

Mecánica de medios continuos – 15904

Cinemática: Deformación

Dr Ing. Claudio García Herrera

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica
claudio.garcia@usach.cl

Santiago de Chile, 27 de Septiembre de 2010

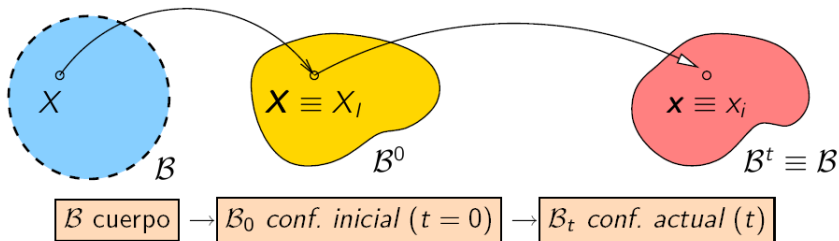


Índice

1 Cinemática

- Movimiento y deformación

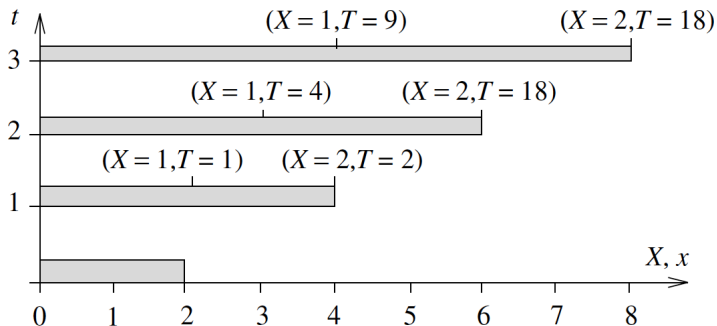
Cinemática: Movimiento de un cuerpo



- Partículas: $X \in \mathcal{B}$
- $\mathbf{X} \equiv X_I$: coordenadas Lagrangianas o materiales (definen partícula o punto material)
- Movimiento: $\phi_t : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_t$; $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X})$; $\mathbf{X} = \phi_t^{-1}(\mathbf{x})$.
- $\mathbf{x} \equiv x_i$: coordenadas Eulerianas o espaciales (definen posición o punto espacial)
- Desplazamientos: $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{1}^T \cdot \mathbf{X}$; $u_i = x_i - \delta_{pi} X_p$

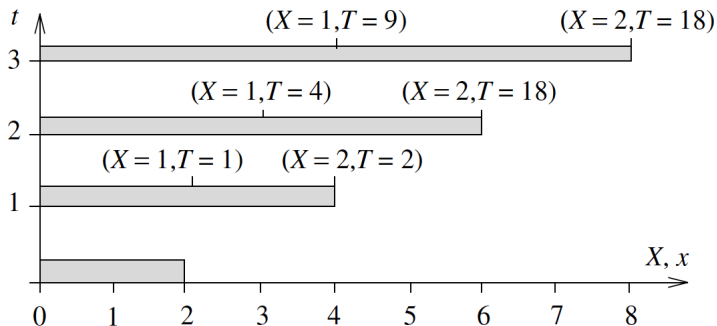
Ejemplo: movimiento uniaxial

- Considerar la deformación ("mapping") $x = (1 + t)X$ que define el movimiento de una barra de largo 2 unidades. La barra tiene una temperatura que viene dada en la descripción material $T(X) = Xt^2$ o en la descripción espacial $T(x) = xt^2/(1 + t)$, ver figura:



Ejemplo: movimiento uniaxial

- Considerar la deformación ("mapping") $x = (1 + t)X$ que define el movimiento de una barra de largo 2 unidades. La barra tiene una temperatura que viene dada en la descripción material $T(X) = Xt^2$ o en la descripción espacial $T(x) = xt^2/(1 + t)$, ver figura:



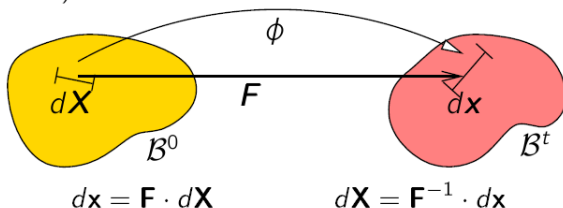
Cinemática: Gradiente de deformación (1)

- Definición:

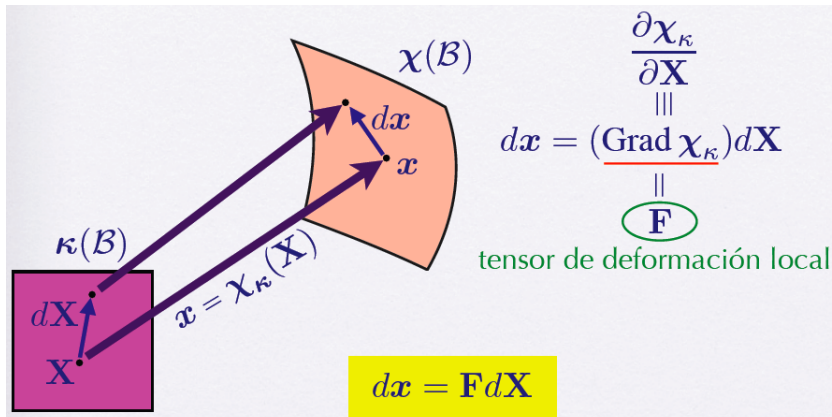
$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \phi(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}; \quad F_{iJ} = x_{i,J} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \phi^{-1}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}; \quad F_{Ij}^{-1} = X_{I,j} = \frac{\partial X_I}{\partial x_j}$$

- Interpretación: transformación (lineal) de un vector tangente $d\mathbf{X}$ (elemento de arco): $d\mathbf{X} \mapsto d\mathbf{x}$



Cinemática: Gradiente de deformación (2)



TODA la información sobre la deformación en el entorno de un punto está contenida en \mathbf{F}

Deformación longitudinal, Tensor de Cauchy Green por la derecha \mathbf{C}

$dx = \mathbf{F}d\mathbf{X}$

$\kappa(\mathcal{B}) \quad \mathbf{E} \quad (|\mathbf{E}| = 1)$

\mathbf{F}

$\chi(\mathcal{B})$

$(dl)^2 = dx \cdot dx$

$(dl)^2 = \mathbf{F}d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X}$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}b = \mathbf{T}^T \mathbf{a} \cdot b$

$(dl)^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{C}d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$

\mathbf{C} tensor de Cauchy-Green por la derecha

$(dL)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$

relación de extensión: $\lambda := \frac{dl}{dL} = \sqrt{\frac{\mathbf{C}d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}} = \sqrt{\mathbf{C}\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}$

propiedades de \mathbf{C} : (1) simétrico; (2) definido positivo.

Deformación angular

$dx = \mathbf{F}d\mathbf{X}$

$\cos \theta = \frac{d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2}{|d\mathbf{x}_1||d\mathbf{x}_2|}$

$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X}_2$

$= \mathbf{C}d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2$

...

$\cos \Theta = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$

$\cos \theta = \frac{\mathbf{C}\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2}{\sqrt{(\mathbf{C}\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1)(\mathbf{C}\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2)}}$

la información sobre cambio de forma está contenida en \mathbf{C}

Deformación volumétrica (volúmica)

$dV_{\chi} = (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3$
 $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$
 $dV_{\chi} = (\mathbf{F}d\mathbf{X}_1 \times \mathbf{F}d\mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X}_3$
 propiedad del producto mixto
 $(\mathbf{T}\mathbf{a} \times \mathbf{T}\mathbf{b}) \cdot \mathbf{T}\mathbf{c} = (\det \mathbf{T}) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
 $dV_{\chi} = \underbrace{\det \mathbf{F}}_J \underbrace{(d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3}_{dV_{\kappa}}$

Deformación de un elemento de área

$\chi(\mathcal{B})$
 dx_2 dx_1
 \mathbf{n}
 \mathbf{x}
 $\mathbf{nd}A_\chi = d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2$
 $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$
 $\mathbf{nd}A_\chi = (\mathbf{F}d\mathbf{x}_1 \times \mathbf{F}d\mathbf{x}_2)$

$\kappa(\mathcal{B})$
 dX_2
 dX_1
 \mathbf{N}
 \mathbf{X}
 $\mathbf{N}dA_\kappa = d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2$

$(\mathbf{T}\mathbf{a} \times \mathbf{T}\mathbf{b}) \cdot \mathbf{T}\mathbf{c} = (\det \mathbf{T})(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
 $\mathbf{T}^T(\mathbf{T}\mathbf{a} \times \mathbf{T}\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \forall \mathbf{c}$
 $(\mathbf{T}\mathbf{a} \times \mathbf{T}\mathbf{b}) = (\det \mathbf{T})\mathbf{T}^{-T}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
 $\mathbf{n} dA_\chi = J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N} dA_\kappa$
 (fórmula de Nanson)

Resumen, Cinemática

$\kappa(\mathcal{B})$ $\mathbf{F} = \text{Grad } \chi_\kappa$ $\chi(\mathcal{B})$

$d\mathbf{X}$ \mathbf{X} $d\mathbf{x}$ \mathbf{x}

$\mathbf{x} = \chi_\kappa(\mathbf{X})$

$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$

$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ $(dl)^2 = \mathbf{C}d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$

$dV_\chi = JdV_\kappa$ $J = \det \mathbf{F}$

$\mathbf{n} dA_\chi = J\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA_\kappa$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{T}^T \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} := (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}$

Gradiente de deformación, Resumen

Observaciones:

- El cambio de volumen viene dado por el determinante,

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{dV}{dV^0}$$

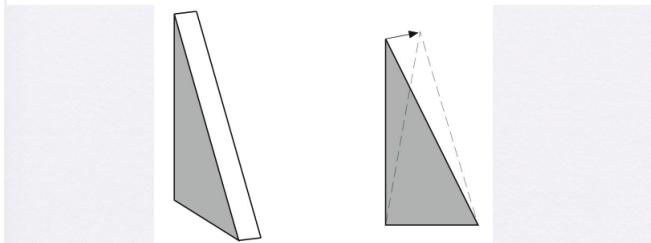
(condición de impenetrabilidad: $J > 0$)

- $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ es un tensor de segundo orden *bipunto*, con dos “patas” o índices (“ i ” y “ J ” en F_{ij}), una en la configuración actual ($d\mathbf{x} \equiv dx_i$) y otra en la original ($d\mathbf{X} \equiv dX_J$).

(esta matización podría obviarse si se consideran ambas configuraciones, variedades diferenciales, inmersas en un mismo espacio euclídeo \mathbb{R}^3).

Ejercicio (sumar a la tarea anterior)

Un elemento plano de espesor 1 cm tiene inicialmente forma de triángulo rectángulo, tal como se esquematiza en la figura, con una base de 5 cm y una altura de 10 cm. El elemento se somete a deformación plana, de manera que su vértice superior se desplaza 2 cm hacia la derecha y 1 mm hacia arriba, permaneciendo inmóviles los otros dos vértices. Determinar las componentes del tensor de deformación local \mathbf{F} en la hipótesis de que la deformación es uniforme.



Descomposición polar del Gradiente de deformación

- Para cualquier tensor \mathbf{F} con $\det \mathbf{F} > 0$, existen descomposiciones únicas:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (2)$$

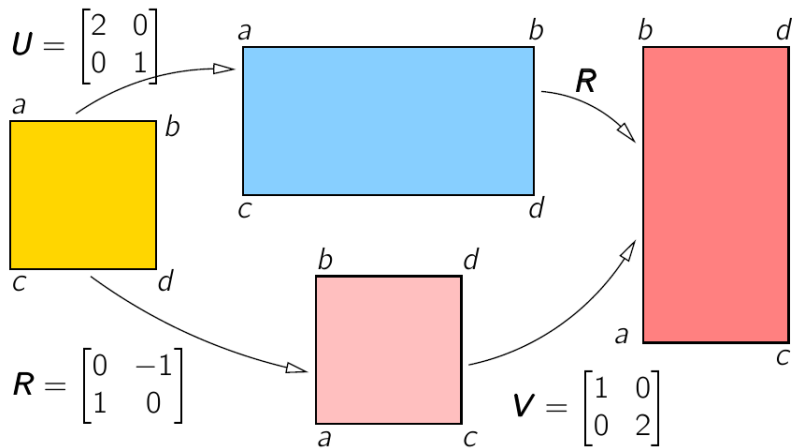
$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (3)$$

(2): *estiramiento* (“stretch”) \mathbf{U} seguido de rotación \mathbf{R} ;

(3): rotación \mathbf{R} seguida de estiramiento \mathbf{V}

- \mathbf{R} rotación propia: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ (ortogonal), $\det \mathbf{R} = +1$
- \mathbf{U} , \mathbf{V} : tensores de *estiramiento* por la derecha y por la izquierda respectivamente. Simétricos, definidos positivos y únicos

Ejemplo de Descomposición polar (1)



Ejemplo de Descomposición polar (2)

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tensores de Cauchy Green (1)

- ◇ Cauchy-Green por la derecha:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2; \quad C_{IJ} = F_{pI} F_{pJ}$$

- ◇ Cauchy-Green por la izquierda (tensor de Finger):

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2; \quad b_{ij} = F_{iP} F_{jP}$$

- ◇ *Interpretación:* transformación de longitud de un elemento

$$dl^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} \cdot d\mathbf{X})$$
$$dL^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{b}^{-1} \cdot d\mathbf{x})$$

Tensores de Cauchy Green (2)

Ejemplo anterior:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Tensores de Cauchy Green (3)

- En un caso general, ni \mathbf{C} ni \mathbf{b} son diagonales, aunque al ser simétricos y definidos positivos admitirán una descomposición espectral de la forma

$$\mathbf{C} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A^2 \mathbf{N}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)}; \quad (4)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^2 \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)}; \quad (5)$$

$\lambda_a = \delta_{aA} \lambda_A$: alargamientos principales (mismos valores)

$\mathbf{n}^{(a)} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}^{(A)} \delta_{aA}$: direcciones principales de alargamiento

- Para el ejemplo anterior:

$$\lambda_1 = 2, \quad \mathbf{N}^{(1)} = (1, 0), \quad \mathbf{n}^{(1)} = (0, 1);$$

$$\lambda_2 = 1, \quad \mathbf{N}^{(2)} = (0, 1), \quad \mathbf{n}^{(2)} = (-1, 0).$$

Tensores de Cauchy Green (4)

- Diagonalización: solución de problema de autovalores

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{N}^{(A)} = \lambda_A^2 \mathbf{N}^{(A)}; \quad (6)$$

- Ecuación característica:

$$0 = p(\lambda^2) = -\det[\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{1}] = +\lambda^6 - I_1 \lambda^4 + I_2 \lambda^2 - I_3 \quad (7)$$

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{C}; \quad I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr } \mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)); \quad I_3 = \det \mathbf{C}. \quad (8)$$

- Autovalores de \mathbf{C} coinciden con los de \mathbf{U}, \mathbf{V} :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{N}^{(A)} = \lambda_A \mathbf{N}^{(A)}; \quad (9)$$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A \mathbf{N}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)}; \quad (10)$$

Tensores de Cauchy Green (5)

Observaciones:

- En general, \mathbf{R} y \mathbf{F} operan sobre direcciones principales de la siguiente forma:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{N}^{(A)} = \delta_{Aa} \mathbf{n}^{(a)} \quad \left(= \mathbf{n}^{(A)} \right); \quad (11)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}^{(A)} = \delta_{Aa} \lambda_a \mathbf{n}^{(a)} \quad \left(= \lambda_A \mathbf{n}^{(A)} \right); \quad (12)$$

- Para el caso particular de un movimiento rígido (deformación nula), se verifica

$$\mathbf{F} = \mathbf{R};$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{C} = \mathbf{b} = \mathbf{1};$$

$$\lambda_A = 1 \quad (A = 1, 2, 3)$$

Tensor de Green-Lagrange (1)

Se define como:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \\ E_{IJ} &= \frac{1}{2}(C_{IJ} - \delta_{IJ}) = \frac{1}{2}(x_{p,I}x_{p,J} - \delta_{IJ})\end{aligned}\tag{13}$$

Los dos índices están referidos a la configuración original. En función de los desplazamientos,

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}(u_{I,J} + u_{J,I} + \underbrace{u_{p,I}u_{p,J}}_{\text{cuadrático}})$$

Interpretación:

transformación de longitud $d\mathbf{X} = \mathbf{T}dL \mapsto d\mathbf{x} = \mathbf{t}dl$

$$d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(dl^2 - dL^2); \quad \mathbf{T} \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{T}) = \frac{dl^2 - dL^2}{2dL^2} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$$

Tensor de Green-Lagrange (2)

Ejemplo anterior:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T} \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{T}) = \frac{3}{2} = \frac{4-1}{2 \cdot 1}$$

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T} \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{T}) = 0$$

Tensor de Almansi-Euler (1)

Se define como:

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \\ e_{ij} &= \frac{1}{2}(\delta_{ij} - b_{ij}^{-1}) = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - X_{P,i} X_{P,j})\end{aligned}\tag{14}$$

Los dos índices están referidos a la configuración actual. En función de los desplazamientos,

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - \underbrace{u_{p,i} u_{p,j}}_{\text{cuadrático}})$$

Interpretación:

transformación de longitud $d\mathbf{X} = \mathbf{T}dL \mapsto d\mathbf{x} = \mathbf{t}dl$

$$d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} \cdot d\mathbf{x} = \frac{1}{2}(dl^2 - dL^2); \quad \mathbf{t} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{t}) = \frac{dl^2 - dL^2}{2dl^2} = \frac{1}{2}(1 - \lambda^{-2})$$

Tensor de Almansi-Euler (2)

Ejemplo anterior:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3/8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{t} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{t}) = 0$$

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{t} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{t}) = \frac{3}{8} = \frac{4-1}{2 \cdot 4}$$

Tensores de deformación generalizados

- Tensores *materiales*:

$$\mathbf{E}^{(n)} = \frac{1}{n}(\mathbf{U}^n - \mathbf{1}) = \sum_{A=1}^3 \frac{1}{n} (\lambda_A^n - 1) \mathbf{N}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)}; \quad (15)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}) = \sum_{A=1}^3 \frac{1}{2} (\lambda_A^2 - 1) \mathbf{N}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)} \quad (16)$$

- Tensores *espaciales*:

$$\mathbf{e}^{(n)} = \frac{1}{n}(\mathbf{1} - \mathbf{V}^{-n}) = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{n} (1 - \lambda_a^{-n}) \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)}; \quad (17)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{V}^{-2}) = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{2} (1 - \lambda_a^{-2}) \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)}; \quad (18)$$

Tensores de deformación generalizados

♣ Tensores logarítmicos (Hencky)

($\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n}(\lambda^n - 1) = \ln \lambda$);

$$\mathbf{E}^{(0)} = \ln \mathbf{U} = \sum_{A=1}^3 \ln \lambda_A \mathbf{N}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)};$$

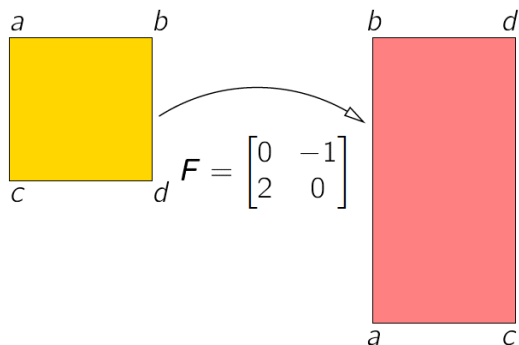
$$\mathbf{e}^{(0)} = \ln \mathbf{V} = \sum_{a=1}^3 \ln \lambda_a \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)};$$

♣ Tensores nominales (Biot)

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{U} - \mathbf{1} = \sum_{A=1}^3 (\lambda_A - 1) \mathbf{N}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)};$$

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{1} - \mathbf{V}^{-1} = \sum_{a=1}^3 (1 - \lambda_a^{-1}) \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)};$$

Ejemplo: Comparación con tensor lineal (1)



$$d\mathbf{X}_{ab} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$d\mathbf{X}_{ca} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

$$d\mathbf{x}_{ab} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix};$$

$$d\mathbf{x}_{ca} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo: Comparación con tensor lineal (2)

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_J} = \frac{\partial(x_i - X_P \delta_{Pi})}{\partial X_J} = F_{iJ} - \delta_{iJ}$$

Resulta

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_J} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2}([u_{i,j}] + [u_{j,i}]) = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Green-Lagrange}}$$

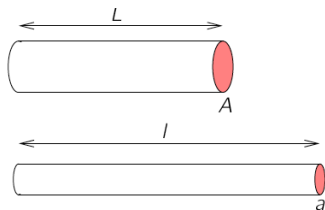
$$\underbrace{[\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3/8 \end{bmatrix}}_{\text{Almansi-Euler}}$$

$$\underbrace{[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{Lineal}}$$

Aplicación al caso unidimensional (1)

$$\Delta l = l - L$$

$$\lambda = \frac{l}{L}$$

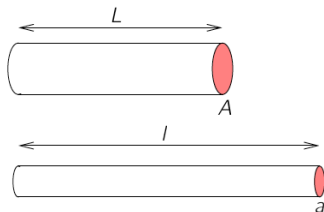


- Green-Lagrange: $E = \frac{l^2 - L^2}{2L^2} = \frac{\Delta l}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{L} \right)^2 = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$
- Almansi-Euler: $e = \frac{l^2 - L^2}{2l^2} = \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \lambda^{-2})$
- Gradiente deformación: $F = \frac{l}{L} = \lambda$
- Cauchy-Green: $C = b = \frac{l^2}{L^2} = \lambda^2$

Aplicación al caso unidimensional (2)

$$\Delta l = l - L$$

$$\lambda = \frac{l}{L}$$

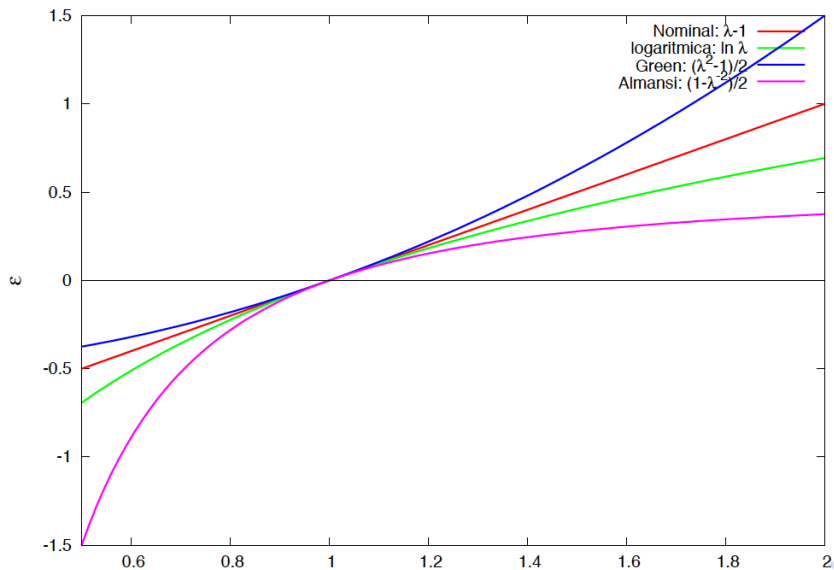


- Deformación lineal: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{L} \approx \frac{\Delta l}{l} = \lambda - 1 \approx 1 - \lambda^{-1}$
- Deformación logarítmica o natural:
$$\varepsilon_n = \int_0^t \dot{\gamma} dt = \int_0^t \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{L}\right) = \ln \lambda$$
- Deformación nominal o «ingenieril»: $\varepsilon_E = \frac{\Delta l}{L} = \lambda - 1$
- Velocidad de deformación: $\dot{\varepsilon} = d = \frac{\dot{l}}{l}$

Aplicación al caso unidimensional (3)

Alarg.	Almansi	nominal	logar.	Green
$\lambda = \frac{l}{L}$	$\frac{\Delta l}{L} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{L}\right)^2$	$\varepsilon_E = \frac{\Delta l}{L}$	$\ln\left(\frac{l}{L}\right)$	$\frac{\Delta l}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{L}\right)^2$
0.10	-4.95	-0.90	-2.30	-0.495
0.50	-1.50	-0.50	-0.69	-0.375
0.90	-0.1173	-0.10	-0.105	-0.0995
0.99	-0.0102	-0.01	-0.01005	-0.00995
1	0	0	0	0
1.01	+0.0099	+0.01	+0.00995	+0.0105
1.10	+0.0868	+0.10	+0.0953	+0.105
2.00	+0.375	+1.00	+1.69	+1.50
10.0	+0.495	+9.00	+2.30	+4.95

Aplicación al caso unidimensional (4)



Mecánica de medios continuos – 15904

Cinemática: Deformación

Dr Ing. Claudio García Herrera

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica
claudio.garcia@usach.cl

Santiago de Chile, 27 de Septiembre de 2010

