Índice

Índice

Introducción

Material elástico

Un material es *elástico* cuando su estado tensional depende exclusivamente de su deformación instantánea.

Introducción (cont.)

Material hiperelástico

Un material *hiperelástico* es un material elástico que se deforma con un trabajo independiente del camino de carga.

- Ambos conceptos son equivalentes en problemas unidimensionales, pero no para varias dimensiones.
- Los ejemplos típicos de materiales hiperelásticos son los elastómeros.

Índice

Medidas de la deformación

- Gradiente de deformación $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}.$$

La relación de volúmenes es $J = \det(\boldsymbol{F})$.

- Velocidad de deformación $\boldsymbol{D}$:

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{sim}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}), \quad \text{siendo } \boldsymbol{L} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}.$$

- Tensor de deformación de Green $\boldsymbol{E}$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} = 2\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} \Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F} - \boldsymbol{1}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{1})$$

siendo $\boldsymbol{C}$ el tensor de Cauchy-Green por la derecha.

Medidas de la tensión

- Tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{f}.$$

- Primer tensor de Piola-Kirchhoff (PK1, tensor de Piola) $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mathrm{d}\boldsymbol{f} \Rightarrow \boldsymbol{P} = J\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}.$$

(Se puede demostrar usando $\mathrm{d}\boldsymbol{a} = J\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$.)

Tensor de tensiones nominal: $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$.

- Segundo tensor de Piola-Kirchhoff (PK2) $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}^{-1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f} \Rightarrow \boldsymbol{S} = J\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}.$$

Tensor de tensiones de Kirchhoff: $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$.

Medidas de la tensión (cont.)

Velocidades objetivas de la tensión

- Velocidad de Jaumann:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla\mathcal{J}} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{D}t} - \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}, \quad \text{con } \boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}.$$

- Velocidad de Truedell:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla\mathcal{T}} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{D}t} + \mathrm{div}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$$

- Velocidad de Green-Naghdi:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla\mathcal{G}} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{D}t} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}, \quad \text{con } \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}.$$

Densidad de potencia y energía libre

Variables conjugadas en la potencia

- Tensión de Cauchy/velocidad de deformación:

$$\dot{W} = J\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}.$$

- Tensión nominal/velocidad del gradiente de deformación:

$$\dot{W} = \boldsymbol{P}:\dot{\boldsymbol{F}}.$$

- Tensión PK2/velocidad del tensor de Green:

$$\dot{W} = \boldsymbol{S}:\dot{\boldsymbol{E}}.$$

Densidad de potencia y energía libre (cont.)

- En un proceso termodinámico reversible (material termoelástico) se satisface

$$\rho_0(T\dot{\eta} - \dot{U}) + \boldsymbol{S}:\dot{\boldsymbol{E}} = 0,$$

siendo $\eta(= k_{\mathrm{B}} \ln \Omega)$ la entropía y U la energía interna.

- Se define como energía libre (de Helmholtz) $\psi = U - T\eta$.
- Si la deformación es isoterma,

$$\boldsymbol{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}}, \quad \text{adoptándose } W = \rho_0 \psi.$$

- Si la deformación es isoentrópica,

$$\boldsymbol{S} = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{E}}, \quad \text{adoptándose } W = \rho_0 U.$$

Principios de las ecuaciones constitutivas

- *Invariancia del sistema de coordenadas*. Esto motiva el desarrollo de las ecuaciones en forma tensorial.
- *Determinismo* respecto a la historia.
- Principio de *acción local*. Si además se ignoran derivadas superiores a las primeras, entonces el material es *simple*.
- *Principio de equipresencia*: si una variable independiente aparece en una ecuación constitutiva, también debe aparecer en el resto salvo que viole otro principio.

Principios de las ecuaciones constitutivas (cont.)

- *Objetividad material*: invariancia respecto a movimientos de sólido rígido del marco de referencia.
- *Admisibilidad física* respecto a las ecuaciones de balance y a la segunda ley de la termodinámica.
- *Simetrías materiales*: isotropía, anisotropía transversal, matriz isótropa reforzada con varias familias de fibras. . .

Principios de las ecuaciones constitutivas (cont.)

Ejemplo: Hipoelasticidad

Material hipoelástico

Una ley hipoelástica relaciona una medida objetiva de la velocidad de la tensión con la velocidad de deformación y la tensión instantánea, $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D})$.
Es habitual la relación lineal $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \boldsymbol{C}\!:\!\boldsymbol{D}$.

- La función $\boldsymbol{f}$ debe ser objetiva respecto a la tensión.
- Las leyes hipoelásticas se usan principalmente para deformaciones elásticas pequeñas.
- Para grandes deformaciones, el trabajo realizado en caminos cerrados de deformación no es necesariamente nulo (no admisibilidad física), con tensiones residuales.

Índice

Función de densidad de energía

Material hiperelástico

Un material es *hiperelástico* cuando existe una *función de densidad de energía de deformación* que es un potencial de la tensión:

$$\boldsymbol{S} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}}.$$

- Si $W = W^{\mathrm{F}}(\boldsymbol{F})$, entonces $W^{\mathrm{F}}(\boldsymbol{F}) = W^{\mathrm{F}}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{F})$ para todo $\boldsymbol{Q}$ ortogonal (objetividad material). Por tanto, si $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$, $W^{\mathrm{F}}(\boldsymbol{F}) = W^{\mathrm{F}}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U})) = W^{\mathrm{F}}(\boldsymbol{U}) = W^{\mathrm{C}}(\boldsymbol{C}) = W^{\mathrm{E}}(\boldsymbol{E})$.

Tensor de elasticidad

- La relación entre $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{E}$ no es lineal. En un esquema implícito del MEF se aproxima la solución linealizando respecto a variaciones de configuración instantánea, para lo que se necesita el tensor de cuarto orden

$$\mathcal{C} = \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{E}}.$$

- Si el material es hiperelástico,

$$\mathcal{C} = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{E} \partial \boldsymbol{E}} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{C} \partial \boldsymbol{C}}.$$

- Por tanto, en este caso, además de las simetrías menores, $\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{jikl} = \mathcal{C}_{ijlk}$, se dispone de las mayores, $\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{klij}$.

Simetrías materiales

Isotropía

- Simetría material:

$$W(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{Q}) = W(\boldsymbol{C}), \text{ para todo } \boldsymbol{Q} \text{ ortogonal.}$$

- Por tanto, W puede ser expresado en función de los invariantes de $\boldsymbol{C}$, $W = W(I_1, I_2, I_3)$, siendo

$$I_1 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}),$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left\{(\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}))^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^2)\right\} \quad \text{e}$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{C}) = J^2.$$

Simetrías materiales (cont.)

Isotropía (cont.)

- El estado tensional queda determinado según

$$\boldsymbol{S} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}} = 2\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{C}} = 2\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial W}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial \boldsymbol{C}}, \quad \text{siendo}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{C}} = \mathbf{1},$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{C}} = I_1\mathbf{1} - \boldsymbol{C} \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{C}} = I_3\boldsymbol{C}^{-1}.$$

Simetrías materiales (cont.)

Isotropía (cont.)

- Ejemplos: material neo-Hookeano (compresible)

$$W = \frac{1}{2}\lambda_0(\log J)^2 - \mu_0 \log J + \frac{1}{2}\mu_0(I_1 - 3).$$

Ejercicio propuesto. Demostrar que en pequeñas deformaciones se verifica la ecuación de Lamé:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu_0\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_0 \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}.$$

Simetrías materiales (cont.)

Materiales compuestos reforzados con fibras

- Se considera una matriz isótropa reforzada con N familias de fibras, según las direcciones definidas en la configuración de referencia por los vectores unitarios A_α $(\alpha = 1, \dots, N)$.
- La función de densidad de energía es de la forma $W(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}_\alpha)$. Debe ser invariante respecto a rotaciones de la matriz y de las fibras en la configuración de referencia.
- Siguiendo a Spencer (1984), W puede expresarse como

$$W = W(I_1, I_2, I_3, I_{4(\alpha\beta)}, I_{5(\alpha\beta)}, \eta_{\alpha\beta}),$$

siendo $I_{4(\alpha\beta)} = \boldsymbol{A}_\alpha \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}_\beta$, $I_{5(\alpha\beta)} = \boldsymbol{A}_\alpha \cdot \boldsymbol{C}^2 \cdot \boldsymbol{A}_\beta$, $\eta_{\alpha\beta} = \boldsymbol{A}_\alpha \cdot \boldsymbol{A}_\beta$.

Incompresibilidad y cuasi-incompresibilidad

- Muchos elastómeros tienen poca compresibilidad en comparación con la rigidez a cortante.
- La incompresibilidad corresponde con la restricción $J = 1$, resultando

$$\boldsymbol{S} = 2\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{C}} + \gamma \boldsymbol{C}^{-1}, \quad \text{siendo } \gamma \text{ un escalar.}$$

  Si el material es isótropo, $W = W(I_1, I_2)$.
- Frecuentemente la incompresibilidad no se fuerza de forma estricta, sino penalizando la densidad de energía debida al cambio de volumen. Esto se facilita con la descomposición aditiva

$$W = W_{\text{iso}}(\bar{\boldsymbol{C}}) + W_{\text{vol}}(J), \quad \text{siendo} \quad \bar{\boldsymbol{C}} = J^{-2/3}\boldsymbol{C}.$$

Incompresibilidad y cuasi-incompresibilidad (cont.)

Ejemplos

- Material neo-Hookeano modificado:

$$W_{\text{iso}} = \frac{1}{2}\mu_0(\bar{I}_1 - 3).$$

- Material de Mooney-Rivlin:

$$W_{\text{iso}} = c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_2 - 3).$$

- Material de Yeoh:

$$W_{\text{iso}} = c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_3(\bar{I}_1 - 3)^3.$$

Incompresibilidad y cuasi-incompresibilidad (cont.)

Ejemplos (cont.)

- Material de Ogden:

$$W_{\text{iso}} = \sum_{p=1}^{N} \left(\frac{\mu_p}{\alpha_p} \sum_{a=1}^{N} \bar{\lambda}_a^{\alpha_p} \right) , \quad \text{siendo } \bar{\lambda}_a = J^{-1/3} \lambda_a .$$

- Material isótropo de Demiray (1972) para modelizar paredes arteriales:

$$W_{\text{iso}} = \frac{c_1}{c_2} \left\{ \exp \left[\frac{c_2}{2} (\bar{I}_1 - 3) \right] - 1 \right\} .$$

Incompresibilidad y cuasi-incompresibilidad (cont.)

Ejemplos (cont.)

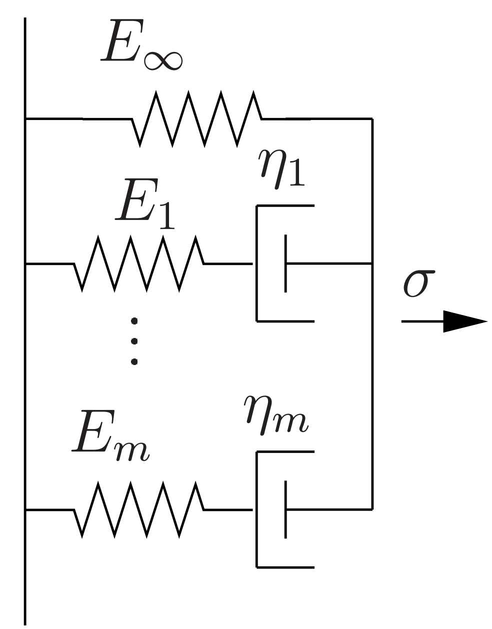
- Material de Holzapfel, Gasser y Ogden (2000) para modelizar paredes arteriales con dos orientaciones preferenciales de las fibras de colágeno:

$$W_{\mathrm{iso}} = c_1(\bar{I}_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\exp\left[k_2\left(\kappa(\bar{I}_1 - 3) + (1 - 3\kappa)(\bar{I}_{4(\alpha\alpha)} - 1)\right)^2\right] - 1\right\}.$$

Índice

Viscoelasticidad

- Muchos materiales, como los elastómeros, presentan un comportamiento depediente del tiempo denominado viscoelasticidad.
- La principal característica de esta respuesta es una memoria desvaneciente.
- Un modelo esquemático de viscoelasticidad lineal es el generalizado de Maxwell.



Viscoelasticidad (cont.)

Posible generalización a grandes deformaciones

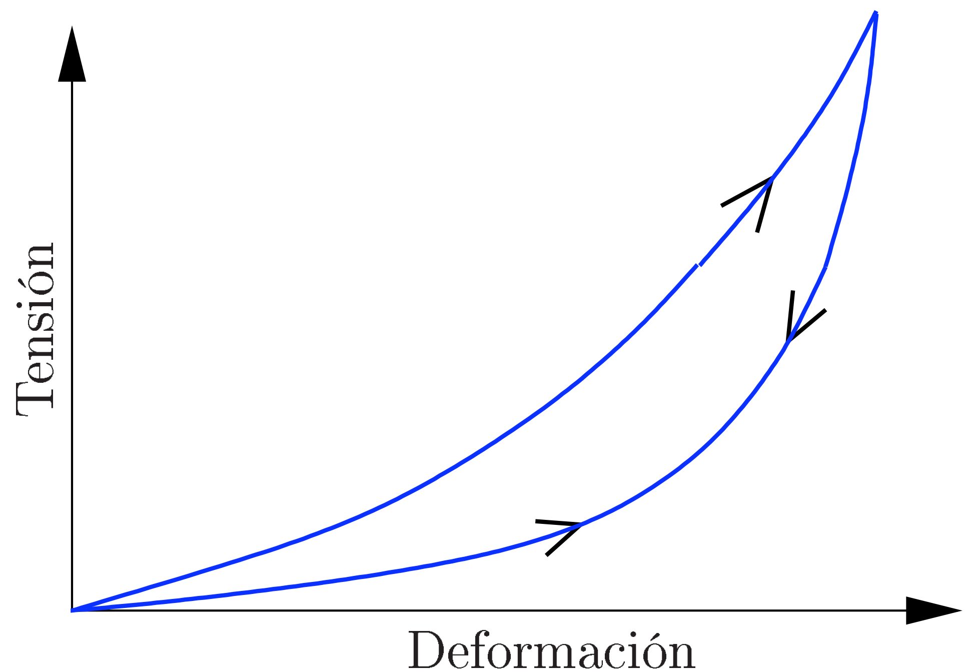
- Requisito: $W^{\infty}(\boldsymbol{C}) = W^{\infty}_{\text{vol}}(J) + W^{\infty}_{\text{iso}}(\bar{\boldsymbol{C}})$.
- La tensión PK2 es de la forma

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^{\infty}_{\text{vol}} + \boldsymbol{S}_{\text{iso}}, \quad \text{con } \boldsymbol{S}_{\text{iso}} = \boldsymbol{S}^{\infty}_{\text{iso}} + \sum_{a=1}^{m} \boldsymbol{Q}_a.$$

- Ecuaciones de evolución: $\dot{\boldsymbol{Q}}_a + \dfrac{\boldsymbol{Q}_a}{\tau_a} = \dot{\boldsymbol{S}}_{\text{iso},a}$, donde τ_a son los *tiempos de relajación* ($\tau_a = \eta_a / E_a$), y $\boldsymbol{S}_{\text{iso},a}$ tensores definidos a partir de $\boldsymbol{C}$.
- Govindjee y Simó proponen $\boldsymbol{S}_{\text{iso},a} = \beta^{\infty}_a \boldsymbol{S}^{\infty}_{\text{iso}}(\bar{\boldsymbol{C}})$.

Daño

- Cuando se carga de forma cuasi-estática un elastómero, habitualmente la curva de descarga y posterior recarga se encuentra por debajo que la inicial: efecto Mullins.



Daño (cont.)

- Requisito: $W_0(\boldsymbol{C}) = W_{\mathrm{vol}}(J) + W_{0,\mathrm{iso}}(\bar{\boldsymbol{C}})$.
- Una variable interna escalar ζ se adopta de forma que $W = W(\boldsymbol{C}, \zeta)$.
- En particular,

$$W(\boldsymbol{C}, \zeta) = W_{\mathrm{vol}}(J) + (1 - \zeta)\, W_{0,\mathrm{iso}}(\bar{\boldsymbol{C}}),$$

  donde $(1 - \zeta)$ es el factor de reducción por daño.
- La variable de daño ζ depende de

$$\alpha(t) = \max_{s \in [0,t]} W_0(s),$$

  Por ejemplo (según Miehe) $\zeta(\alpha) = \zeta_\infty \left(1 - e^{-\alpha/\iota}\right)$.

Índice

Conclusiones

- La elasticidad lineal es válida para pequeñas deformaciones (generalmente inferiores al 5 %). La hiperelasticidad es la aproximación habitual para materiales que muestran grandes deformaciones elásticas.
- Todo material hiperelástico queda determinado por su función de densidad de energía de deformación W, función escalar de la deformación $\boldsymbol{E}$.
- Si el material es isótropo, W puede expresarse en función de los invariantes del tensor de Cauchy-Green por la derecha $\boldsymbol{C}$, que a su vez se puede expresar a partir de los alargamientos principales.

Ejercicios

1. Se ensaya a tracción uniaxial una barra con sección inicial A_0, constituída por un material neo-Hookeano incompresible con módulo de elasticidad inicial E_0. Se pide determinar la fuerza (normalizada con $E_0 A_0$) en función del alargamiento (hasta 2), analíticamente y usando FEAP.
2. Se infla un globo que inicialmente tiene diámetro 1 m y espesor 0,01 m, hasta alcanzar un diámetro de 5 m. Está constituído por una goma de módulo de elasticidad inicial 3 MPa, cuyo comportamiento se aproxima a un material neo-Hookeano incompresible. Se pide determinar la evolución del diámetro con la presión interior, tanto analíticamente como usando FEAP.

Ejercicios (cont.)

3. Un tubo de diámetro 1 m y espesor 0,01 m se infla mientras se impide su alargamiento longitudinal, hasta alcanzar un diámetro de 4 m. Está constituído por un caucho natural cuyo comportamiento a tracción uniaxial es el presentado en la figura siguiente. Se pide ajustar un modelo de material incompresible de Mooney-Rivlin, y usarlo para determinar la evolución del diámetro del cilindro con la presión interior, tanto analíticamente como utilizando FEAP.

Ejercicios (cont.)