Diseño Computarizado 15023

ELEMENTOS FINITOS: BARRAS

Profesor: Claudio García Herrera

Departamento de Ingeniería Mecánica
Universidad de Santiago de Chile

Índice

Índice

1

Introducción

- Es posible encontrar la respuesta mecánica de un sólido, resolviendo las ecuaciones diferenciales de equilibrio estático $\nabla\sigma + \rho\mathbf{b} = \mathbf{0}$.
- $+$ Ecuación constitutiva y considerando pequeñas deformaciones $\rightarrow$ las ecuaciones de la elasticidad.
- La solución está acotada a casos muy simplificados $\rightarrow$ poco prático.
- Solución posible, métodos experimentales fotoelasticidad, cintas extensométricas, ensayos a escala.
- Métodos numéricos: Elementos Finitos.

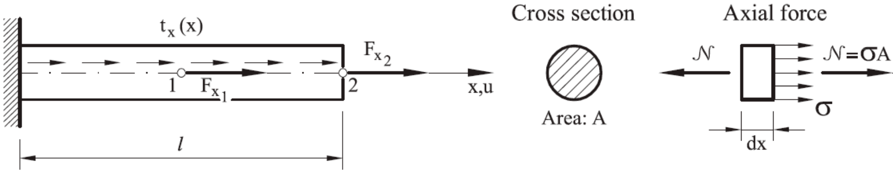
Índice

Definiciones básicas

Suposiciones básicas

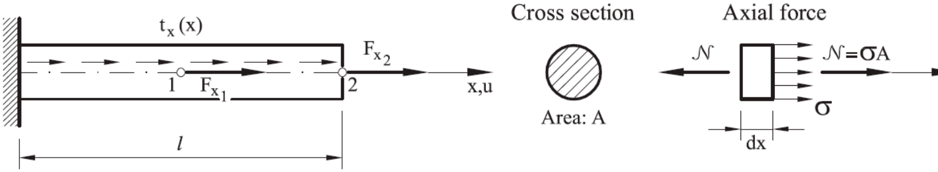
- Deformaciones pequeñas $\longrightarrow$ Deformación ingenieril $\epsilon = \frac{du}{dx}$.
- Dirección de las fuerzas únicamente axiales. $\sigma = \frac{d\aleph}{dA}$.
- Respuesta esfuerzo deformación lineal y elástica.
- No se considera pandeo.

$\sigma = E\epsilon = E\frac{du}{dx}$, $\aleph = \int\int_A \sigma dA$



Ecuación de equilibrio: Principio de los Trabajos Virtuales

P.T.V.



$$\int\int\int_V \delta\epsilon\sigma dV = \int_0^l \delta u b(x) dx + \sum_{i=1}^{p} \delta u_i F_i$$

- δu_i es el desplazamiento y $dV = dAdx$, área constante

$$\int_0^l \delta\epsilon EA\frac{du}{dx}dx = \int_0^l \delta u b(x) dx + \sum_{i=1}^{p} \delta u_i F_i$$

- Solución exacta: desplazamiento $u(x)$ que satisface PTV +C.B. (∞ GDL)

Solución aproximada, MEF

Solución: Aproximar $u(x)$ con polinomios

$$u(x) \simeq N_1^{(e)} u_1^{(e)} + N_2^{(e)} u_2^{(e)} + \cdots + N_n^{(e)} u_n^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} N_i^{(e)} u_i^{(e)}$$

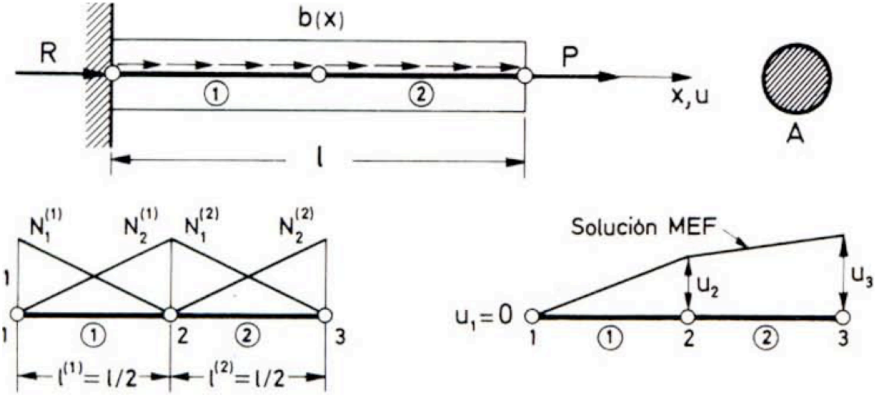
donde:

- n es el número de puntos (*nodos*) donde se supone conocido el desplazamiento.
- $N_1^{(e)}, \cdots, N_n^{(e)}$ son los polinomios de interpolación (*funciones de forma*) definidas en el dominio del **elemento** y funciones de x.
- $u_i^{(e)}$ es el desplazamiento en el nodo i (conocido!!).

En primer lugar se considera elementos barras de dos nodos $\rightarrow$ funciones de forma N lineales

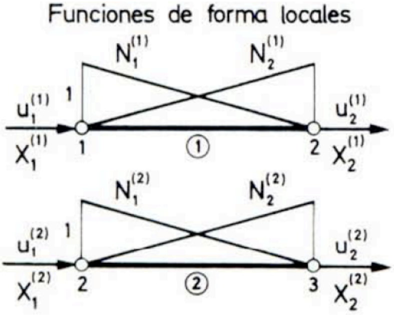
$$u(x) \simeq N_1^{(e)} u_1^{(e)} + N_2^{(e)} u_2^{(e)}$$

Discretización con dos elementos lineales

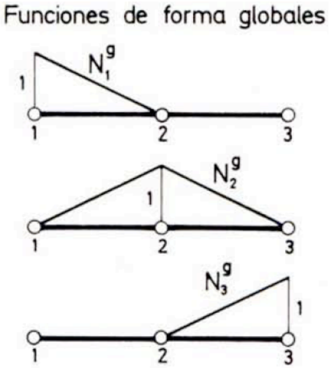


Discretización con dos elementos lineales

Funciones de forma lineales $N(x)$



$$u = \sum_{i=1}^{2} N_i^{(e)} u_i^{(e)}$$



$$\boxed{u = \sum_{i=1}^{3} N_i^{g} u_i}$$

Funciones de forma para cada elemento

Campo de desplazamientos $u(x)$

$$u(x) = N_1^{(1)} u_1^{(1)} + N_2^{(1)} u_2^{(1)} \qquad u(x) = N_1^{(2)} u_1^{(2)} + N_2^{(2)} u_2^{(2)}$$

Las funciones de forma y sus derivadas son:

$$N_1^{(1)} = \frac{x_2^{(1)} - x}{l^{(1)}};\ \frac{dN_1^{(1)}}{dx} = -\frac{1}{l^{(1)}} \qquad N_1^{(2)} = \frac{x_2^{(2)} - x}{l^{(2)}};\ \frac{dN_1^{(2)}}{dx} = -\frac{1}{l^{(2)}}$$

$$N_2^{(1)} = \frac{x - x_1^{(1)}}{l^{(1)}};\ \frac{dN_2^{(1)}}{dx} = \frac{1}{l^{(1)}} \qquad N_2^{(2)} = \frac{x - x_1^{(2)}}{l^{(2)}};\ \frac{dN_2^{(2)}}{dx} = \frac{1}{l^{(2)}}$$

La deformación axial ϵ en cada elemento:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dN_1^{(1)}}{dx} u_1^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} u_2^{(1)} \qquad \epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dN_1^{(2)}}{dx} u_1^{(2)} + \frac{dN_2^{(2)}}{dx} u_2^{(2)}$$

Aplicación y solución del PTV (elemento 1)

.

$$\int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \delta\epsilon EA\frac{du}{dx}dx = \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \delta u b(x)dx + \delta u_1^{(1)} F_1^{(1)} + \delta u_2^{(1)} F_2^{(1)}$$

$$\delta u = N_1^{(1)}\delta u_1^{(1)} + N_2^{(1)}\delta u_2^{(1)}$$

$$\delta\epsilon = \frac{d}{dx}(\delta u) = \frac{dN_1^{(1)}}{dx}\delta u_1^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx}\delta u_2^{(1)}$$

Reemplazando

$$\int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \left[\frac{dN_1^{(1)}}{dx}\delta u_1^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx}\delta u_2^{(1)}\right] EA\frac{du}{dx}dx$$
$$-\int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \left[N_1^{(1)}\delta u_1^{(1)} + N_2^{(1)}\delta u_2^{(1)}\right] b(x)dx = \delta u_1^{(1)} F_1^{(1)} + \delta u_2^{(1)} F_2^{(1)}$$

Factorizando

Aplicación y solución del PTV (elemento 1)

.

Factorizando:

$$\delta u_1^{(1)} \left[\int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \frac{dN_1^{(1)}}{dx} EA \frac{du}{dx} dx - \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} N_1^{(1)} b(x) dx - F_1^{(1)} \right] +$$

$$\delta u_2^{(1)} \left[\int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \frac{dN_2^{(1)}}{dx} EA \frac{du}{dx} dx - \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} N_2^{(1)} b(x) dx - F_2^{(1)} \right] = 0$$

El vector de desplazamientos virtuales ($\delta u_1^{(1)}$, $\delta u_2^{(1)}$) es arbitrario y no nulo, por ende lo único es que el otro sea nulo, es decir:

$$\int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \frac{dN_1^{(1)}}{dx} EA \frac{du}{dx} dx - \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} N_1^{(1)} b(x) dx - F_1^{(1)} = 0$$

$$\int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \frac{dN_2^{(1)}}{dx} EA \frac{du}{dx} dx - \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} N_2^{(1)} b(x) dx - F_2^{(1)} = 0$$

Aplicación y solución del PTV (elemento 1)

. Recordando que: $\frac{du}{dx} = \frac{dN_1^{(1)}}{dx} u_1^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} u_2^{(1)}$ y reemplazando se obtiene:

$$\int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \left(\frac{dN_1^{(1)}}{dx} EA \frac{dN_1^{(1)}}{dx} u_1^{(1)} + \frac{dN_1^{(1)}}{dx} EA \frac{dN_2^{(1)}}{dx} u_2^{(1)} \right) dx - \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} N_1^{(1)} b(x) dx - F_1^{(1)} = 0$$

$$\int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \left(\frac{dN_2^{(1)}}{dx} EA \frac{dN_1^{(1)}}{dx} u_1^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} EA \frac{dN_2^{(1)}}{dx} u_2^{(1)} \right) dx - \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} N_2^{(1)} b(x) dx - F_2^{(1)} = 0$$

Aplicación y solución del PTV (elemento 1)

Planteando el sistema de dos ecuaciones matricialmente y despejando las fuerzas nodales:

$$\left(\int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \begin{bmatrix} \frac{dN_1^{(1)}}{dx} EA \frac{dN_1^{(1)}}{dx} & \frac{dN_1^{(1)}}{dx} EA \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \\ \frac{dN_2^{(1)}}{dx} EA \frac{dN_1^{(1)}}{dx} & \frac{dN_2^{(1)}}{dx} EA \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \end{bmatrix} dx\right) \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} - \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \begin{Bmatrix} N_1^{(1)} \\ N_2^{(1)} \end{Bmatrix} b(x)dx = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(1)}\mathbf{a}^{(1)} - \mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{q}^{(1)}$$

Diseño Computarizado 15023

ELEMENTOS FINITOS: BARRAS

Profesor: Claudio García Herrera

Departamento de Ingeniería Mecánica
Universidad de Santiago de Chile