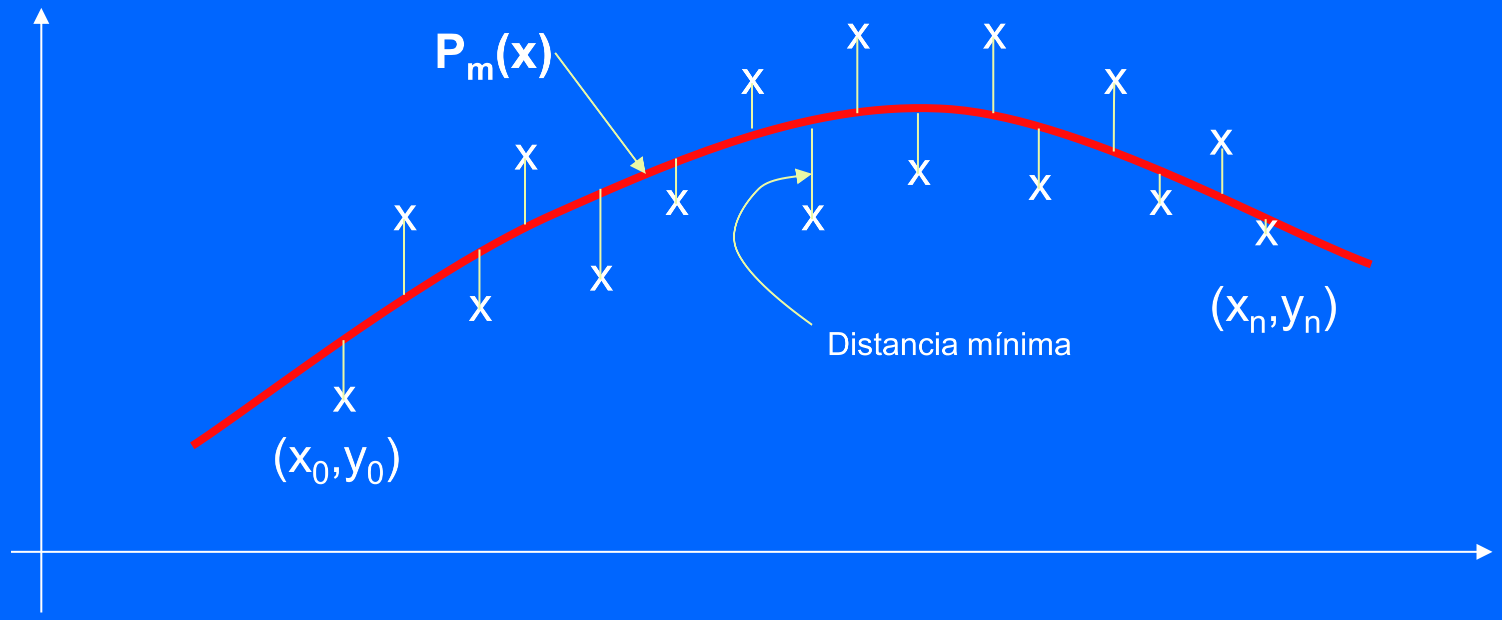
Ajuste de Curvas

Métodos mas utilizados

REGRESION	INTERPOLACION

Los Métodos Numéricos REGRESION

Aproximación polinomial por mínimos cuadrados



Objetivo: Obtener un polinomio o función que relaciones x e y

Los Métodos Numéricos REGRESION

Aproximación polinomial por mínimos cuadrados

El concepto

- Forma de aproximar una función g(x) a diferentes f(x).
- Nos proporciona información acerca de las relaciones existentes entre x e y
- Causa una suavización de la curva formada por un conjunto de datos y elimina en algún grado los errores de observador, de medición, de registro, de transmisión y de conversión

Se tiene una secuencia de datos dados por n puntos de la forma (x_i, y_i)
También se tiene un polinomio de grado m, con m<n de la forma

$$P_m(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

Como los puntos (xi,yi), son datos se evalúa los cuadrados de los residuos para obtener los coeficientes del polinomio P(x) de la forma que:

$$Q = \sum_{i=0}^{n} r_i^2 = \sum_{i=0}^{n} \left[P_m(x_i) - y_i \right]^2$$

Sea mínima

Sea m=2 entonces

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$Q = \sum_{i=0}^{n} \left[P_m(x_i) - y_i \right]^2 = 0 \qquad Q = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2) \right]^2 = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2) \right] = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=0}^{n} x_i \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2) \right] = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2) \right] = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left[y_i-(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2)\right]=\sum y_i-\sum a_0-\sum a_1x_i-\sum a_2x_i^2=0$$

$$\sum_{i=0}^{n}x_i\left[y_i-(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2)\right]=\sum x_iy_i-\sum a_0x_i-\sum a_1x_i^2-\sum a_2x_i^3=0$$

$$\sum_{i=0}^{n}x_i^2\left[y_i-(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2)\right]=\sum x_i^2y_i-\sum a_0x_i^2-\sum a_1x_i^3-\sum a_2x_i^4=0$$

$$\begin{aligned}\sum y_i &= \sum a_0+\sum a_1x_i+\sum a_2x_i^2\\ \sum x_iy_i &= \sum a_0x_i+\sum a_1x_i^2+\sum a_2x_i^3\\ \sum x_i^2y_i &= \sum a_0x_i^2+\sum a_1x_i^3+\sum a_2x_i^4\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_iy_i \\ \sum x_i^2y_i \end{Bmatrix}$$

CASO GENERAL

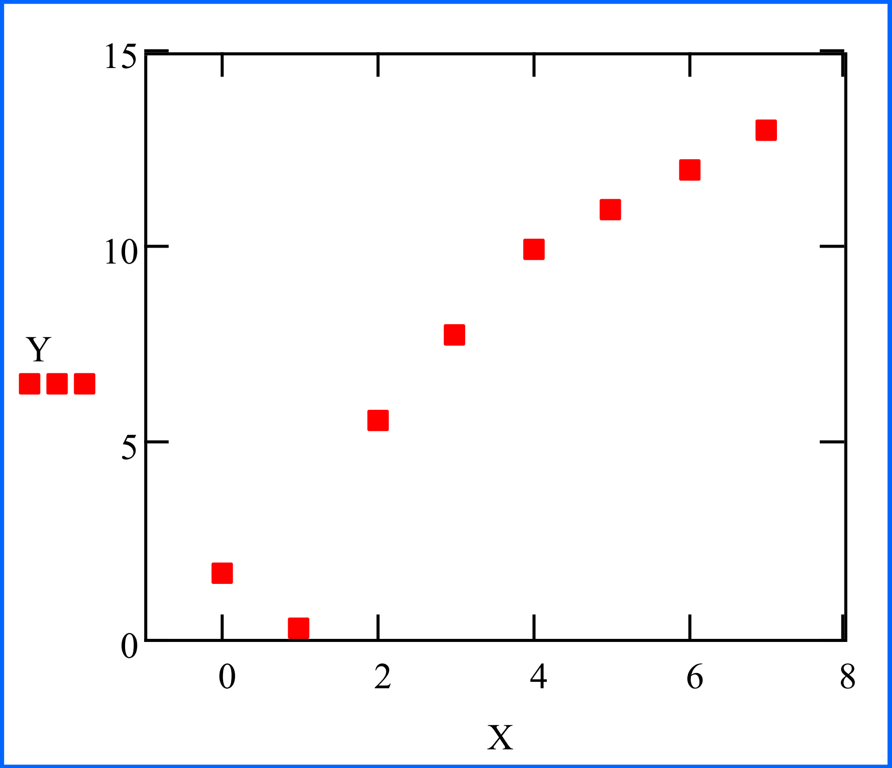
$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 \cdots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \cdots & \sum x_i^{m+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \cdots & \sum x_i^{m+2} \\ & & \vdots & \\ \sum x_i^m \cdots & & & ..\sum x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^m y_i \end{Bmatrix}$$

$$[C]\{a\} = \{b\}$$

$$\{a\} = [C]^{-1}\{b\}$$

Ejemplo:
Se tiene la siguiente secuencia de datos:

X	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
Y	1.7	0.3	5.6	7.8	10.	11.	12.	14.



Se prueba un polinomio de 2º

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

m=2

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{Bmatrix}$$

$$n+1 = 9$$

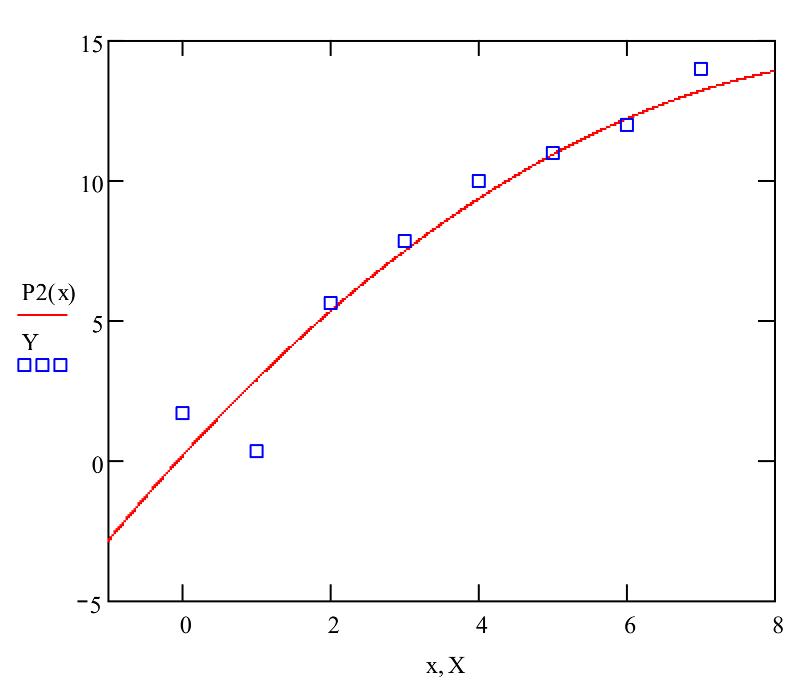
$$\sum x_i = 28 \qquad \sum x_i^2 = 140 \qquad \sum x_i^3 = 784 \qquad \sum x_i^4 = 4676$$

$$\sum y_i = 61.4 \qquad \sum x_i y_i = 292.9 \qquad \sum x_i^2 y_i = 1597$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 28 & 140 \\ 28 & 140 & 784 \\ 140 & 784 & 4676 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 61.4 \\ 292.9 \\ 1597 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.115 \\ 2.879 \\ -0.145 \end{Bmatrix}$$

$$P(x) = 0.115 + 2.879x - 0.145x^2$$



Se prueba un polinomio de 3º

$$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

m=3

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \\ \sum x_i & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \sum x_i^3 y_i \end{Bmatrix}$$

$n+1=9$

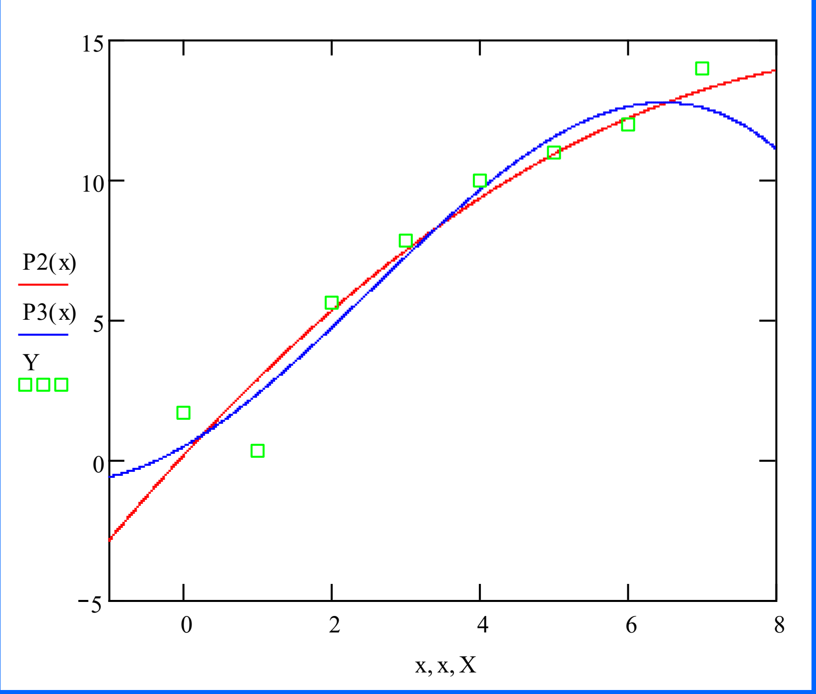
$\sum x_i = 28$ $\quad \sum x_i^2 = 140$ $\quad \sum x_i^3 = 784$ $\quad \sum x_i^4 = 467$ $\quad \sum x_i^5 = 29008$ $\quad \sum x_i^6 = 184820$

$\sum y_i = 61.4$ $\quad \sum x_i y_i = 292.9$ $\quad \sum x_i^2 y_i = 1597$ $\quad \sum x_i^3 y_i = 9321.7$

$$\begin{bmatrix} 9 & 28 & 140 & 784 \\ 28 & 140 & 784 & 4676 \\ 140 & 784 & 4676 & 29008 \\ 784 & 4676 & 29008 & 184820 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 61.4 \\ 292.9 \\ 1597 \\ 9321.7 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.446 \\ 1.519 \\ 0.408 \\ -0.054 \end{Bmatrix}$$

$$P(x) = 0.446 + 1.519x + 0.408x^2 - 0.054x^3$$



¿Cual de las soluciones es mejor?

La forma intuitiva para determinar cual de las curvas es la que mejor representa el comportamiento de los datos, nos indica que la suma de las distancias al cuadrado sea lo mas próxima a cero.

$$Q = \sum_{i=0}^{n} r_i^2 = \sum_{i=0}^{n} \left[P_m(x_i) - y_i \right]^2$$

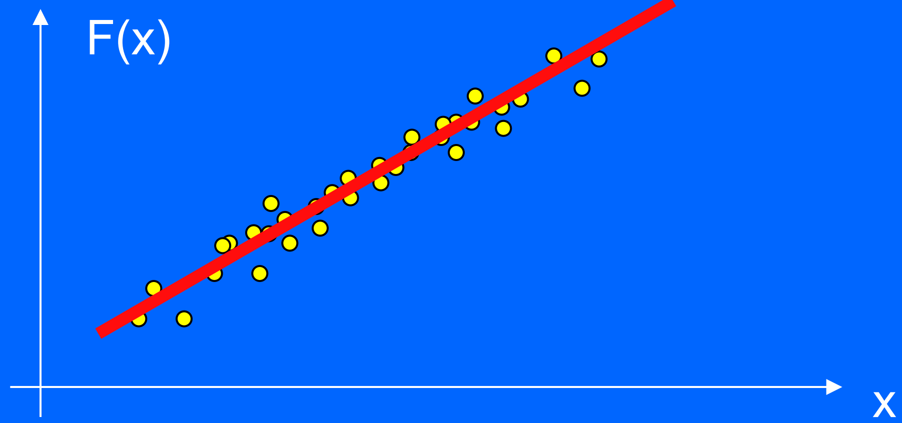
$$R^2 = \frac{\sum_{i=0}^{n} \left[P_m(x_i) - y_i \right]^2}{\sum_{i=0}^{n} \left[y_i - \bar{y} \right]^2}$$

Coeficiente de correlación

R cuadrática	=0.9426
R cúbica	=0.9492

Regresión lineal:

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$



$$Q = \sum_{i=0}^{n} \left[P_m(x_i) - y_i \right]^2 = 0 \qquad Q = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i) \right]^2 = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i) \right] = 0$$

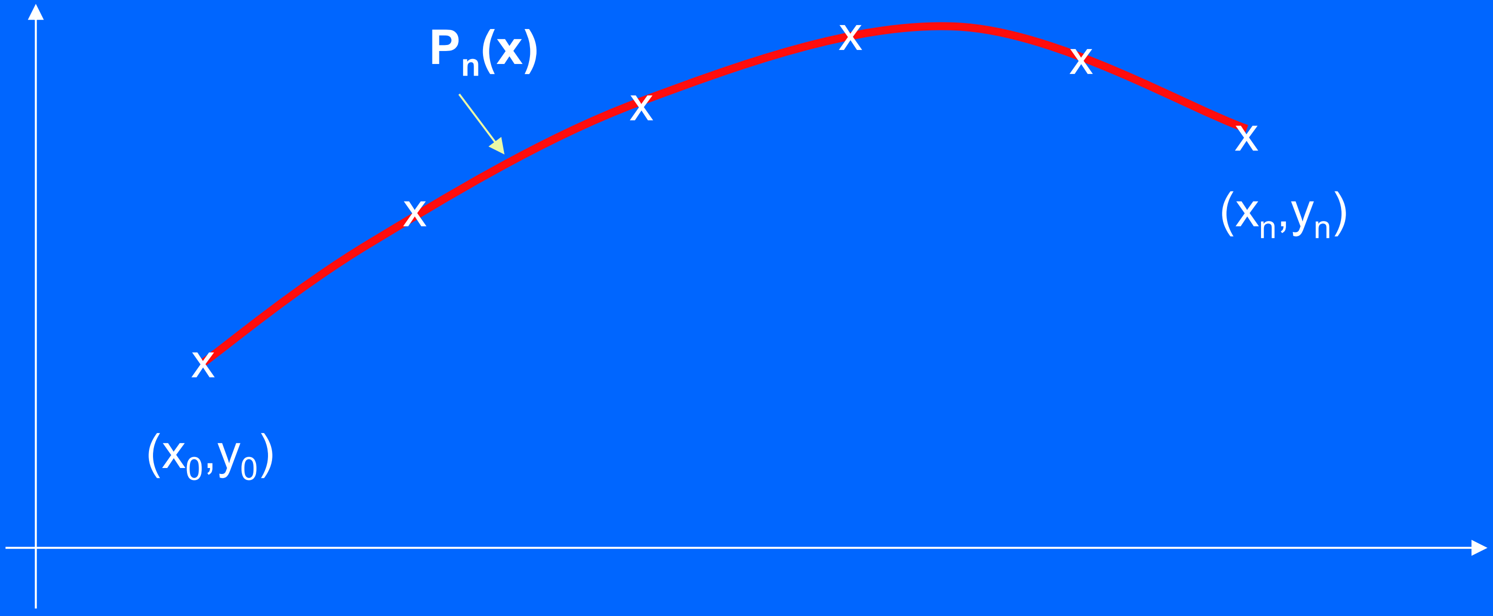
$$\frac{\partial Q}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=0}^{n} x_i \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i \right] = 0$$

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{Bmatrix}$$

Los Métodos Numéricos   INTERPOLACION

Aproximación polinomial mediante polinomio de newton



Objetivo: Obtener un polinomio que relaciones x e y

Los Métodos Numéricos INTERPOLACION

El concepto

- Forma de aproximar una función g(x) a diferentes polinomios f(x).

- Nos proporciona información acerca de las relaciones existentes entre x e y

- La función polinomial obtenida pasa por cada uno de los puntos o evaluaciones de función inicial g(x)

Se tiene una secuencia de datos dados por n puntos de la forma (x_i,y_i)
También se tiene un polinomio de grado m, con m=n-1 de la forma

$$P_m(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

Como se tienen n puntos, el polinomio de ajuste debe ser de grado n-1 y como debe pasar por todos aquellos puntos se debe cumplir que:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \quad \cdots \quad (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$$

$$y_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_{n-1} x_0^n$$

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{n-1} x_1^n$$

$$\vdots$$

$$y_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{n-1} x_n^n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$$[X]\{a\} = \{y\}$$

Se obtienen los coeficientes invirtiendo la matriz:

$$\{a\} = [X]^{-1}\{y\}$$

Sea n=3

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

$$y_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2$$
$$y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2$$
$$y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

$$a_0 = \frac{-x_0^2(y_1 x_2 - y_2 x_1) + x_1^2(y_0 x_2 - y_2 x_0) + x_2^2(y_1 x_0 - y_0 x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_0 - x_1)}$$

$$a_1 = \frac{x_0^2(y_1 - y_2) + x_1^2(y_2 - y_0) + x_2^2(y_0 - y_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_0 - x_1)}$$

$$a_2 = \frac{x_0(y_2 - y_1) + x_1(y_0 - y_2) + x_2(y_1 - y_0)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_0 - x_1)}$$

Ejemplo:

Se tienen 3 puntos con los valores dados en la tabla I, Determine el polinomio de interpolación.

X	1	3	4
Y	3.78	20,56	35,67

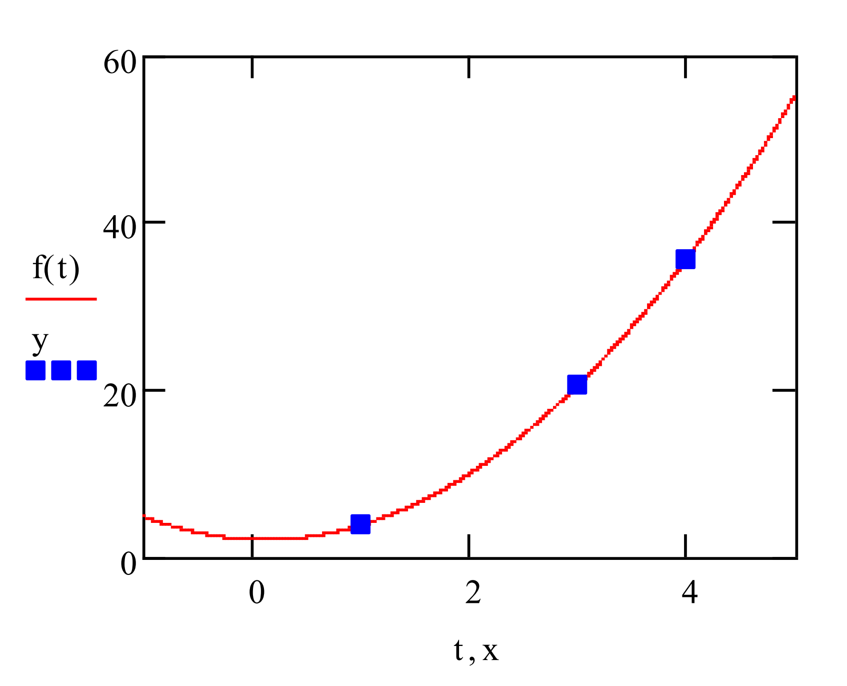
Solución:

Como se tienen 3 puntos, el polinomio debe ser cuadrático de la forma:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.78 \\ 20.56 \\ 36.67 \end{Bmatrix}$$

$$P_2(x) = 2.11 - 0.57x + 2.24x^2$$



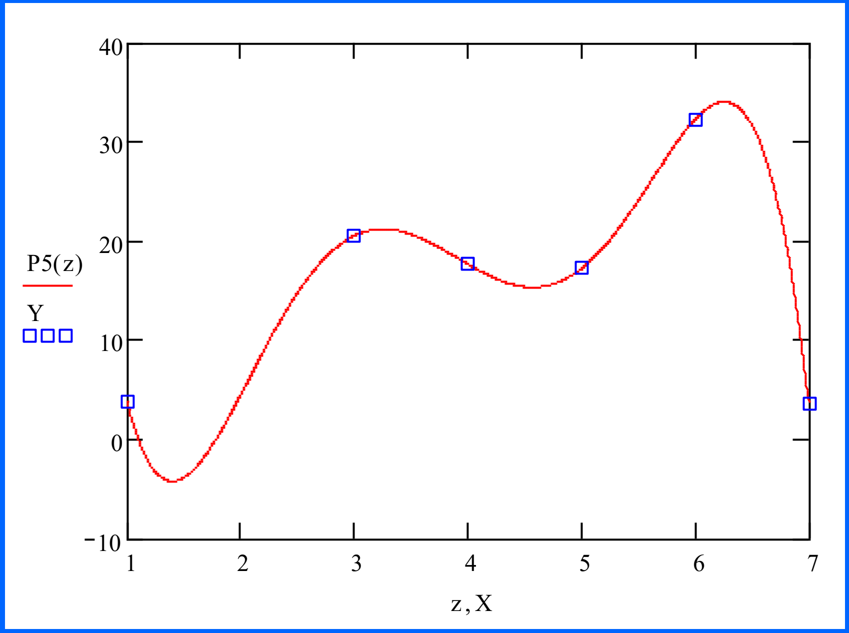
Problemas frecuentes con polinomios de alto orden:

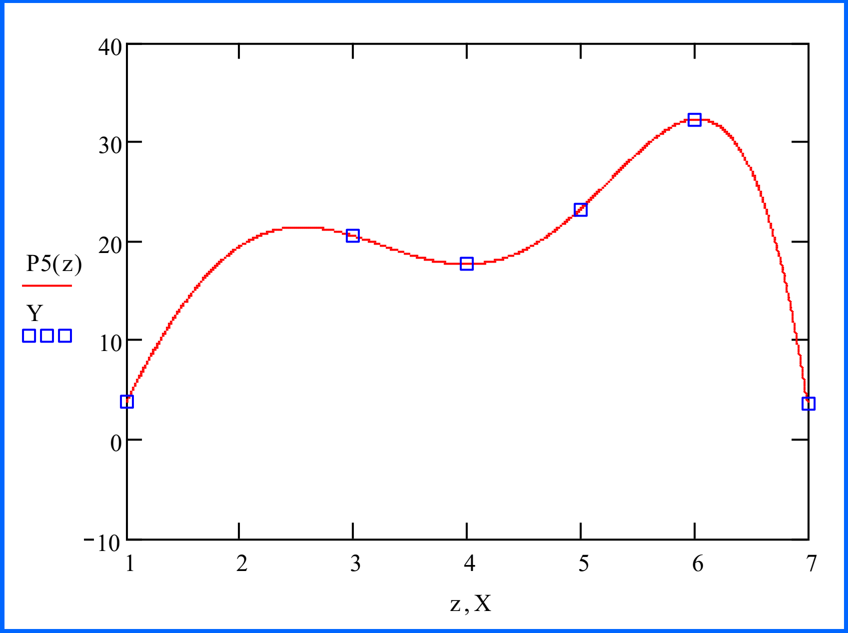
Se tienen 6 puntos, por lo tanto se debe interpolar un polinomio de grado 5

X	1	3	4	5	6	7
Y	3.78	20,56	17,67	17.25	32.3	3.56

y3 := 23.25

$$P_5(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$$





Ejemplo:
Se desea determinar el caudal que tiene una bomba peristáltica; para lograrlo en forma experimental, se ha diseñado el siguiente esquema:
1.- Se preparan 5 recipientes de 200 ml de capacidad
2.- Se llenan sin cortar el flujo y se toma el tiempo de llenado de cada tambor

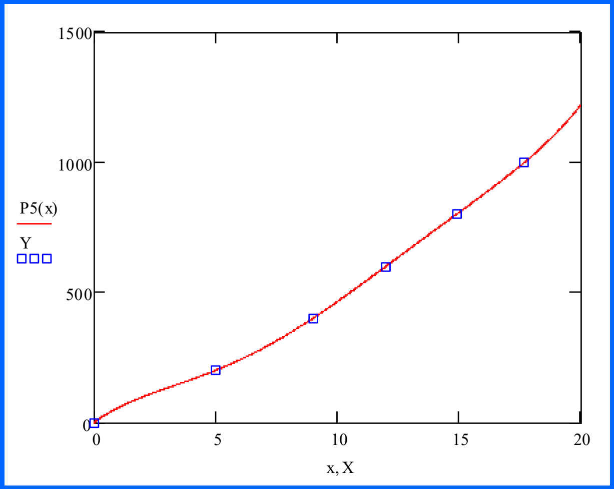
El resultado obtenido es:

Recipiente		1	2	3	4	5
Tiempo (s)	5.0	9.0	12.0	14.9	17.7	

Solución:
Se escribe la tabla anterior en función de los ml de agua y no en función del número de tambores:

Caudal (litros)	200	400	600	800	1000
Tiempo (s)	5.0	9.0	12.0	14.9	17.7

Como se tienen 6 puntos se debe interpolar con un polinomio de grado 5



$$P_5(x) = 61.071x - 12.485x^2 + 1.891x^3 - 0.105x^4 + 0.002x^5$$

Caudal de bomba