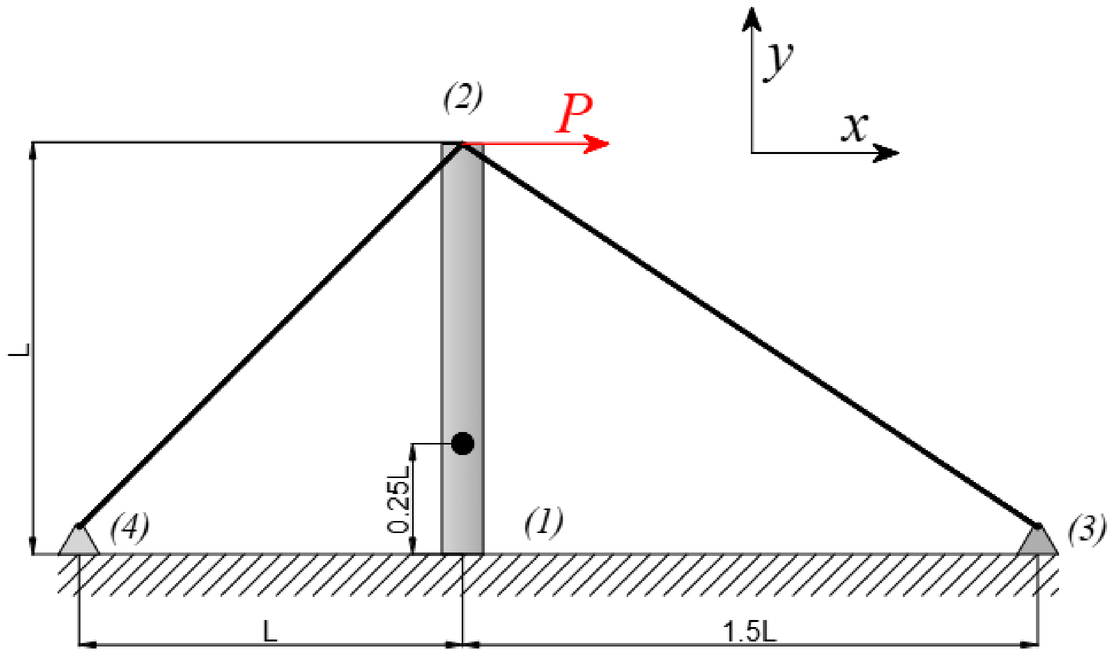
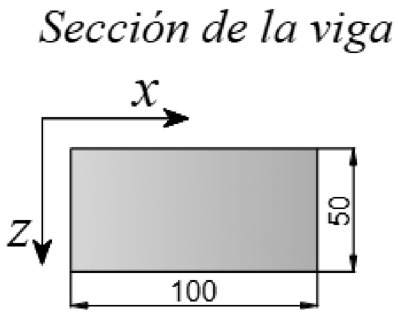
Problema 1.– (3.0 Pts.) La estructura de la Figura 1 es parte de un mecanismo de una máquina para limpiar troncos, se identifican tres elementos, una viga y dos tirantes (cuerdas). Si las piezas se construyen de acero SAE 1020 (E = 200 GPa, ν = 0.3 σ_y = 250 MPa), la viga tiene una sección rectangular maciza de $100x50mm^2$, los tirantes una sección circular de 10 mm de diámetro, y la carga P= 10000 N, se pide:

1. Determinar el desplazamiento del nodo 2, y en el punto marcado ubicado a 0.25L desde la empotradura. Considere L = 1m, y que los tirantes se amarran al suelo a la misma altura que la empotradura de la viga (1.8 pts)
2. Si la carga P se duplica e invierte su sentido, calcule los efuerzos en la empotradura de la viga, y el esfuerzo axial de las cuerdas. Estime además los nuevos desplazamientos (1.2 pts)



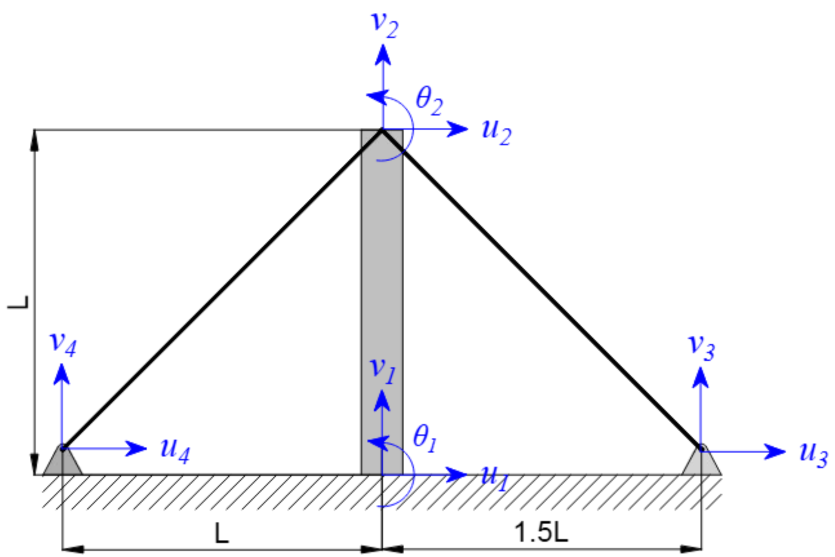


Desarrollo

- La cuerda de la derecha no trabaja al estar sometida a compresión

Problema 1

1) Para la primera solicitación la cuerda derecha no actua



Matriz de rigidez de la viga ($I = 4.16 \cdot 10^{-6} m^4$, $A = 0.005 m^2$)

$$K_v = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10.0 & 0.0 & -5.0 & -10.0 & -0.0 & -5.0 \\ 0.0 & 1000.0 & 0.0 & -0.0 & -1000.0 & 0.0 \\ -5.0 & 0.0 & 3.33 & 5.0 & -0.0 & 1.67 \\ -10.0 & -0.0 & 5.0 & 10.0 & 0.0 & 5.0 \\ -0.0 & -1000.0 & -0.0 & 0.0 & 1000.0 & -0.0 \\ -5.0 & 0.0 & 1.67 & 5.0 & -0.0 & 3.33 \end{bmatrix} \end{array} 10^6$$

Matriz de rigidez barra:

$$K_{barra} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_4 & v_4 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5.55 & 5.55 & -5.55 & -5.55 \\ 5.55 & 5.55 & -5.55 & -5.55 \\ -5.55 & -5.55 & 5.55 & 5.55 \\ -5.55 & -5.55 & 5.55 & 5.55 \end{bmatrix} \end{array} 10^6 \frac{N}{m}$$

- Ensamblamos

Matriz de rigidez global

$$K_g = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10.0 & 0.0 & -5.0 & -10.0 & -0.0 & -5.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1000.0 & 0.0 & -0.0 & -1000.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -5.0 & 0.0 & 3.33 & 5.0 & -0.0 & 1.67 & 0.0 & 0.0 \\ -10.0 & -0.0 & 5.0 & 15.55 & 5.55 & 5.0 & -5.55 & -5.55 \\ -0.0 & -1000.0 & -0.0 & 5.55 & 1005.55 & -0.0 & -5.55 & -5.55 \\ -5.0 & 0.0 & 1.67 & 5.0 & -0.0 & 3.33 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -5.55 & -5.55 & 0.0 & 5.55 & 5.55 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -5.55 & -5.55 & 0.0 & 5.55 & 5.55 \end{bmatrix} \end{array} 10^6 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ M_2 \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez global

$$
K_g = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \quad u_1 & \quad v_1 & \quad \theta_1 & \quad u_2 & \quad v_2 & \quad \theta_2 & \quad u_4 & \quad v_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
10.0 & 0.0 & -5.0 & -10.0 & -0.0 & -5.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 1000.0 & 0.0 & -0.0 & -1000.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-5.0 & 0.0 & 3.33 & 5.0 & -0.0 & 1.67 & 0.0 & 0.0 \\
-10.0 & -0.0 & 5.0 & 15.55 & 5.55 & 5.0 & -5.55 & -5.55 \\
-0.0 & -1000.0 & -0.0 & 5.55 & 1005.55 & -0.0 & -5.55 & -5.55 \\
-5.0 & 0.0 & 1.67 & 5.0 & -0.0 & 3.33 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & -5.55 & -5.55 & 0.0 & 5.55 & 5.55 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & -5.55 & 5.55 & 0.0 & 5.55 & 5.55
\end{bmatrix}
\end{array} 10^6 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ M_2 \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix}
$$

Resolviendo la submatriz de fuerzas conocidas ($F_{2x} = 10000N$, $F_{2Y} = 0N$, $M_2 = 0Nm$)

$$\begin{bmatrix} 15.55 & 5.55 & 5.0 \\ 5.55 & 1005.55 & -0.0 \\ 5.0 & -0.0 & 3.33 \end{bmatrix} 10^6 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u_2 = 1.25 \cdot 10^3 \text{ m} \\ v_2 = -6.88 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ \theta_2 = -1.87 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Utilizando las funciones de interpolación:

$$u(0.25) = (\frac{3}{L^2}0.25^2 - \frac{2}{L^3}0.25^3)u_2 + (\frac{-1}{L}0.25^2 + \frac{1}{L^2}0.25^3)\theta_2 = -1.0711 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\theta(0.25) = (\frac{6}{L^2}0.25 - \frac{6}{L^3}0.25^2)u_2 + (\frac{-2}{L}0.25 + \frac{3}{L^2}0.25^2)\theta_2 = -8.17967 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$v(0.25) = -6.88 \cdot 10^{-6}\frac{0.25}{1} = -1.7209 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

2) Para este caso, se utiliza la matriz de rigidez de la barra 2-3.

$$K_{barra} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_3 & \quad v_3 & \quad u_2 & \quad v_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 6.03 & -4.02 & -6.03 & 4.02 \\ -4.02 & 2.68 & 4.02 & -2.68 \\ -6.03 & 4.02 & 6.03 & -4.02 \\ 4.02 & -2.68 & -4.02 & 2.68 \end{bmatrix} \end{array} 10^6 \frac{N}{m}$$

Por lo que ahora se debe resolver el siguiente sistema:

$$K_g = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10.0 & 0.0 & -5.0 & -10.0 & -0.0 & -5.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1000.0 & 0.0 & -0.0 & -1000.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -5.0 & 0.0 & 3.33 & 5.0 & -0.0 & 1.67 & 0.0 & 0.0 \\ -10.0 & -0.0 & 5.0 & 16.03 & -4.02 & 5.0 & -6.03 & 4.02 \\ -0.0 & -1000.0 & -0.0 & -4.02 & 1002.68 & -0.0 & 4.02 & -2.68 \\ -5.0 & 0.0 & 1.67 & 5.0 & -0.0 & 3.33 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -6.03 & 4.02 & 0.0 & 6.03 & -4.02 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.02 & -2.68 & 0.0 & -4.02 & 2.68 \end{bmatrix} \end{array} 10^6 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ M_2 \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix}$$

Resolviendo la submatriz de fuerzas conocidas ($F_{2x} = -20000N$, $F_{2Y} = 0N$, $M_2 = 0Nm$)

$$\begin{bmatrix} 16.03 & -4.02 & 5.0 \\ -4.02 & 1002.68 & -0.0 \\ 5.0 & -0.0 & 3.33 \end{bmatrix} 10^6 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u_2 = -2.35 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ v_2 = -9.42 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ \theta_2 = 3.52 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Para las fuerzas:

$$\begin{bmatrix} -10.0 & -0.0 & -5.0 \\ -0.0 & -1000.0 & 0.0 \\ 5.0 & -0.0 & 1.67 \\ -6.03 & 4.02 & 0.0 \\ 4.02 & -2.68 & 0.0 \end{bmatrix} 10^6 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5871.23665446N \\ 9419.175N \\ -5871.236Nm \\ 14128.763N \\ -9419.17556369N \end{bmatrix}$$

El esfuerzo normal en el punto de mayor compresión:

$$\sigma_{xx} = -|\frac{M_2C}{I}| - |\frac{F}{A}| = -35.3448MPa$$

- Para la cuerda:

$$\sigma_N = \frac{E}{L}[-\cos(\theta) \quad -\sin(\theta) \quad \cos(\theta) \quad \sin(\theta)] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.35 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \\ -9.42 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} \end{bmatrix} = 217.65 MPa$$