Mecánica de medios continuos – 15904
Cinemática

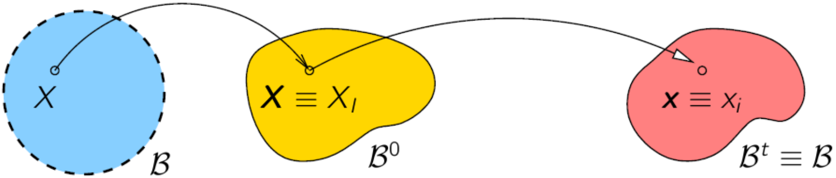
Dr Ing. Claudio García Herrera

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica
`claudio.garcia@usach.cl`

Santiago de Chile, 6 de Septiembre de 2010

Índice

Cinemática: Movimiento de un cuerpo



$\boxed{\mathcal{B} \text{ cuerpo}} \rightarrow \boxed{\mathcal{B}_0 \; \textit{conf. inicial } (t=0)} \rightarrow \boxed{\mathcal{B}_t \; \textit{conf. actual } (t)}$

- Partículas: $X \in \mathcal{B}$
- $\mathbf{X} \equiv X_I$: coordenadas Lagrangianas o materiales (definen partícula o punto material)
- Movimiento: $\phi_t : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_t$; $\quad \mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X})$; $\quad \mathbf{X} = \phi_t^{-1}(\mathbf{x})$.
- $\mathbf{x} \equiv x_i$: coordenadas Eulerianas o espaciales (definen posición o punto espacial)
- Desplazamientos: $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{1}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{X}$; $\qquad u_i = x_i - \delta_{Pi} X_P$

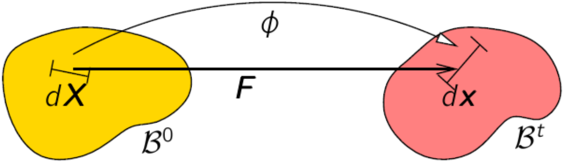
Cinemática: Gradiente de deformación (1)

- *Definición:*

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{x}; \qquad F_{iJ} = x_{i,J} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\phi^{-1}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}; \qquad F^{-1}_{Ij} = X_{I,j} = \frac{\partial X_I}{\partial x_j}$$

- *Interpretación:* transformación (lineal) de un vector tangente $d\mathbf{X}$ (elemento de arco): $d\mathbf{X} \mapsto d\mathbf{x}$



$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{X} \qquad\qquad d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}\cdot d\mathbf{x}$$

Cinemática: Gradiente de deformación (2)

Observaciones:

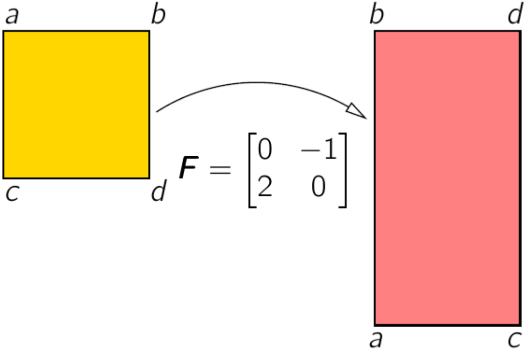
- El cambio de volumen viene dado por el determinante,

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{dV}{dV^0}$$

  (condición de impenetrabilidad: $J > 0$)

- $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ es un tensor de segundo orden *bipunto*, con dos "patas" o índices ("i" y "J" en F_{iJ}), una en la configuración actual ($d\mathbf{x} \equiv dx_i$) y otra en la original ($d\mathbf{X} \equiv dX_J$).
  (esta matización podría obviarse si se consideran ambas configuraciones, variedades diferenciales, inmersas en un mismo espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$).

Ejemplo: Gradiente de deformación



$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d\mathbf{X}_{ab} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad d\mathbf{X}_{ca} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad d\mathbf{x}_{ab} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}; \quad d\mathbf{x}_{ca} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Descomposición polar del Gradiente de deformación

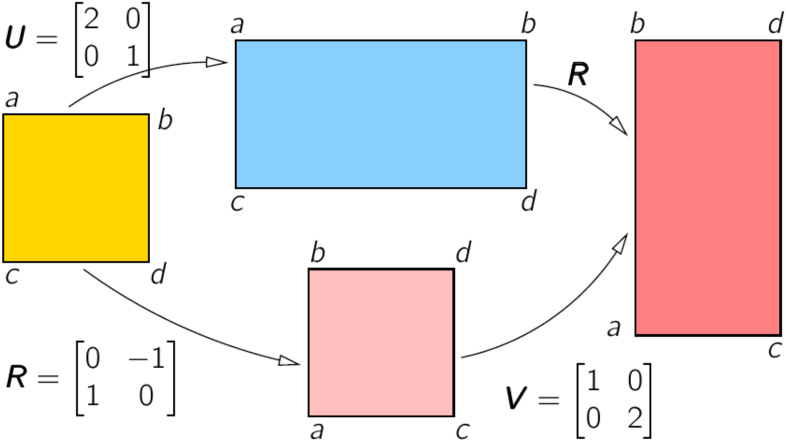
- Para cualquier tensor $\mathbf{F}$ con $\det \mathbf{F} > 0$, existen descomposiciones únicas:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \tag{2}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \tag{3}$$

  (2): *estiramiento* ("stretch") $\mathbf{U}$ seguido de rotación $\mathbf{R}$;
  (3): rotación $\mathbf{R}$ seguida de estiramiento $\mathbf{V}$
- $\mathbf{R}$ rotación propia: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{\mathsf{T}}$ (ortogonal), $\det \mathbf{R} = +1$
- $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$: tensores de *estiramiento* por la derecha y por la izquierda respectivamente. Simétricos, definidos positivos y únicos

Ejemplo de Descomposición polar



Mecánica de medios continuos – 15904
Cinemática

Dr Ing. Claudio García Herrera

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica
`claudio.garcia@usach.cl`

Santiago de Chile, 6 de Septiembre de 2010