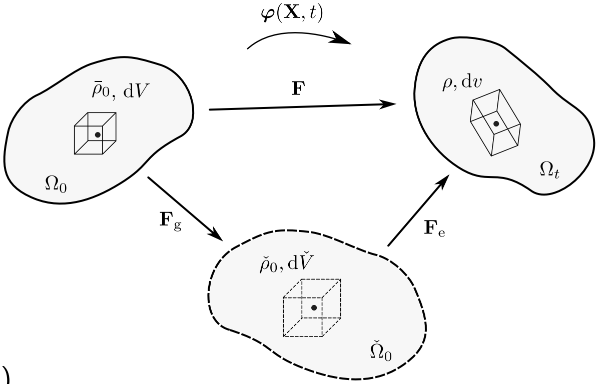
Sistema termodinámico abierto

Crecimiento cinemático



$$\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}_0(\mathbf{X}, t)$$

- Se propone una configuración intermedia ficticia $\check{\Omega}_0$ cinemáticamente incompatible.
- El gradiente de deformación se define de forma multiplicativa $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mathrm{e}\mathbf{F}_\mathrm{g}$, donde $\mathbf{F}_\mathrm{e}$ es la parte elástica y $\mathbf{F}_\mathrm{g}$ de crecimiento y remodelación.
- Con $J_\mathrm{e} = \det \mathbf{F}_\mathrm{e} > 0$ y $J_\mathrm{g} = \det \mathbf{F}_\mathrm{g} > 0$.

Sistema termodinámico abierto

Balance de masa $\longrightarrow \bar{\rho}_0$

$$m = \int_{\Omega_0} \bar{\rho}_0 \mathrm{d}V = \int_{\Omega_t} \rho \mathrm{d}v = \mathrm{const.} > 0 \tag{1}$$

$$\bar{\rho}_0 = \rho J \tag{2}$$

$$\dot{m} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \int_{\Omega_0} \bar{\rho}_0 \mathrm{d}V = \int_{\Omega_0} \mathcal{R}_0 \mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{N}\ \mathrm{d}S, \tag{3}$$

$$\dot{\bar{\rho}}_0 = \mathcal{R}_0 + \boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{R}}. \tag{4}$$

donde:

- $\mathcal{R}_0$ es un término escalar fuente de masa (proliferación, hipertrofia, mitosis), y
- $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ un término vectorial de flujo másico sobre el contorno $\partial\Omega_0$ (migración celular).

Sistema termodinámico abierto

Balance de momentum lineal $\longrightarrow \bar{\rho}_0 \boldsymbol{v}$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{L}}(t) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \int_{\Omega_o} \bar{\rho}_0 \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V = \int_{\Omega_0} \left(\bar{\rho}_0 \mathbf{b}_0 + \boldsymbol{v} \mathcal{R}_0 - \boldsymbol{\nabla}_0 \boldsymbol{v} \, \boldsymbol{\mathcal{R}} \right) \mathrm{d}V \\
+ \int_{\partial\Omega_0} \left[\mathbf{T} + (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{\mathcal{R}}) \mathrm{N} \right] \mathrm{d}S
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Tanto $\mathcal{R}_0$ y $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ contribuyen al balance de momentum lineal.

Reemplazando el balance de masa y aplicando el teorema de Gauss, se tiene

$$
\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{P} + \bar{\rho}_0 \mathbf{b}_0 = \bar{\rho}_0 \dot{\boldsymbol{v}} \tag{6}
$$

que corresponde a la **primera ecuación de movimiento de Cauchy**.

Sistema termodinámico abierto

Balance de momentum angular $\longrightarrow \mathbf{x} \times \bar{\rho}_0 \boldsymbol{v}$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{J}}(t) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \int_{\Omega_0} \mathbf{x} \times \bar{\rho}_0 \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V = \int_{\Omega_0} \mathbf{x} \times (\bar{\rho}_0 \mathbf{b}_0 + \boldsymbol{v} \mathcal{R}_0 - \boldsymbol{\nabla}_0 \boldsymbol{v} \, \boldsymbol{\mathcal{R}}) \, \mathrm{d}V \\
+ \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{x} \times [\mathbf{T} + (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{\mathcal{R}}) \mathbf{N}] \, \mathrm{d}S
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Tanto $\mathcal{R}_0$ y $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ contribuyen al balance de momentum angular.

Reemplazando el balance de masa y aplicando el teorema de Gauss, se tiene

$$
\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{F}(\mathbf{P} + \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{\mathcal{R}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0} \tag{8}
$$

donde $\mathbf{F}\boldsymbol{\mathcal{R}}$ es coaxial con $\boldsymbol{v}$. Luego

$$
\mathbf{P}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{F}\mathbf{P}^{\mathrm{T}} \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{S}^{\mathrm{T}} = \mathbf{S}, \tag{9}
$$

que corresponde a la **segunda ecuación de movimiento de Cauchy**.

Sistema termodinámico abierto

Balance de energía interna $\longrightarrow \bar{\rho}_0 e$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \int_{\Omega_0} \bar{\rho}_0 e \,\mathrm{d}V = & \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \,\mathrm{d}V \\
& + \int_{\Omega_0} \left(\bar{\rho}_0 \mathcal{Q}_0 + e\mathcal{R}_0 - \boldsymbol{\nabla}_0 e \cdot \boldsymbol{\mathcal{R}} \right) \mathrm{d}V \\
& + \int_{\partial\Omega_0} \left(-\mathbf{Q} + e\boldsymbol{\mathcal{R}} \right) \cdot \mathbf{N} \,\mathrm{d}S
\end{aligned} \tag{10}
$$

Tanto $\mathcal{R}_0$ y $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ contribuyen al balance de energía interna, expresada como $e = e(\mathbf{X}, t)$ por unidad de masa.

Reemplazando el balance de masa y aplicando el teorema de Gauss, se tiene

$$
\bar{\rho}_0 \dot{e} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{Q} + \bar{\rho}_0 \mathcal{Q}_0 \tag{11}
$$

que corresponde a la **primera ley de la termodinámica**.

Sistema termodinámico abierto

Principio de desigualdad de la entropía $\longrightarrow \bar{\rho}_0 S$

$$\Gamma(t) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\Omega_0} \bar{\rho}_0 S \,\mathrm{d}V - \left(\int_{\Omega_0} (\bar{\rho}_0 \mathcal{H}_0 + S\mathcal{R}_0 - \boldsymbol{\nabla}_0 S \cdot \boldsymbol{\mathcal{R}}) \,\mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega_0} (-\mathbf{H} + S\boldsymbol{\mathcal{R}}) \cdot \mathbf{N} \,\mathrm{d}S\right) \geq 0, \tag{12}$$

Donde se definen los términos fuente y flujo de entropía, $\mathcal{H}_0 = \mathcal{Q}/\Theta$ y $\mathbf{H} = \mathbf{Q}/\Theta$. Reemplazando el balance de masa y energía interna, y aplicando el teorema de Gauss

$$\mathcal{D}_{\mathrm{int}} = \bar{\rho}_0 \Theta \dot{S} + \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \bar{\rho}_0 \dot{e} - \bar{\rho}_0 \Theta \mathcal{H}_0 - \frac{1}{\Theta}\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\nabla}_0 \Theta \geq 0 \tag{13}$$

considerando que $\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\nabla}_0 \Theta \leq 0$ y $W = e - \Theta S$, finalmente resulta

$$\mathcal{D}_{\mathrm{int}} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \bar{\rho}_0 \dot{W} - \eta \dot{\Theta} - \bar{\rho}_0 \Theta \mathcal{H}_0 \geq 0 \tag{14}$$

que corresponde a la **segunda ley de la termodinámica**, llamada **desigualdad de Clausius-Duhem**. Con W la función densidad de energía por unidad de volumen.