Mecánica de medios continuos – 15904
Esfuerzo

Dr Ing. Claudio García Herrera

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica
claudio.garcia@usach.cl

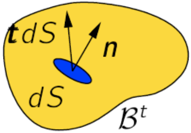
Santiago de Chile, 25 de Octubre de 2010

Índice

Tensor de tensiones de Cauchy (1)

Fuerzas en medio continuo

- $\mathbf{n}\,dS$: elemento de superficie orientada
- $\mathbf{t}\,dS$: acción del medio de un lado sobre otro
  $\mathbf{t}$: *vector tracción* (F. / Ud. área)



Postulados de Cauchy:

1. $\mathbf{t}(\mathbf{n})$: en cada punto $\mathbf{x}$, es función continua de $\mathbf{n}$;
   En general tiene componentes normal y tangencial;
2. Acción–reacción: $\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n})$.

Teorema de Cauchy:

La dependencia de $\mathbf{n}$ es lineal ($\Leftrightarrow$ tensor de orden 2, $\boldsymbol{\sigma}$):

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{n}; \quad t_i = \sigma_{pi} n_p$$

Tensor de tensiones de Cauchy (2)

Observaciones

- $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) debido al principio del momento cinético (admitiendo que no existen momentos micropolares internos).
- $\boldsymbol{\sigma}$ son las tensiones reales (inglés: *true stress*).
- $\boldsymbol{\sigma}$ es una medida conjugada de la velocidad de deformación: su producto es la *potencia tensional específica* (tasa temporal de trabajo de deformación por unidad de volumen, en la configuración deformada):

$$\dot{W} = \frac{dW}{dt} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{:} \mathbf{d} = \sigma_{pq} d_{pq} = \sigma_{pq} \dot{\varepsilon}_{pq}$$
$$\delta W = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{:} \delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

Tensor de tensiones de Kirchhoff

Se define a partir del de Cauchy como:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma},}$$

siendo $J = \det(\mathbf{F}) = \mathrm{d}V/\mathrm{d}V^0$.

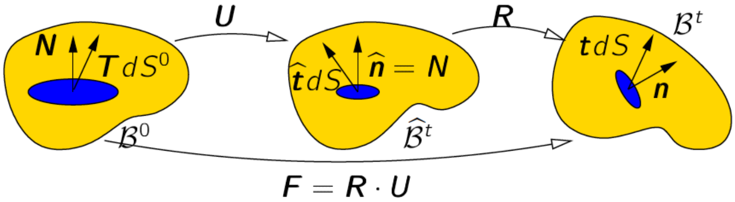
Observaciones:

- No se trata de una medida de tensiones real, sino que es ficticia
- conserva la simetría de $\boldsymbol{\sigma}$
- permite obtener la potencia tensional o trabajo de deformación por unidad de volumen en la configuración original ($\mathrm{d}V^0$):

$$\dot{W}^0 = \boldsymbol{\tau}:\mathbf{d}; \quad \delta W^0 = \boldsymbol{\tau}:\delta\boldsymbol{\varepsilon} \ .$$

Configuración no rotada (1)

Transformada de un elemento de área (dS^0) y del vector tensión ($\mathbf{t}$):



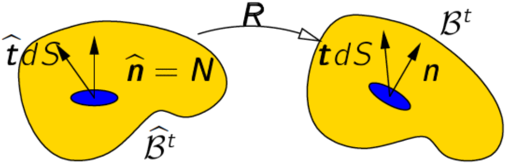
$\mathcal{B}^0$: configuración original

$\widehat{\mathcal{B}}^t$: configuración no rotada (deformada con $\mathbf{U}$)

$\mathcal{B}^t$: configuración actual (deformada con $\mathbf{U}$ y rotada con $\mathbf{R}$)

- $\mathbf{N}$, $\mathbf{n}$: vectores unitarios; $\widehat{\mathbf{n}} = \mathbf{N} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{n}$;

Tensión de Cauchy corrotacional (1)



Se define en $\widehat{\mathcal{B}}$ ($\mathbf{t} = \mathbf{R}\cdot\widehat{\mathbf{t}}$, $\mathbf{n} = \mathbf{R}\cdot\widehat{\mathbf{n}}$):

$$\widehat{\mathbf{t}} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\widehat{\mathbf{n}}$$

resulta

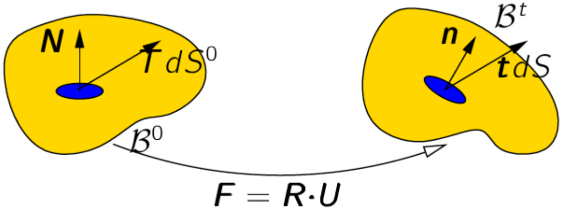
$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{R})}$$

Tensión de Cauchy corrotacional (2)

Observaciones:

- Si se emplean *elementos de continuo*, sin g.d.l. de rotación (cuadriláteros, cubos, ...) $\mathbf{R}$ no se obtiene directamente en el código numérico, sino que hay que resolver la descomposición polar de $\mathbf{F}$ para calcularla.
- Si se emplean *Elementos estructurales*, con g.d.l. de rotación (vigas, láminas), las medidas de tensión suelen referirse implícitamente a la configuración corrotacional, no siendo necesario calcular $\mathbf{R}$
- La rotación $\mathbf{R}$ no produce trabajo de las fuerzas interiores, por lo que $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ conserva la propiedad de la tensión de Cauchy de conjugación respecto de $\mathbf{d} = \dot{\varepsilon}$: $\dot{W} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{:}\mathbf{d}$.

Tensor de tensiones de Piola (1)



◇ Vector tensión en $\mathcal{B}^0$ (definición convencional):

$$\mathbf{T}\,\mathrm{d}S^0 = \mathbf{t}\,\mathrm{d}S.$$

◇ Se Define el tensor de tensiones de Piola $\mathbf{P}$ (también llamado 1.º de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{S}^{(1)}$) como aquel que relaciona $\mathbf{N}$ y $\mathbf{T}$ de forma que:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{N}$$

Tensor de tensiones de Piola (2)

◇ Transformación de elemento de área orientada:

$$\mathbf{N}dS^0 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} dudv;$$
$$\mathbf{n}dS = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} dudv$$
$$= \left(\mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}\right) \wedge \left(\mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}\right) dudv$$
$$= J\,\mathbf{F}^{-\mathsf{T}} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}\right) dudv;$$

◇ es decir (fórmula de Nanson),

$$\mathbf{n}dS = J\mathbf{F}^{-\mathsf{T}}\cdot\mathbf{N}dS^0$$

Tensor de tensiones de Piola (3)

- Empleando la definición convencional de vector tensión en la configuración original, así como la transformación de Piola, se obtiene la expresión en relación con el tensor de Cauchy:

$$\boxed{\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{F}^{-\mathsf{T}}; \qquad P_{iK} = J\sigma_{ip}\frac{\partial X_K}{\partial x_p}}$$

- Algunos autores emplean el denominado *tensor de tensiones nominal*, que es el traspuesto que el de Piola.

$$\mathbf{S}^{(N)} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}} = J\mathbf{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}; \quad \mathbf{T} = \mathbf{S}^{(N)\mathsf{T}}\cdot\mathbf{N}$$

Tensor de tensiones de Piola (4)

Observaciones:

- **P** es un tensor bipunto, con un índice en la configuración original y otro en la deformada
- **P** no es simétrico (puede ser inconveniente para formulaciones numéricas)
- medida de tensión conjugada del gradiente de deformación, en la configuración de referencia:

$$\dot{W}^0 = \mathbf{P}{:}\dot{\mathbf{F}}\ ;$$
$$\delta W^0 = \mathbf{P}{:}\delta\mathbf{F}$$

Tensor de tensiones 2º de Piola Kirchhoff (1)

♠ Simetrizamos el tensor $\mathbf{P}$, para obtener $\mathbf{S}^{(2)}$:

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(2)} = \mathbf{F}^{-1}{\cdot}\mathbf{P} = \mathbf{S}^{(N)}{\cdot}\mathbf{F}^{-T} = J\mathbf{F}^{-1}{\cdot}(\boldsymbol{\sigma}{\cdot}\mathbf{F}^{-T});}$$

$$S_{IJ} = S_{IJ}^{(2)} = JX_{I,p}\sigma_{pq}X_{J,q}$$

Observaciones:

- $S_{IJ}^{(2)}$ tiene los dos índices en la configuración original
- Es simétrico, $S_{IJ} = S_{JI}$.
- Conjugado de la deformación de Green-Lagrange:

$$\dot{W}^0 = \mathbf{S}{:}\dot{\mathbf{E}}; \quad \delta W^0 = \mathbf{S}{:}\delta\mathbf{E} = S_{PQ}\delta E_{PQ}$$

- Se trata de una entelequia sin significado físico directo, aunque resulta útil para describir el movimiento sobre la configuración original.

Resumen de medidas de tensión

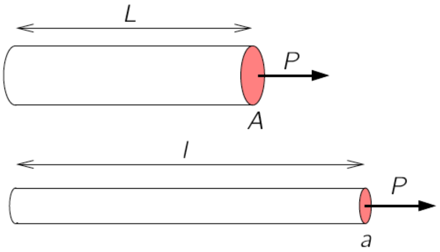
Resumen de tensiones

Cauchy	$\boxed{\boldsymbol{\sigma}}$
Cauchy corrotacional	$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^{\mathsf{T}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R})}$
Kirchhoff	$\boxed{\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}}$
Piola	$\boxed{\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\mathsf{T}}}$
Nominal	$\boxed{\mathbf{S}^{(N)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}}$
Piola-Kirchhoff (2.º)	$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\mathsf{T}})}$

Aplicación al caso unidimensional

$$J = \frac{V}{V_0} = \frac{al}{AL}$$

$$F = \frac{l}{L}$$



- Cauchy: $\sigma = \dfrac{P}{a}$
- Kirchhoff: $\tau = \sigma \dfrac{al}{AL} = \dfrac{P}{A}\dfrac{l}{L}$
- Piola / Nominal: $S^{(1)} = \dfrac{P}{a}\dfrac{al}{AL}\dfrac{L}{l} = \dfrac{P}{A}$
- 2.º Piola-Kirchhoff: $S = S^{(2)} = \dfrac{P}{A}\dfrac{L}{l}$

Mecánica de medios continuos – 15904
Esfuerzo

Dr Ing. Claudio García Herrera

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica
claudio.garcia@usach.cl

Santiago de Chile, 25 de Octubre de 2010