phi \, dV$, Variación de ϕ dentro de región de control $\mathcal{P}$

(c) Flujo neto (saliente) de ϕ a través de la frontera $\partial\mathcal{P}$

Teorema del transporte de Reynolds (2)

- Empleando el teorema de la divergencia:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{P}} \phi \, dV = \int_{\mathcal{P}} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_p} v_p + \phi \frac{\partial v_p}{\partial x_p} \right] dV$$

y empleando la definición de derivada material de ϕ,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{P}} \phi \, dV = \int_{\mathcal{P}} \left[\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \phi \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \right] dV$$

Conservación de la masa

Sea $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}^0$ un recinto *material*, formado por un conjunto dado de partículas. La masa $M(\mathcal{P})$ de este recinto se conserva:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M(\mathcal{P}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{P}} \rho \, \mathrm{d}V = 0$$

Aplicando el th. de transporte de Reynolds (24) con $\phi = \rho$:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\rho} + \rho \frac{\dot{J}}{J} = 0$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = J = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}V^0}$$

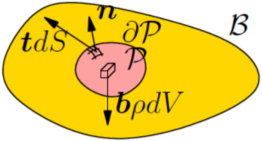
y si el flujo es incompresible,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \text{cte.}$$

Lema de Reynolds: $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{P}} \rho\phi \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{P}} \rho\dot{\phi} \, \mathrm{d}V$$

Cantidad de movimiento (1)

Se define como $\mathbf{P}(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{v}\, \mathrm{d}V$. El principio de balance establece que



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{P}(\mathcal{P}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{v}\, \mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t}\, \mathrm{d}S + \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{b}\, \mathrm{d}V$$

Aplicando el lema de Reynolds (27) y el th. de Gauss se obtiene:

$$\int_{\mathcal{P}} \left[\sigma_{pi,p} + \rho b_i - \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\right] \mathrm{d}V = 0,$$

es decir,

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}; \qquad \sigma_{pi,p} + \rho b_i = \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}$$

(ecuaciones de Cauchy)

Cantidad de movimiento (2)

- Se pueden obtener también las ecuaciones realizando la integración en el dominio de la configuración original, $\mathcal{P}^0$. Empleando el tensor de Piola:

$$P_{iJ,J} + \rho_0 b_{0i} = \rho_0 \frac{dv_i}{dt} \tag{29}$$

- En función del tensor de PK2:

$$\frac{\partial}{\partial X_P}\left(S_{KP}\frac{\partial x_i}{\partial X_K}\right) + \rho_0 b_{0i} = \rho_0 \frac{dv_i}{dt} \tag{30}$$

Momento cinético

Se define el momento cinético de $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ como

$$\mathbf{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) \rho \, dV$$

El principio de balance enuncia:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) \rho \, dV = \int_{\partial \mathcal{P}} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{t}) \, dS + \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{b}) \, dV$$

Operando adecuadamente conduce a:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}; \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{31}$$

Es decir, el tensor de tensiones de Cauchy es *simétrico*. Esta propiedad la heredan todos los tensores que procedan de él mediante transformaciones simétricas: $\boldsymbol{\tau}$ (Kirchhoff), $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ (Cauchy corrotacional), $\mathbf{S}^{(2)}$ (2.º de Piola-Kirchhoff).

Ecuaciones constitutivas: Principios generales

1. Principio de determinismo: la respuesta del material depende exclusivamente de las configuraciones previas al instante t:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{F}\left(\phi^{(t)}(\mathbf{X})\right)$$

2. Principio de acción local: la respuesta depende únicamente del movimiento en un cierto entorno de X. En los *materiales simples* esta dependencia se definen mediante la primera derivada de la deformación $\mathbf{F} = \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{G}\left(\mathbf{F}^{(t)}(\mathbf{X})\right)$$

Principios generales (cont)

3. Principio de objetividad: La respuesta no depende de cambios en el sistema de referencia (traslaciones en el espacio o en el tiempo o *rotaciones rígidas*).
4. Principio de invarianza material: La respuesta no varía para transformaciones correspondientes a las simetrías propias del material.

Material elástico

- Sólo depende de la deformación respecto de la configuración de referencia, de la cual manifiesta una memoria perfecta, retornando a ella cuando se descarga:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{g}\left(\mathbf{F}(\mathbf{X})\right)$$

- Objetividad: impone restricciones a la forma y dependencia de la función $\mathfrak{g}(\mathbf{F})$

Objetividad (1)

Traslación y rotación del sistema de referencia:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{c} + \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)\,, \quad \text{siendo } \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}$$

Esta transformación sólo afecta a la configuración actual, no a la configuración de referencia que ya quedó definida mediante las coordenadas lagrangianas $\mathbf{X}$

- Vectores definidos en la configuración actual B: $\mathrm{d}\mathbf{x}' = \mathbf{Q} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$
- Tensor de 2.º orden $\mathbf{a}$, definido en B: $\mathbf{a}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$
- Tensor material 2.º orden $\mathbf{A}$ (en B_0): no se ve alterado.
- Gradiente de deformación: (sólo se transforma una pata)

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}' = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}$$

Objetividad (2)

- El tensor de tensiones de cauchy es un tensor espacial (en B) y por tanto objetivo:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$$

- El tensor de Almansi-Euler es igualmente un tensor espacial objetivo:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$$

Objetividad (3)

- La objetividad de $\boldsymbol{\sigma}$ exige:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathfrak{g}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{Q} \cdot \underbrace{\mathfrak{g}(\mathbf{F})}_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$$

- Considerando el caso particular $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}$, y teniendo en cuenta la descomposición polar $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \mathbf{U}$:

$$\mathfrak{g}(\mathbf{U}) = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathfrak{g}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathfrak{g}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \mathbf{R} \cdot \mathfrak{g}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}}}$$

- $\mathfrak{g}(\mathbf{U})$ define la respuesta intrínseca del material, que debe ser rotada mediante $\mathbf{R}$.

Objetividad (4)

- Los tensor de Cauchy-Green (dcha.) y de Green-Lagrange son tensores materiales, invariantes frente a rotaciones:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$$
$$\mathbf{C}' = \mathbf{F}'^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}' = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{C}$$
$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}$$

- Por tanto, la respuesta intrínseca del material puede formularse también en función de **C** ó de **E**:

$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R} = \mathfrak{g}(\mathbf{U}) = \mathfrak{h}(\mathbf{C}) = \mathfrak{j}(\mathbf{E})$$

Objetividad (4)

- Tensor de tensiones 2.º de Piola-Kirchhoff

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}$$

- La ecuación constitutiva se expresa para $\mathbf{S}$ como:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= J(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U})^{-1} \cdot \left(\mathbf{R} \cdot \mathfrak{g}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\right) \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U})^{-\mathrm{T}} \\ &= J\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathfrak{g}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}^{-1} \\ &= \mathfrak{H}(\mathbf{U})\end{aligned}$$

- O alternativamente, en función de otros tensores materiales de deformación:

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathfrak{H}(\mathbf{U}) = \mathfrak{I}(\mathbf{C}) = \mathfrak{L}(\mathbf{E})}$$

Mecánica de medios continuos – 15904

Ecuaciones de Balance y Leyes constitutivas

Dr Ing. Claudio García Herrera

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica
claudio.garcia@usach.cl

Santiago de Chile, 8 de Noviembre de 2010