

Comportamiento mecánico de materiales – 15908

Resumen de mecánica de medios continuos

Dr Ing. Claudio García Herrera

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica
claudio.garcia@usach.cl

Santiago de Chile, 18 de Abril de 2011



Índice

1 Cinemática

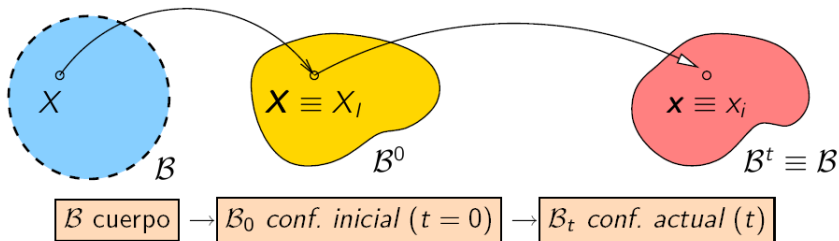
2 Esfuerzos

- Tensor de Cauchy
- Tensor de Kirchhoff
- Tensor de Cauchy corrotacional
- Tensor de Piola
- Tensor 2º de Piola Kirchhoff
- Ensayo de tracción uniaxial

3 Ecuaciones de balance

4 Ecuaciones constitutivas

Cinemática: Movimiento de un cuerpo



- Partículas: $X \in \mathcal{B}$
- $\mathbf{X} \equiv X_I$: coordenadas Lagrangianas o materiales (definen partícula o punto material)
- Movimiento: $\phi_t : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_t$; $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X})$; $\mathbf{X} = \phi_t^{-1}(\mathbf{x})$.
- $\mathbf{x} \equiv x_i$: coordenadas Eulerianas o espaciales (definen posición o punto espacial)
- Desplazamientos: $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{1}^T \cdot \mathbf{X}$; $u_i = x_i - \delta_{pi} X_p$

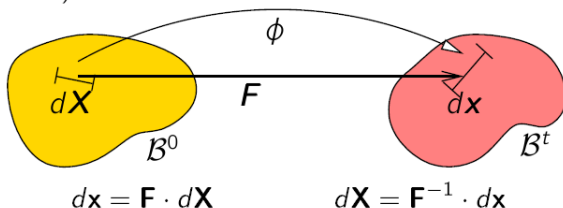
Cinemática: Gradiente de deformación (1)

- Definición:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \phi(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}; \quad F_{iJ} = x_{i,J} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \phi^{-1}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}; \quad F_{Ij}^{-1} = X_{I,j} = \frac{\partial X_I}{\partial x_j}$$

- Interpretación: transformación (lineal) de un vector tangente $d\mathbf{X}$ (elemento de arco): $d\mathbf{X} \mapsto d\mathbf{x}$



Cinemática: Gradiente de deformación (2)

Observaciones:

- El cambio de volumen viene dado por el determinante,

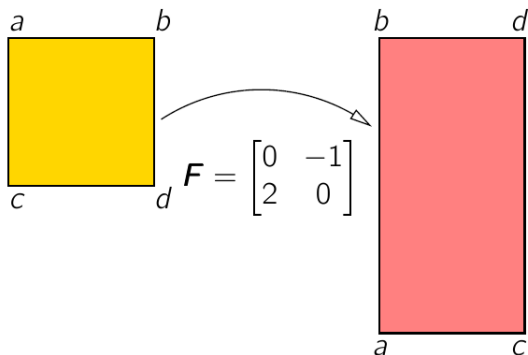
$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{dV}{dV^0}$$

(condición de impenetrabilidad: $J > 0$)

- $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ es un tensor de segundo orden *bipunto*, con dos “patas” o índices (“ i ” y “ J ” en F_{ij}), una en la configuración actual ($d\mathbf{x} \equiv dx_i$) y otra en la original ($d\mathbf{X} \equiv dX_J$).

(esta matización podría obviarse si se consideran ambas configuraciones, variedades diferenciales, inmersas en un mismo espacio euclídeo \mathbb{R}^3).

Ejemplo: Gradiente de deformación



$$d\mathbf{X}_{ab} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$d\mathbf{X}_{ca} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

$$d\mathbf{x}_{ab} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix};$$

$$d\mathbf{x}_{ca} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Descomposición polar del Gradiente de deformación

- Para cualquier tensor \mathbf{F} con $\det \mathbf{F} > 0$, existen descomposiciones únicas:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (2)$$

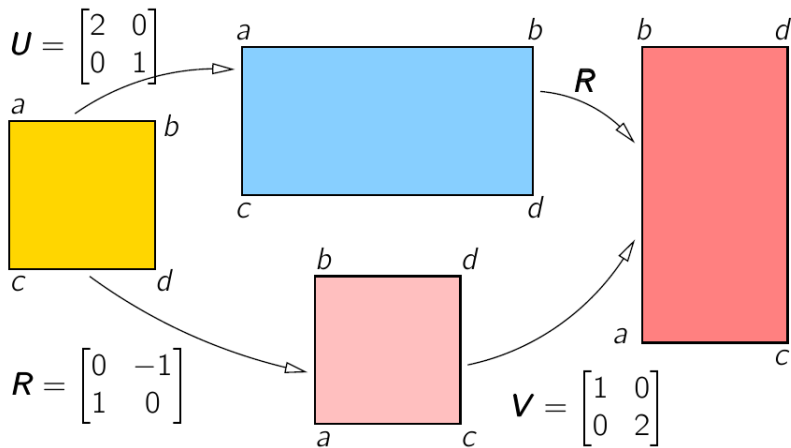
$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (3)$$

(2): *estiramiento* ("stretch") \mathbf{U} seguido de rotación \mathbf{R} ;

(3): rotación \mathbf{R} seguida de estiramiento \mathbf{V}

- \mathbf{R} rotación propia: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ (ortogonal), $\det \mathbf{R} = +1$
- \mathbf{U} , \mathbf{V} : tensores de *estiramiento* por la derecha y por la izquierda respectivamente. Simétricos, definidos positivos y únicos

Ejemplo de Descomposición polar



Tensores de Cauchy Green (1)

- ◇ Cauchy-Green por la derecha:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2; \quad C_{IJ} = F_{pI} F_{pJ}$$

- ◇ Cauchy-Green por la izquierda (tensor de Finger):

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2; \quad b_{ij} = F_{iP} F_{jP}$$

- ◇ *Interpretación:* transformación de longitud de un elemento

$$dl^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} \cdot d\mathbf{X})$$
$$dL^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{b}^{-1} \cdot d\mathbf{x})$$

Tensores de Cauchy Green (2)

Ejemplo anterior:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Tensores de Cauchy Green (3)

- En un caso general, ni \mathbf{C} ni \mathbf{b} son diagonales, aunque al ser simétricos y definidos positivos admitirán una descomposición espectral de la forma

$$\mathbf{C} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A^2 \mathbf{N}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)}; \quad (4)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^2 \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)}; \quad (5)$$

$\lambda_a = \delta_{aA} \lambda_A$: alargamientos principales (mismos valores)

$\mathbf{n}^{(a)} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}^{(A)} \delta_{aA}$: direcciones principales de alargamiento

- Para el ejemplo anterior:

$$\lambda_1 = 2, \quad \mathbf{N}^{(1)} = (1, 0), \quad \mathbf{n}^{(1)} = (0, 1);$$

$$\lambda_2 = 1, \quad \mathbf{N}^{(2)} = (0, 1), \quad \mathbf{n}^{(2)} = (-1, 0).$$

Tensores de Cauchy Green (4)

- Diagonalización: solución de problema de autovalores

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{N}^{(A)} = \lambda_A^2 \mathbf{N}^{(A)}; \quad (6)$$

- Ecuación característica:

$$0 = p(\lambda^2) = -\det[\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{1}] = +\lambda^6 - I_1 \lambda^4 + I_2 \lambda^2 - I_3 \quad (7)$$

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{C}; \quad I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr } \mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)); \quad I_3 = \det \mathbf{C}. \quad (8)$$

- Autovalores de \mathbf{C} coinciden con los de \mathbf{U}, \mathbf{V} :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{N}^{(A)} = \lambda_A \mathbf{N}^{(A)}; \quad (9)$$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A \mathbf{N}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)}; \quad (10)$$

Tensores de Cauchy Green (5)

Observaciones:

- En general, \mathbf{R} y \mathbf{F} operan sobre direcciones principales de la siguiente forma:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{N}^{(A)} = \delta_{Aa} \mathbf{n}^{(a)} \quad \left(= \mathbf{n}^{(A)} \right); \quad (11)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}^{(A)} = \delta_{Aa} \lambda_a \mathbf{n}^{(a)} \quad \left(= \lambda_A \mathbf{n}^{(A)} \right); \quad (12)$$

- Para el caso particular de un movimiento rígido (deformación nula), se verifica

$$\mathbf{F} = \mathbf{R};$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{C} = \mathbf{b} = \mathbf{1};$$

$$\lambda_A = 1 \quad (A = 1, 2, 3)$$

Tensor de Green-Lagrange (1)

Se define como:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \\ E_{IJ} &= \frac{1}{2}(C_{IJ} - \delta_{IJ}) = \frac{1}{2}(x_{p,I}x_{p,J} - \delta_{IJ})\end{aligned}\tag{13}$$

Los dos índices están referidos a la configuración original. En función de los desplazamientos,

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}(u_{I,J} + u_{J,I} + \underbrace{u_{p,I}u_{p,J}}_{\text{cuadrático}})$$

Interpretación:

transformación de longitud $d\mathbf{X} = \mathbf{T}dL \mapsto d\mathbf{x} = \mathbf{t}dl$

$$d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(dl^2 - dL^2); \quad \mathbf{T} \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{T}) = \frac{dl^2 - dL^2}{2dL^2} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$$

Tensor de Green-Lagrange (2)

Ejemplo anterior:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T} \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{T}) = \frac{3}{2} = \frac{4-1}{2 \cdot 1}$$

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T} \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{T}) = 0$$

Tensor de Almansi-Euler (1)

Se define como:

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \\ e_{ij} &= \frac{1}{2}(\delta_{ij} - b_{ij}^{-1}) = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - X_{P,i} X_{P,j})\end{aligned}\tag{14}$$

Los dos índices están referidos a la configuración actual. En función de los desplazamientos,

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - \underbrace{u_{p,i} u_{p,j}}_{\text{cuadrático}})$$

Interpretación:

transformación de longitud $d\mathbf{X} = \mathbf{T}dL \mapsto d\mathbf{x} = \mathbf{t}dL$

$$d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} \cdot d\mathbf{x} = \frac{1}{2}(dl^2 - dL^2); \quad \mathbf{t} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{t}) = \frac{dl^2 - dL^2}{2dl^2} = \frac{1}{2}(1 - \lambda^{-2})$$

Tensor de Almansi-Euler (2)

Ejemplo anterior:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3/8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{t} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{t}) = 0$$

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{t} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{t}) = \frac{3}{8} = \frac{4-1}{2 \cdot 4}$$

Tensores de deformación generalizados

- Tensores *materiales*:

$$\mathbf{E}^{(n)} = \frac{1}{n}(\mathbf{U}^n - \mathbf{1}) = \sum_{A=1}^3 \frac{1}{n} (\lambda_A^n - 1) \mathbf{N}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)}; \quad (15)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}) = \sum_{A=1}^3 \frac{1}{2} (\lambda_A^2 - 1) \mathbf{N}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)} \quad (16)$$

- Tensores *espaciales*:

$$\mathbf{e}^{(n)} = \frac{1}{n}(\mathbf{1} - \mathbf{V}^{-n}) = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{n} (1 - \lambda_a^{-n}) \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)}; \quad (17)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{V}^{-2}) = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{2} (1 - \lambda_a^{-2}) \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)}; \quad (18)$$

Tensores de deformación generalizados

♣ Tensores logarítmicos (Hencky)

($\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n}(\lambda^n - 1) = \ln \lambda$);

$$\mathbf{E}^{(0)} = \ln \mathbf{U} = \sum_{A=1}^3 \ln \lambda_A \mathbf{N}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)};$$

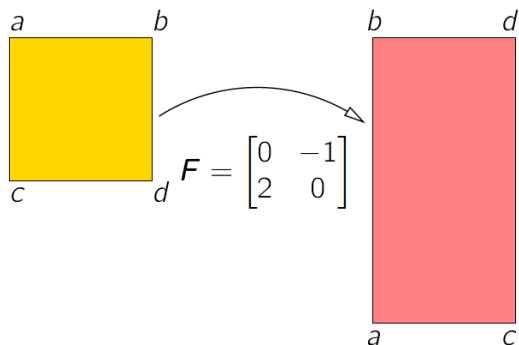
$$\mathbf{e}^{(0)} = \ln \mathbf{V} = \sum_{a=1}^3 \ln \lambda_a \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)};$$

♣ Tensores nominales (Biot)

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{U} - \mathbf{1} = \sum_{A=1}^3 (\lambda_A - 1) \mathbf{N}^{(A)} \otimes \mathbf{N}^{(A)};$$

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{1} - \mathbf{V}^{-1} = \sum_{a=1}^3 (1 - \lambda_a^{-1}) \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)};$$

Ejemplo: Comparación con tensor lineal (1)



$$d\mathbf{X}_{ab} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$d\mathbf{X}_{ca} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

$$d\mathbf{x}_{ab} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix};$$

$$d\mathbf{x}_{ca} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo: Comparación con tensor lineal (2)

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_J} = \frac{\partial(x_i - X_P \delta_{Pi})}{\partial X_J} = F_{iJ} - \delta_{iJ}$$

Resulta

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_J} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2}([u_{i,j}] + [u_{j,i}]) = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Green-Lagrange

$$[\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3/8 \end{bmatrix}$$

Almansi-Euler

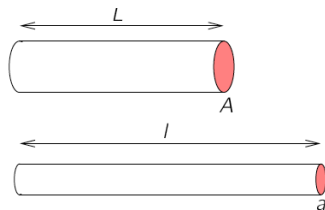
$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

Lineal

Aplicación al caso unidimensional (1)

$$\Delta l = l - L$$

$$\lambda = \frac{l}{L}$$

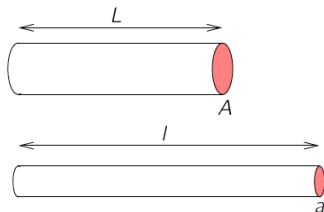


- Green-Lagrange: $E = \frac{l^2 - L^2}{2L^2} = \frac{\Delta l}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{L} \right)^2 = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$
- Almansi-Euler: $e = \frac{l^2 - L^2}{2l^2} = \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \lambda^{-2})$
- Gradiente deformación: $F = \frac{l}{L} = \lambda$
- Cauchy-Green: $C = b = \frac{l^2}{L^2} = \lambda^2$

Aplicación al caso unidimensional (2)

$$\Delta l = l - L$$

$$\lambda = \frac{l}{L}$$

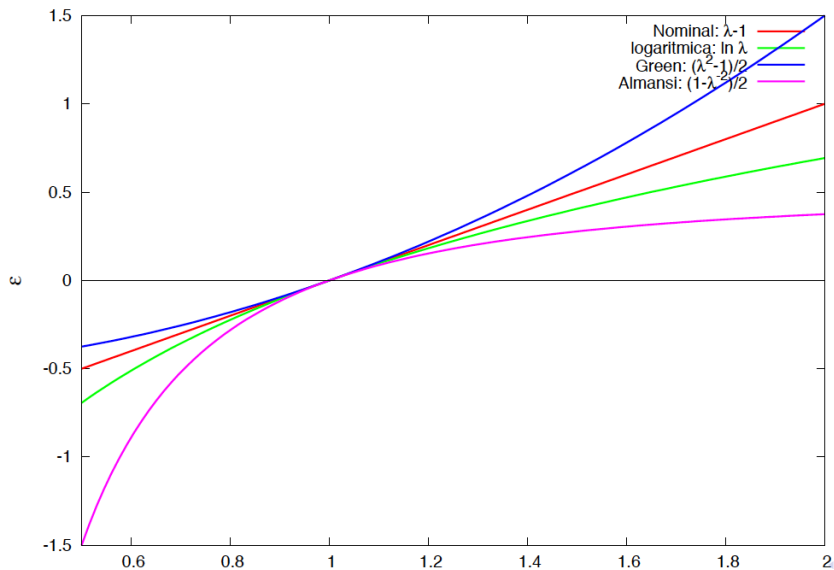


- Deformación lineal: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{L} \approx \frac{\Delta l}{l} = \lambda - 1 \approx 1 - \lambda^{-1}$
- Deformación logarítmica o natural:
$$\varepsilon_n = \int_0^t \dot{\gamma} dt = \int_0^t \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{L}\right) = \ln \lambda$$
- Deformación nominal o «ingenieril»: $\varepsilon_E = \frac{\Delta l}{L} = \lambda - 1$
- Velocidad de deformación: $\dot{\varepsilon} = d = \frac{\dot{l}}{l}$

Aplicación al caso unidimensional (3)

Alarg.	Almansi	nominal	logar.	Green
$\lambda = \frac{l}{L}$	$\frac{\Delta l}{L} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{L}\right)^2$	$\varepsilon_E = \frac{\Delta l}{L}$	$\ln\left(\frac{l}{L}\right)$	$\frac{\Delta l}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{L}\right)^2$
0.10	-4.95	-0.90	-2.30	-0.495
0.50	-1.50	-0.50	-0.69	-0.375
0.90	-0.1173	-0.10	-0.105	-0.0995
0.99	-0.0102	-0.01	-0.01005	-0.00995
1	0	0	0	0
1.01	+0.0099	+0.01	+0.00995	+0.0105
1.10	+0.0868	+0.10	+0.0953	+0.105
2.00	+0.375	+1.00	+1.69	+1.50
10.0	+0.495	+9.00	+2.30	+4.95

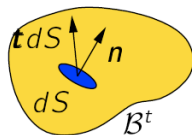
Aplicación al caso unidimensional (4)



Tensor de tensiones de Cauchy (1)

Fuerzas en medio continuo

- $\mathbf{n} dS$: elemento de superficie orientada
- $\mathbf{t} dS$: acción del medio de un lado sobre otro
 \mathbf{t} : *vector tracción* (F. / Ud. área)



Postulados de Cauchy:

- 1 $\mathbf{t}(\mathbf{n})$: en cada punto \mathbf{x} , es función continua de \mathbf{n} ;
En general tiene componentes normal y tangencial;
- 2 Acción-reacción: $\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n})$.

Teorema de Cauchy:

La dependencia de \mathbf{n} es lineal (\Leftrightarrow tensor de orden 2, $\boldsymbol{\sigma}$):

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}; \quad t_i = \sigma_{pi} n_p$$

Tensor de tensiones de Cauchy (2)

Observaciones

- $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) debido al principio del momento cinético (admitiendo que no existen momentos micropolares internos).
- $\boldsymbol{\sigma}$ son las **tensiones reales** (inglés: *true stress*).
- $\boldsymbol{\sigma}$ es una medida conjugada de la velocidad de deformación: su producto es la *potencia tensional específica* (tasa temporal de trabajo de deformación por unidad de volumen, en la configuración deformada):

$$\dot{W} = \frac{dW}{dt} = \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d} = \sigma_{pq}d_{pq} = \sigma_{pq}\dot{\epsilon}_{pq}$$
$$\delta W = \boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\epsilon}$$

Tensor de tensiones de Kirchhoff

Se define a partir del de Cauchy como:

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma},$$

siendo $J = \det(\mathbf{F}) = dV/dV^0$.

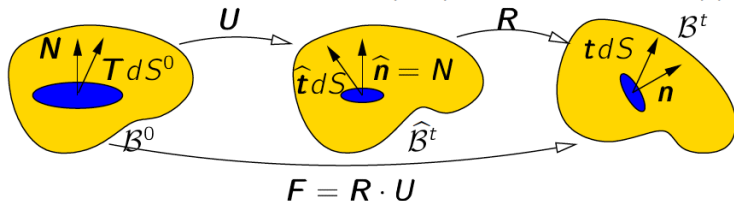
Observaciones:

- No se trata de una medida de tensiones real, sino que es ficticia
- conserva la simetría de $\boldsymbol{\sigma}$
- permite obtener la potencia tensional o trabajo de deformación por unidad de volumen en la configuración original (dV^0):

$$\dot{W}^0 = \boldsymbol{\tau}:\mathbf{d}; \quad \delta W^0 = \boldsymbol{\tau}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Configuración no rotada (1)

Transformada de un elemento de área (dS^0) y del vector tensión (\mathbf{t}):



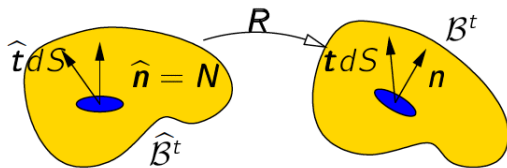
\mathcal{B}^0 : configuración original

$\hat{\mathcal{B}}^t$: configuración no rotada (deformada con \mathbf{U})

\mathcal{B}^t : configuración actual (deformada con \mathbf{U} y rotada con \mathbf{R})

- \mathbf{N} , \mathbf{n} : vectores unitarios; $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{N} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{n}$;

Tensión de Cauchy corrotacional (1)



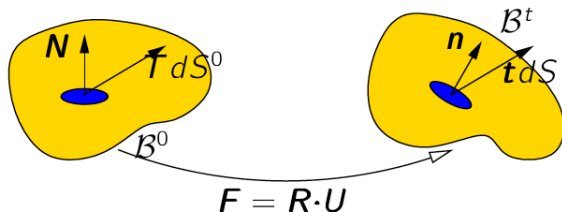
Se define en \widehat{B} ($\widehat{\mathbf{t}} = \mathbf{R} \cdot \widehat{\mathbf{t}}$, $\widehat{\mathbf{n}} = \mathbf{R} \cdot \widehat{\mathbf{n}}$):

$$\widehat{\mathbf{t}} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \widehat{\mathbf{n}}$$

resulta

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R})$$

Tensor de tensiones de Piola (1)



◇ Vector tensión en B^0 (definición convencional):

$$\mathbf{T} dS^0 = \mathbf{t} dS.$$

◇ Se Define el tensor de tensiones de Piola \mathbf{P} (también llamado 1.º de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{S}^{(1)}$) como aquel que relaciona \mathbf{N} y \mathbf{T} de forma que:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$$

Tensor de tensiones de Piola (2)

- ◇ Transformación de elemento de área orientada:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}dS^0 &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} dudv; \\ \mathbf{n}dS &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} dudv \\ &= \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \right) \wedge \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right) dudv \\ &= J \mathbf{F}^{-T} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \right) dudv;\end{aligned}$$

- ◇ es decir (fórmula de Nanson),

$$\mathbf{n}dS = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}dS^0$$

Tensor de tensiones de Piola (3)

- Empleando la definición convencional de vector tensión en la configuración original, así como la transformación de Piola, se obtiene la expresión en relación con el tensor de Cauchy:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}; \quad P_{iK} = J\sigma_{ip} \frac{\partial X_K}{\partial x_p}$$

- Algunos autores emplean el denominado *tensor de tensiones nominal*, que es el traspuesto que el de Piola.

$$\mathbf{S}^{(N)} = \mathbf{P}^T = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}; \quad \mathbf{T} = \mathbf{S}^{(N)T} \cdot \mathbf{N}$$

Tensor de tensiones de Piola (4)

Observaciones:

- \mathbf{P} es un tensor bipunto, con un índice en la configuración original y otro en la deformada
- \mathbf{P} no es simétrico (puede ser inconveniente para formulaciones numéricas)
- medida de tensión conjugada del gradiente de deformación, en la configuración de referencia:

$$\dot{W}^0 = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} ;$$

$$\delta W^0 = \mathbf{P} : \delta \mathbf{F}$$

Tensor de tensiones 2° de Piola Kirchhoff (1)

- ♠ Simetrizamos el tensor \mathbf{P} , para obtener $\mathbf{S}^{(2)}$:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(2)} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{S}^{(N)} \cdot \mathbf{F}^{-T} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T});$$

$$S_{IJ} = S_{IJ}^{(2)} = J X_{I,p} \sigma_{pq} X_{J,q}$$

Observaciones:

- $S_{IJ}^{(2)}$ tiene los dos índices en la configuración original
- Es simétrico, $S_{IJ} = S_{JI}$.
- Conjugado de la deformación de Green-Lagrange:

$$\dot{W}^0 = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}; \quad \delta W^0 = \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} = S_{PQ} \delta E_{PQ}$$

- Se trata de una entelequia sin significado físico directo, aunque resulta útil para describir el movimiento sobre la configuración original.

Resumen de medidas de tensión

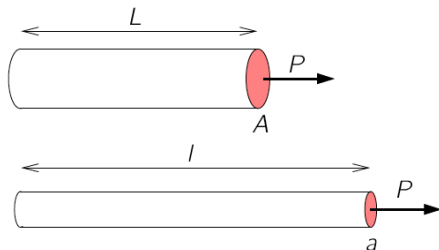
Resumen de tensiones

Cauchy	σ
Cauchy corrotacional	$\hat{\sigma} = \mathbf{R}^T \cdot (\sigma \cdot \mathbf{R})$
Kirchhoff	$\tau = J\sigma$
Piola	$\mathbf{P} = J\sigma \cdot \mathbf{F}^{-T}$
Nominal	$\mathbf{S}^{(N)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma$
Piola-Kirchhoff (2.º)	$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot (\sigma \cdot \mathbf{F}^{-T})$

Aplicación al caso unidimensional

$$J = \frac{V}{V_0} = \frac{al}{AL}$$

$$F = \frac{l}{L}$$



- Cauchy: $\sigma = \frac{P}{a}$
- Kirchhoff: $\tau = \sigma \frac{al}{AL} = \frac{P l}{A L}$
- Piola / Nominal: $S^{(1)} = \frac{P}{a} \frac{al}{AL} \frac{L}{l} = \frac{P}{A}$
- 2.º Piola-Kirchhoff: $S = S^{(2)} = \frac{P L}{A l}$

Derivada material

- La *derivada material* de una magnitud $\omega(\mathbf{x}, t) = \Omega(\mathbf{X}, t)$, sea ésta escalar, vector o tensor, se define como:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}},$$

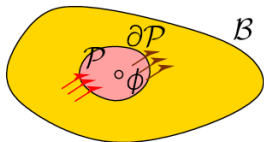
(se mide la derivada siguiendo la partícula, \mathbf{X}).

- Si se parte de una descripción Euleriana $\omega(\mathbf{x}, t)$, empleando la regla de la cadena:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{x}} \cdot \underbrace{\left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}}}_{\mathbf{v}=\dot{\mathbf{x}}} + \left. \frac{\partial \omega}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}; \quad \dot{\omega} = \nabla_{\mathbf{x}} \omega \cdot \mathbf{v} + \omega_{,t}$$

- $\omega_{,t} \stackrel{\text{def}}{=} \partial \omega / \partial t$: *velocidad espacial o Euleriana*
- $\nabla_{\mathbf{x}} \omega \cdot \mathbf{v}$: término convectivo

Teorema del transporte de Reynolds (1)



Establece la derivada material de una medida global de la cantidad de una magnitud ϕ en un subdominio cualquiera $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ (región material):

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \phi dV}_{(a)} = \underbrace{\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV}_{(b)} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{P}} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS}_{(c)}$$

donde:

- (a) Variación de ϕ poseída por el material que está en cada instante dentro de región material \mathcal{P} (derivada material)
- (b) $\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{P}} \phi dV$, Variación de ϕ dentro de región de control \mathcal{P}
- (c) Flujo neto (saliente) de ϕ a través de la frontera $\partial \mathcal{P}$

Teorema del transporte de Reynolds (2)

- Empleando el teorema de la divergencia:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \phi dV = \int_{\mathcal{P}} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_p} v_p + \phi \frac{\partial v_p}{\partial x_p} \right] dV$$

y empleando la definición de derivada material de ϕ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \phi dV = \int_{\mathcal{P}} \left[\frac{d\phi}{dt} + \phi \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \right] dV$$

Conservación de la masa

Sea $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}^0$ un recinto *material*, formado por un conjunto dado de partículas. La masa $M(\mathcal{P})$ de este recinto se conserva:

$$\frac{d}{dt} M(\mathcal{P}) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho dV = 0$$

Aplicando el th. de transporte de Reynolds (24) con $\phi = \rho$:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\rho} + \rho \frac{j}{J} = 0$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = J = \frac{dV}{dV^0}$$

y si el flujo es incompresible,

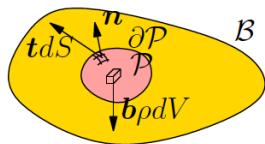
$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \text{cte.}$$

Lema de Reynolds:
$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho \phi dV = \int_{\mathcal{P}} \rho \dot{\phi} dV$$

Cantidad de movimiento (1)

Se define como $\mathbf{P}(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{v} dV$. El principio de balance establece que

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}(\mathcal{P}) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{t} dS + \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{b} dV$$



Aplicando el lema de Reynolds (27) y el th. de Gauss se obtiene:

$$\int_{\mathcal{P}} \left[\sigma_{pi,p} + \rho b_i - \rho \frac{dv_i}{dt} \right] dV = 0,$$

es decir,

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}; \quad \sigma_{pi,p} + \rho b_i = \rho \frac{dv_i}{dt}$$

(ecuaciones de Cauchy)

Cantidad de movimiento (2)

- Se pueden obtener también las ecuaciones realizando la integración en el dominio de la configuración original, \mathcal{P}^0 . Empleando el tensor de Piola:

$$P_{iJ,J} + \rho_0 b_{0i} = \rho_0 \frac{dv_i}{dt} \quad (29)$$

- En función del tensor de PK2:

$$\frac{\partial}{\partial X_P} \left(S_{KP} \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \right) + \rho_0 b_{0i} = \rho_0 \frac{dv_i}{dt} \quad (30)$$

Momento cinético

Se define el momento cinético de $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ como

$$\mathbf{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) \rho dV$$

El principio de balance enuncia:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) \rho dV = \int_{\partial \mathcal{P}} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{t}) dS + \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{b}) dV$$

Operando adecuadamente conduce a:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (31)$$

Es decir, el tensor de tensiones de Cauchy es *simétrico*. Esta propiedad la heredan todos los tensores que procedan de él mediante transformaciones simétricas: $\boldsymbol{\tau}$ (Kirchhoff), $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ (Cauchy corrotacional), $\mathbf{S}^{(2)}$ (2.º de Piola-Kirchhoff).

Ecuaciones constitutivas: Principios generales

- ① **Principio de determinismo:** la respuesta del material depende exclusivamente de las configuraciones previas al instante t :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{F} \left(\phi^{(t)}(\mathbf{X}) \right)$$

- ② **Principio de acción local:** la respuesta depende únicamente del movimiento en un cierto entorno de X . En los *materiales simples* esta dependencia se definen mediante la primera derivada de la deformación $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{G} \left(\mathbf{F}^{(t)}(\mathbf{X}) \right)$$

Principios generales (cont)

- 3 **Principio de objetividad:** La respuesta no depende de cambios en el sistema de referencia (traslaciones en el espacio o en el tiempo o *rotaciones rígidas*).
- 4 **Principio de invariancia material:** La respuesta no varía para transformaciones correspondientes a las simetrías propias del material.

Material elástico

- Sólo depende de la deformación respecto de la configuración de referencia, de la cual manifiesta una memoria perfecta, retornando a ella cuando se descarga:

$$\sigma = g(\mathbf{F}(\mathbf{X}))$$

- **Objetividad:** impone restricciones a la forma y dependencia de la función $g(\mathbf{F})$

Objetividad (1)

Traslación y rotación del sistema de referencia:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{c} + \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o), \quad \text{siendo } \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{1}$$

Esta transformación sólo afecta a la configuración actual, no a la configuración de referencia que ya quedó definida mediante las coordenadas lagrangianas \mathbf{X}

- Vectores definidos en la configuración actual B : $d\mathbf{x}' = \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{x}$
- Tensor de 2.º orden \mathbf{a} , definido en B : $\mathbf{a}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^T$
- Tensor material 2.º orden \mathbf{A} (en B_0): **no se ve alterado**.
- Gradiente de deformación: (sólo se transforma una pata)

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}' = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}$$

Objetividad (2)

- El tensor de tensiones de cauchy es un tensor espacial (en B) y por tanto objetivo:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T$$

- El tensor de Almansi-Euler es igualmente un tensor espacial objetivo:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{Q}^T$$

Objetividad (3)

- La objetividad de σ exige:

$$\sigma' = g(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{Q} \cdot \underbrace{g(\mathbf{F})}_{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T$$

- Considerando el caso particular $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$, y teniendo en cuenta la descomposición polar $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{R}^T \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \mathbf{U}$:

$$g(\mathbf{U}) = \mathbf{R}^T \cdot g(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}$$

\Downarrow

$$g(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) = \mathbf{R} \cdot g(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}^T$$

- $g(\mathbf{U})$ define la respuesta intrínseca del material, que debe ser rotada mediante \mathbf{R} .

Objetividad (4)

- Los tensor de Cauchy-Green (dcha.) y de Green-Lagrange son tensores materiales, invariantes frente a rotaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{C}' &= \mathbf{F}'^T \cdot \mathbf{F}' = (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{C} \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}\end{aligned}$$

- Por tanto, la respuesta intrínseca del material puede formularse también en función de \mathbf{C} ó de \mathbf{E} :

$$\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R} = \mathfrak{g}(\mathbf{U}) = \mathfrak{h}(\mathbf{C}) = \mathfrak{j}(\mathbf{E})$$

Objetividad (4)

- Tensor de tensiones 2.º de Piola-Kirchhoff

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

- La ecuación constitutiva se expresa para \mathbf{S} como:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= J(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U})^{-1} \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathfrak{g}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}^T) \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U})^{-T} \\ &= J\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathfrak{g}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}^{-1} \\ &= \mathfrak{H}(\mathbf{U})\end{aligned}$$

- O alternativamente, en función de otros tensores materiales de deformación:

$$\mathbf{S} = \mathfrak{H}(\mathbf{U}) = \mathfrak{J}(\mathbf{C}) = \mathfrak{L}(\mathbf{E})$$

Comportamiento mecánico de materiales – 15908

Resumen de mecánica de medios continuos

Dr Ing. Claudio García Herrera

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica
claudio.garcia@usach.cl

Santiago de Chile, 18 de Abril de 2011

