



BIOMECÁNICA COMPUTACIONAL

Conceptos de Mecánica de Biomateriales y
Diseño Biomecánico
09-09-2025



Dr Claudio García-Herrera
claudio.garcia@usach.cl



Esfuerzo y deformación

Considere una barra BC de sección transversal la cuál está empotrada en B. Si se aplica una carga en C la barra se deforma una magnitud δ .

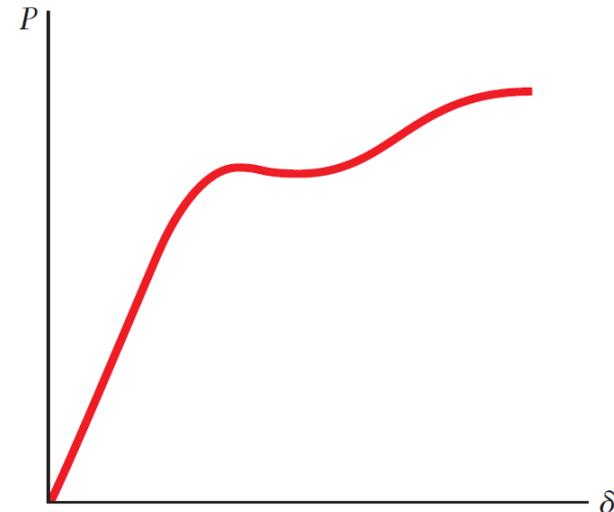
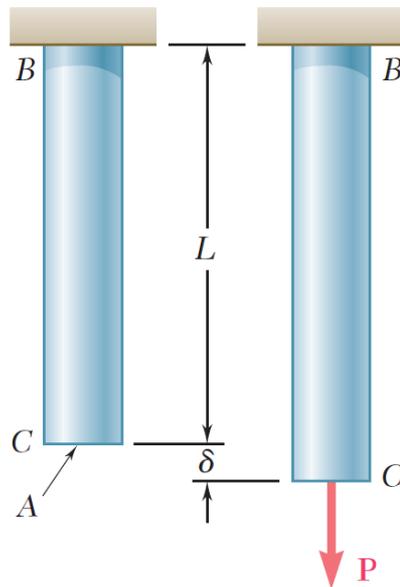


Diagrama carga contra deformación

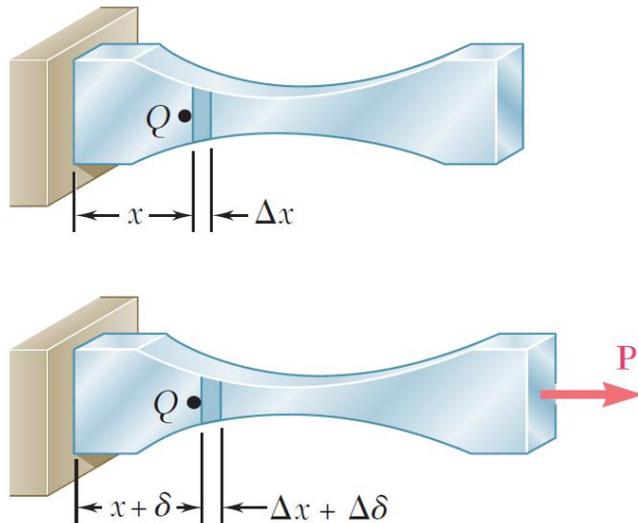
En deformación normal, se define la “deformación por unidad de largo” como:

$$\text{Deformación unitaria: } \epsilon = \frac{\delta}{L}$$



Esfuerzo y deformación

Si se tiene una barra de sección transversal A variable cargada axialmente:



Considerando un pequeña distancia longitudinal Δx se denota que su deformación bajo la carga P es $\Delta\delta$, así la deformación unitaria en el punto Q es:

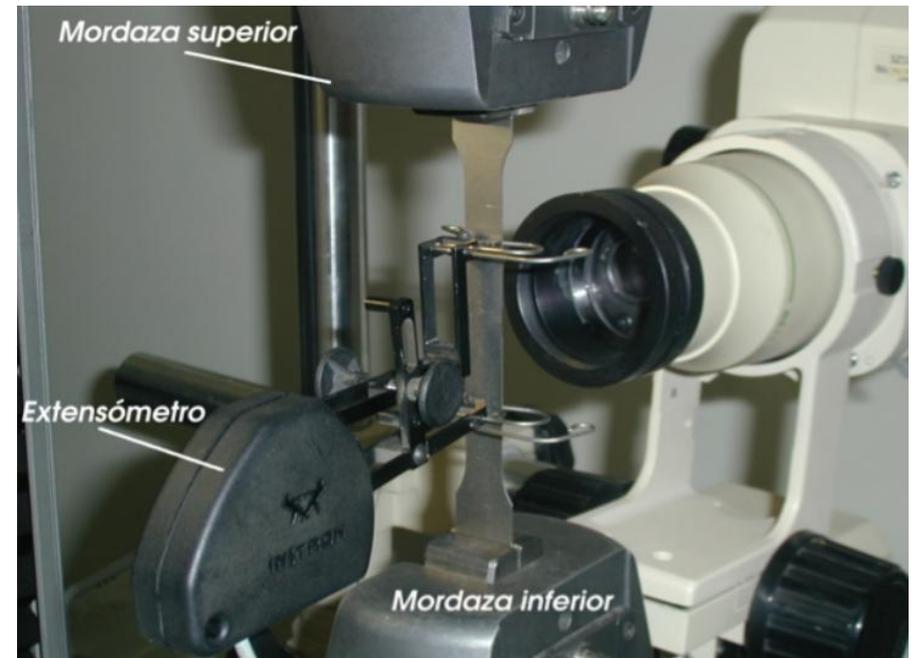
$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dL}$$

Notar que ϵ es una magnitud adimensional.

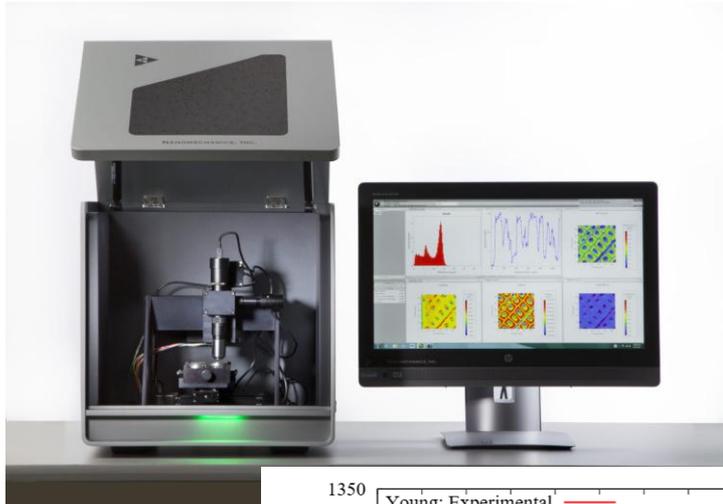
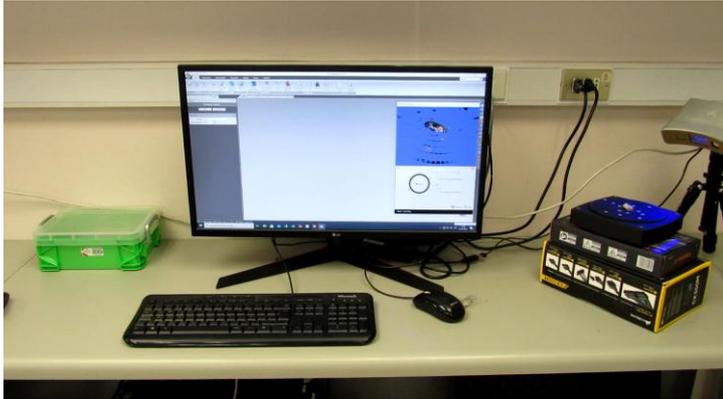
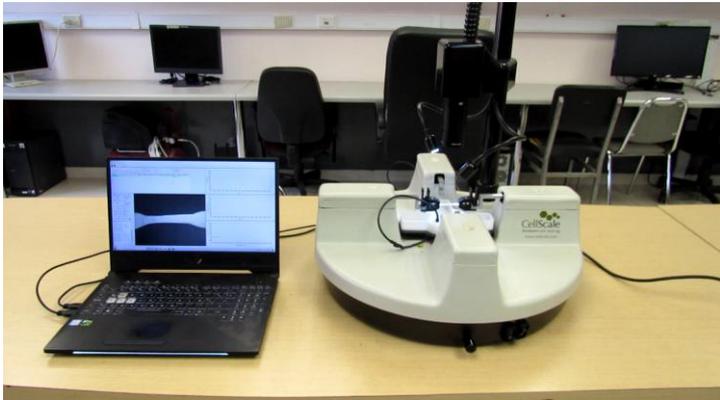


Ensayo de tracción

1. Aplicar un estado uniforme de esfuerzo normal (σ) en una muestra del material (probeta).
2. Se registra la carga, el desplazamiento de las mordazas, el desplazamiento entre marcas (extensómetro mecánico u óptico).
3. El ensayo se encuentra normado: ASTM E8/E8M ó NCh 200 OF74.
4. Ensayo de tipo destructivo, es decir, hasta la rotura.

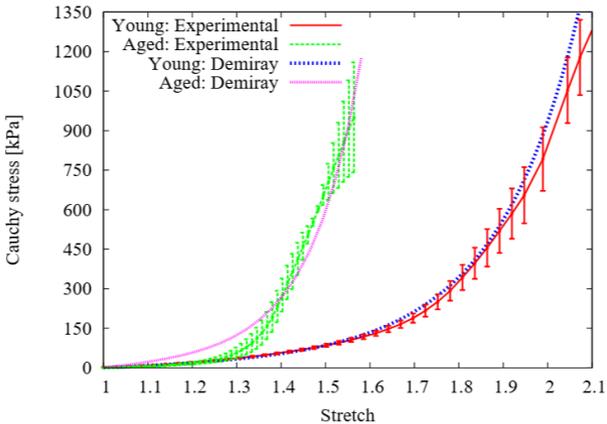


Equipos



Claudio García-Herrera (DIMEC-USACH)

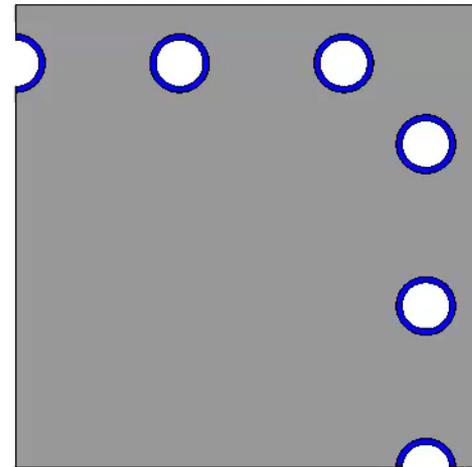
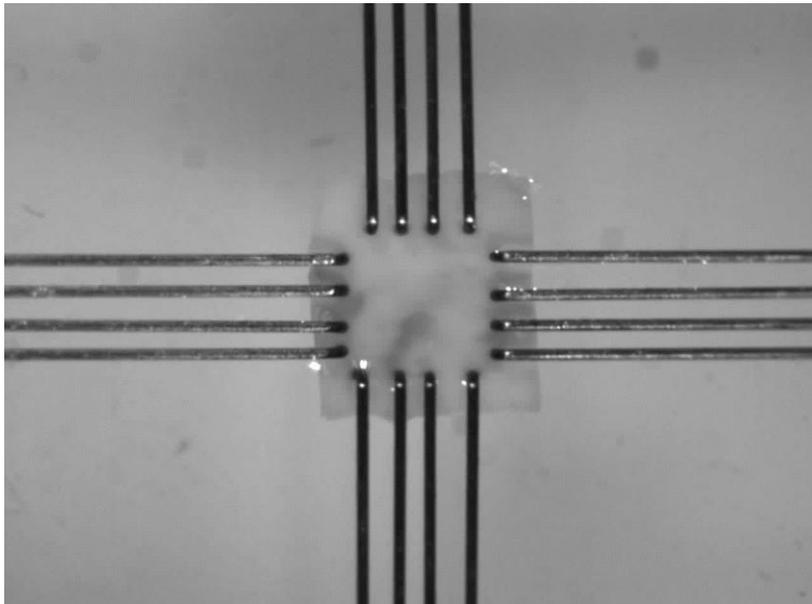
Seminario de Medicina Computacional





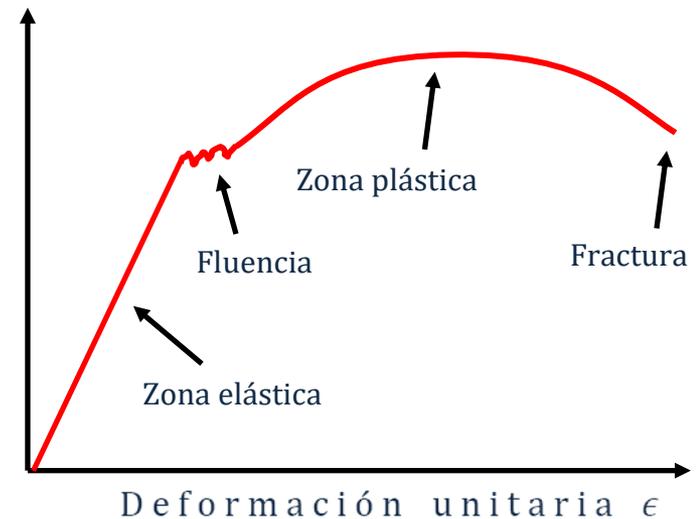
Ensayos Experimentales

- Ensayo Biaxial



Ensayo de tracción uniaxial

Durante el ensayo, la deformación está confinada en la región más estrecha del centro, la cual tiene una sección uniforme a lo largo de su longitud.



Deformación ingenieril

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$$

Esfuerzo ingenieril

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

Ley de Hooke

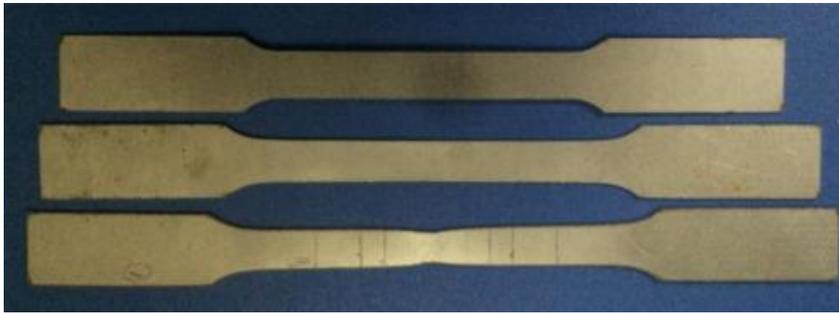


$$\sigma = E\epsilon$$

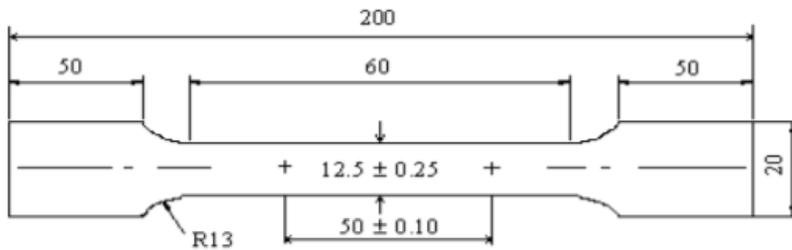


Tipos de probeta

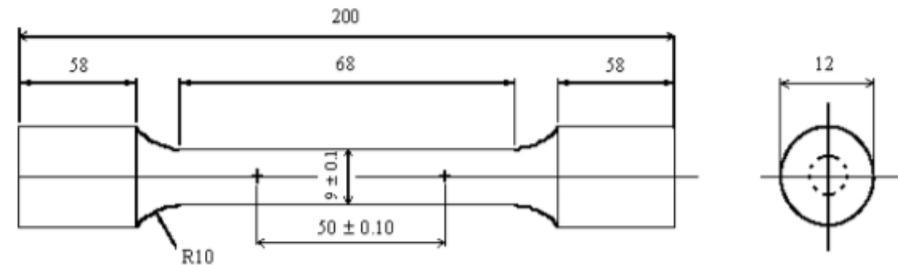
Probetas metálicas (dogbone o dumbbell)



Probetas ASTM E8M:



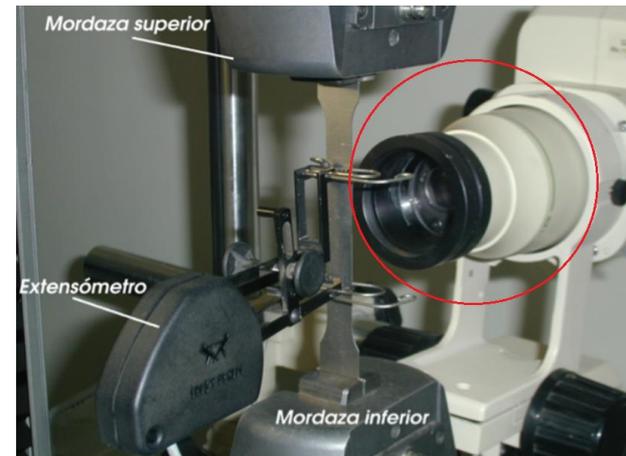
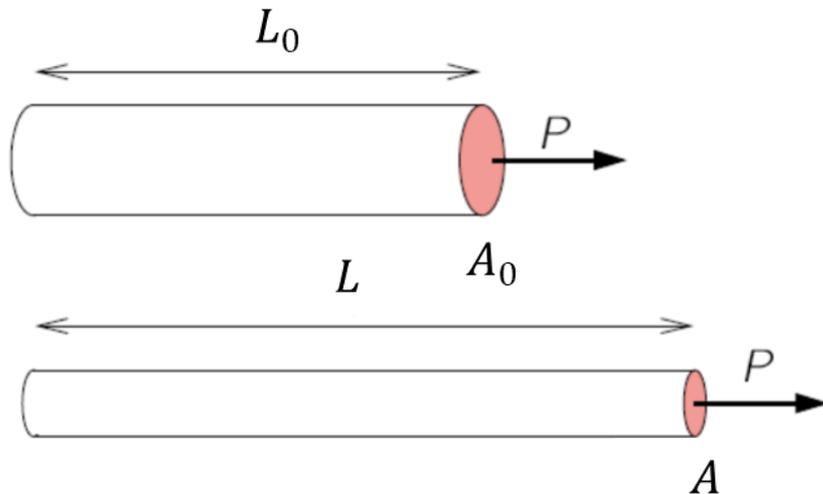
Probeta plana



Probeta cilíndrica



Medidas de esfuerzo y deformación

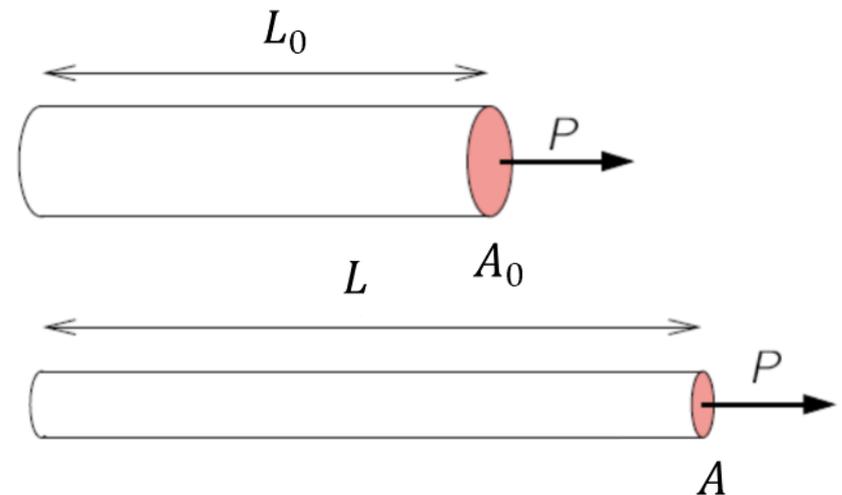
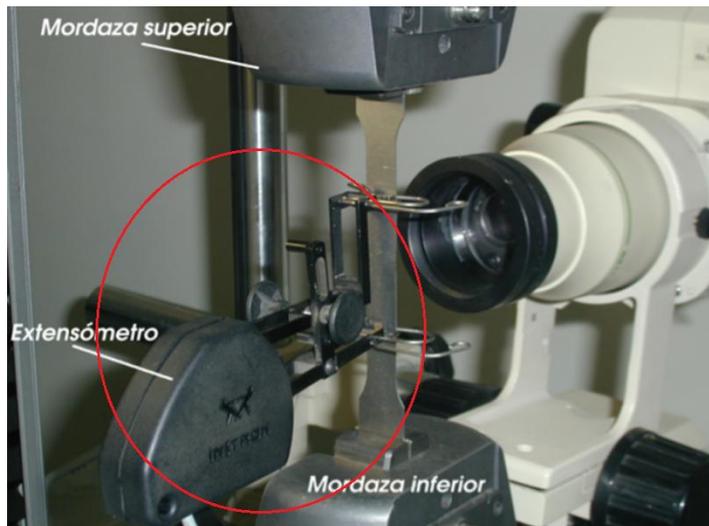


Medida	Ecuación
Esfuerzo ingenieril	
Esfuerzo Real	



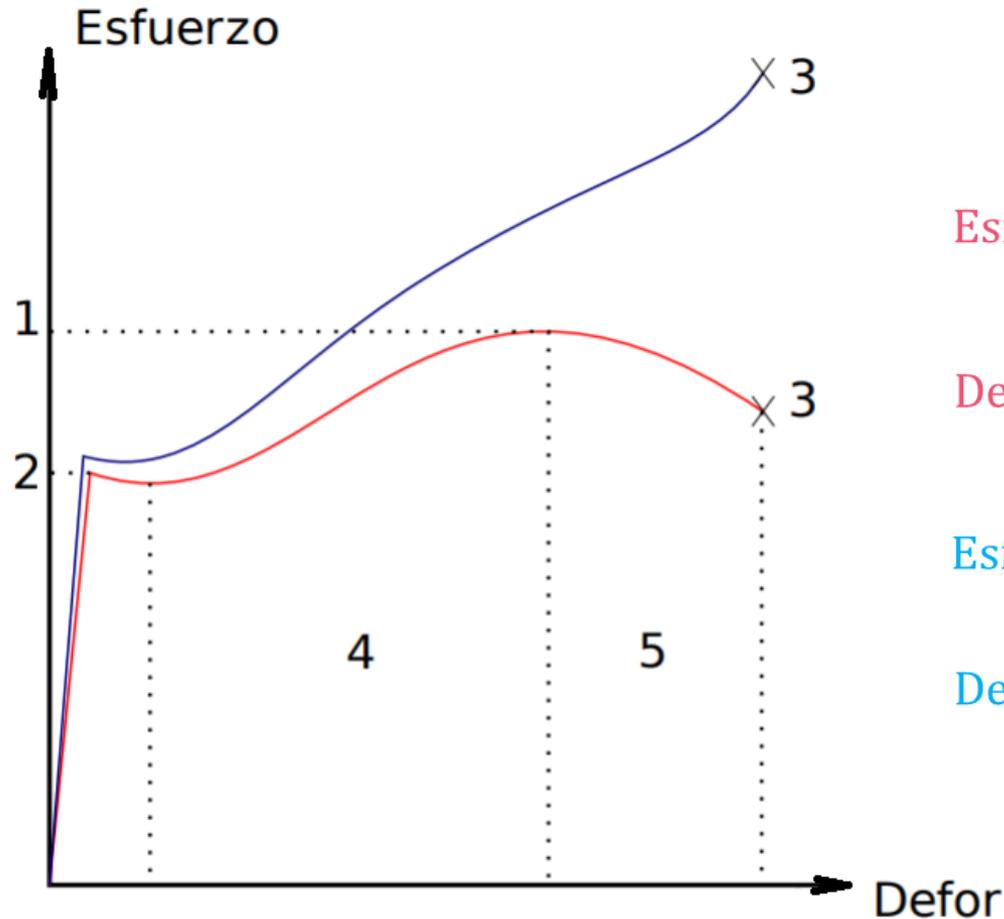
Medidas de esfuerzo y deformación

Medida	Ecuación
Deformación ingenieril	
Deformación Real	





Curva esfuerzo vs deformación



Esfuerzo ingenieril: $\sigma = \frac{P}{A_0}$

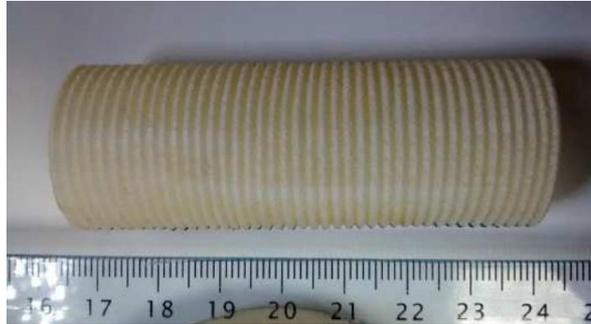
Deformación ingenieril: $\epsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$

Esfuerzo real: $\sigma_r = \frac{P}{A}$

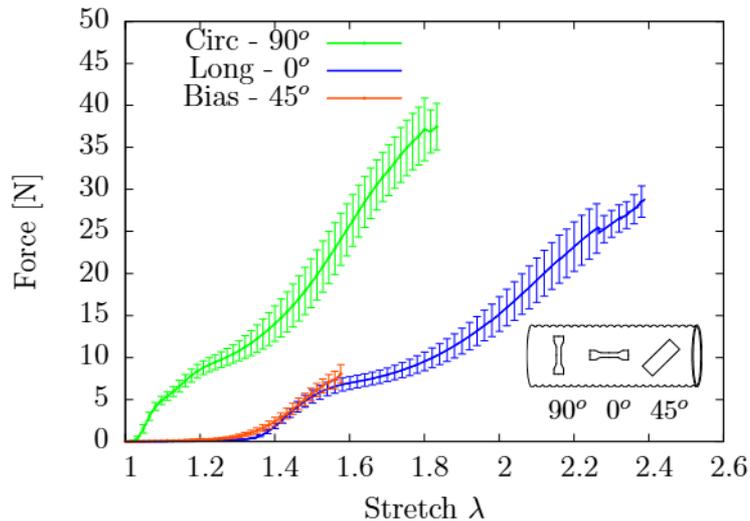
Deformación real: $\epsilon_r = \ln\left(\frac{A}{A_0}\right)$



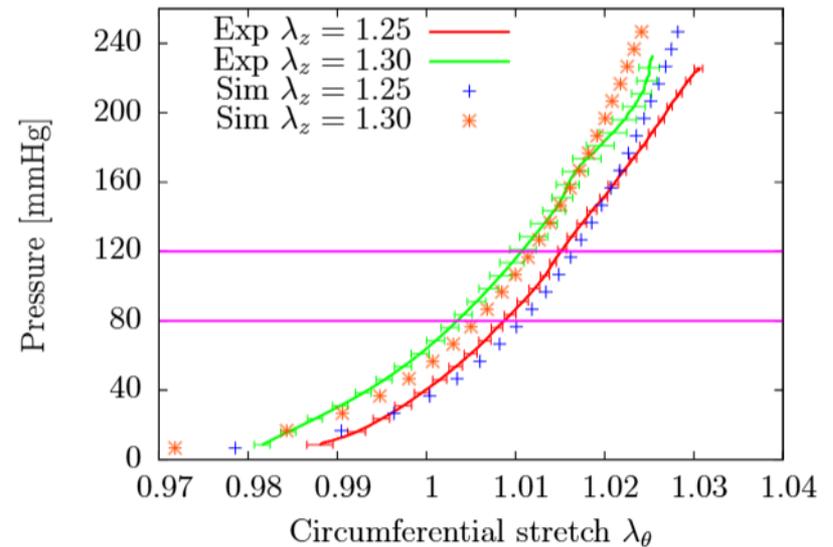
Comportamiento biomecánico de biomateriales



Dacron
Prótesis de arteria aorta



Curvas de tracción

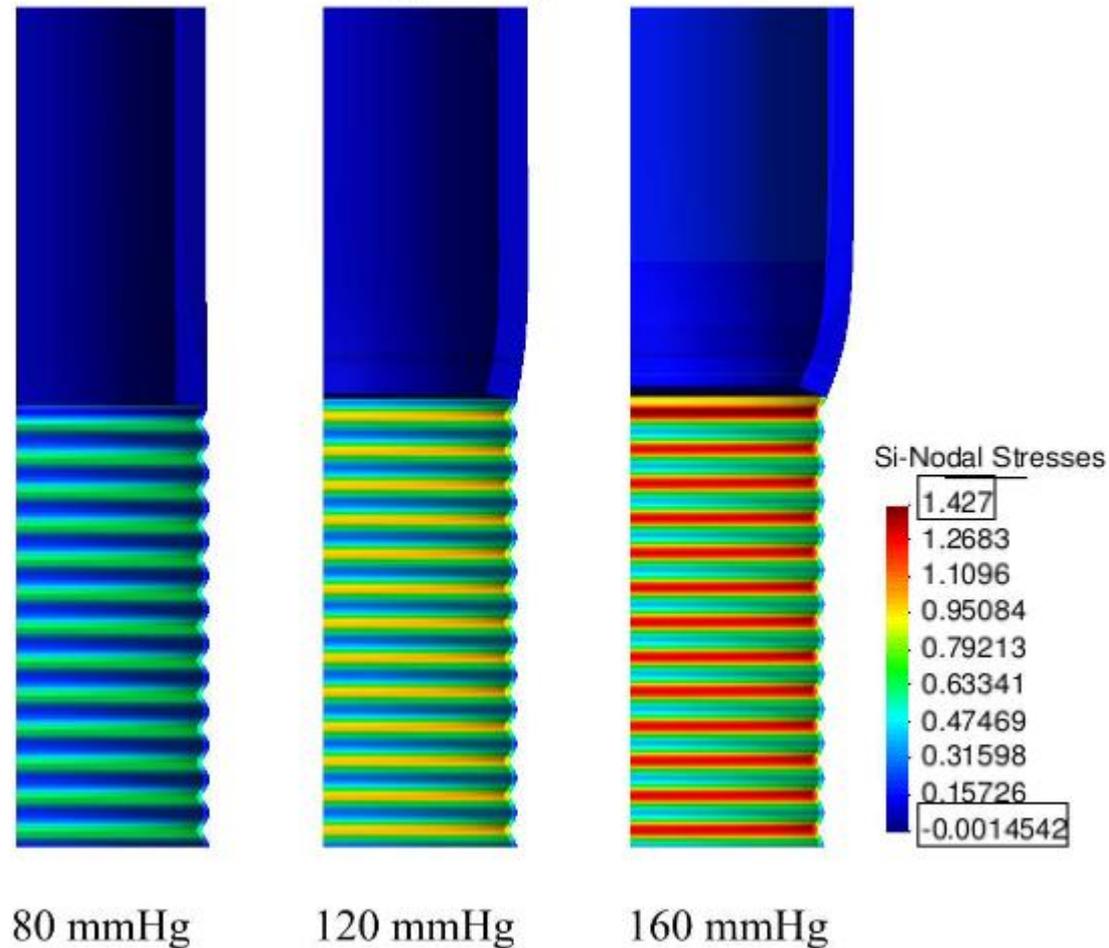


Ensayo de presurización



Biomecánica Computacional: MEF

Young artery

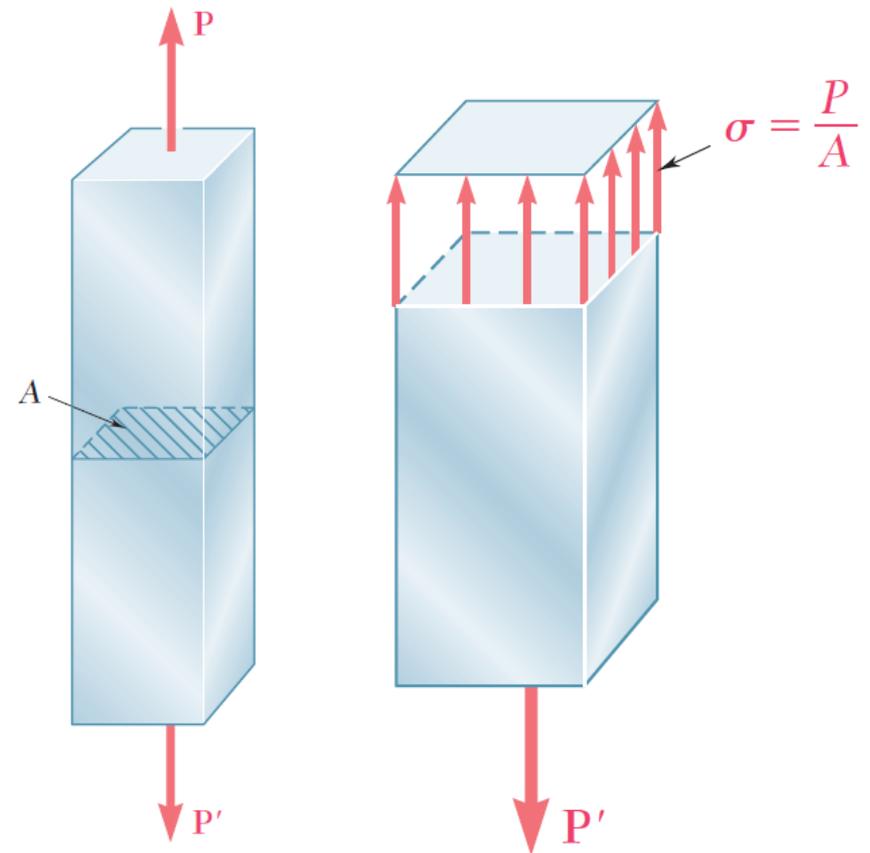




Esfuerzos normales

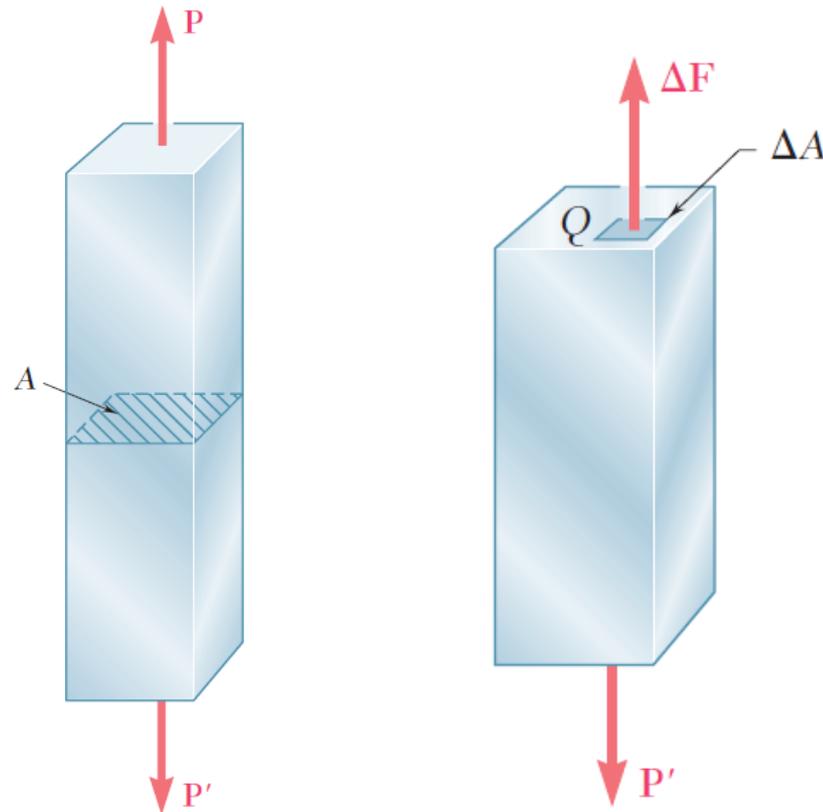
Hipótesis del caso:

- La fuerza es de tracción.
- El cuerpo es un medio continuo.
- Material Homogéneo
- Material isótropo





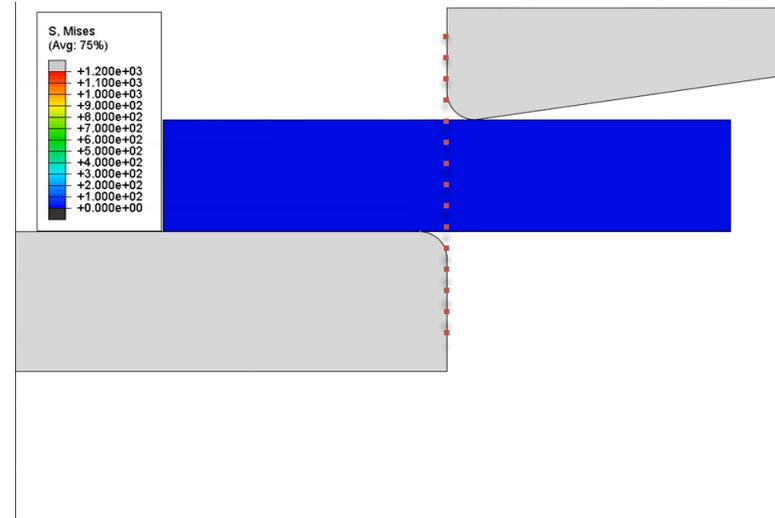
Esfuerzos normales



$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \rightarrow P = \int_A \sigma dA$$



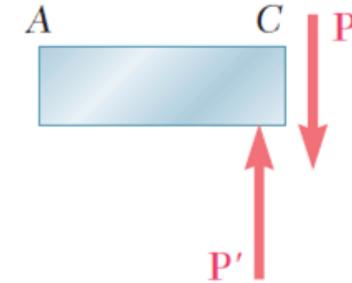
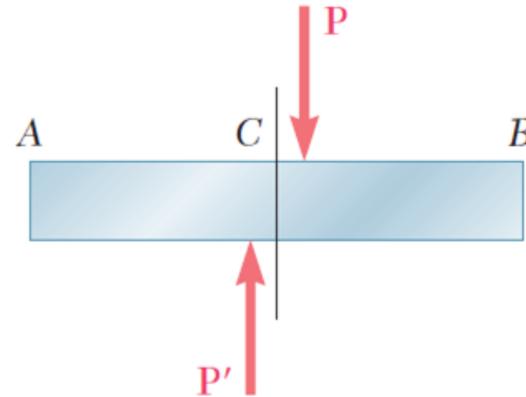
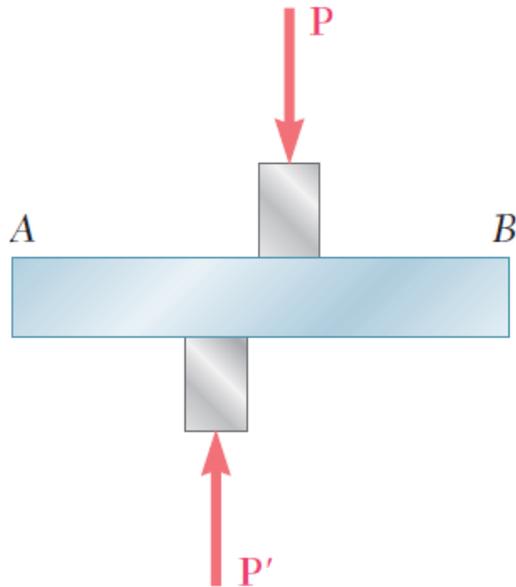
Esfuerzo de corte simple



El esfuerzo de corte se produce cuando se aplica una fuerza contenida en el plano de corte.



Esfuerzo de corte simple

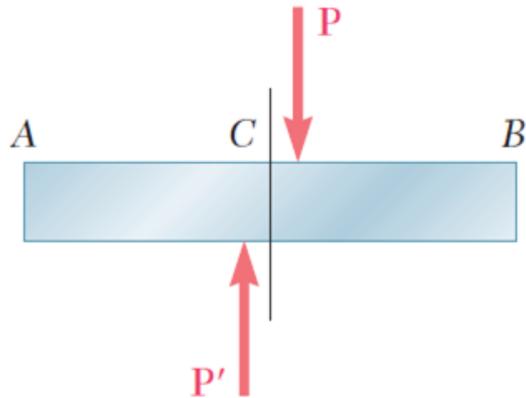


Cargas opuestas y transversales produciendo corte en el miembro AB.

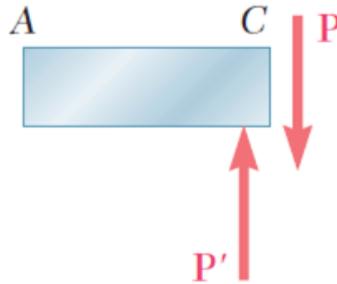
Se produce corte interno en la sección intermedia de las fuerzas transversales.



Esfuerzo de corte simple



Esfuerzo de corte promedio



Fuerza de corte

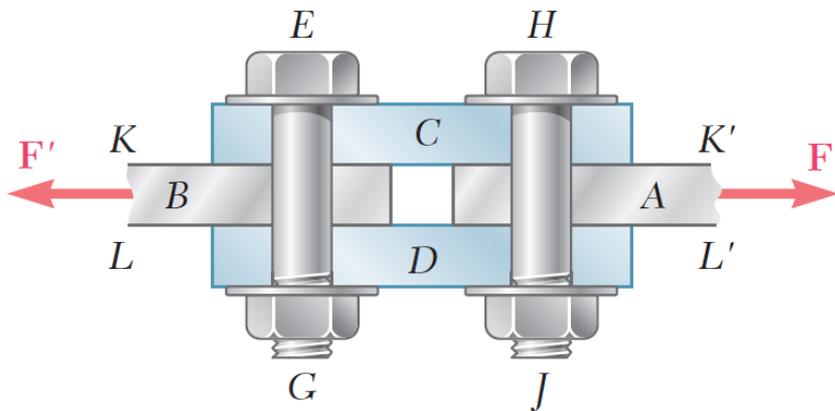
$$\tau_{avg} = \frac{P}{A}$$

Área de la sección transversal

Cargas opuestas y transversales produciendo corte en el miembro AB.

Se produce corte interno en la sección intermedia de las fuerzas transversales.

Esfuerzo de corte doble



Pernos sometidos a cortante doble

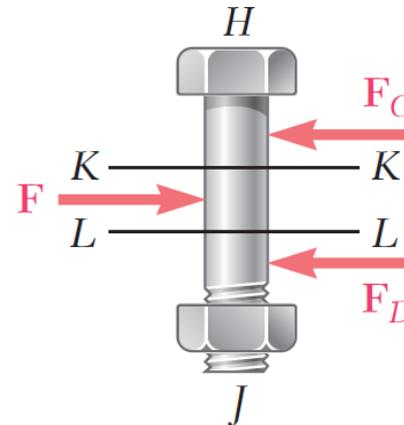
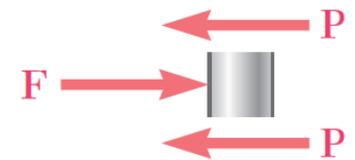


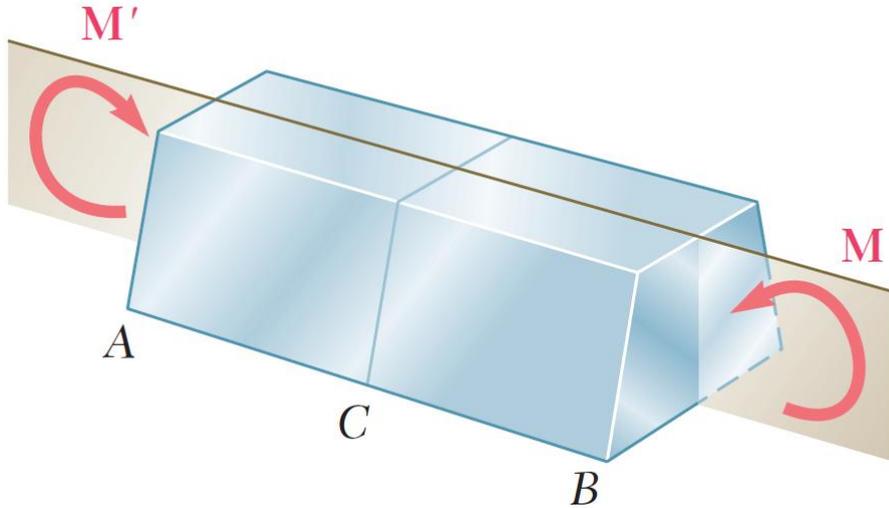
Diagrama de perno en cortante doble y secciones LL' y KK'.



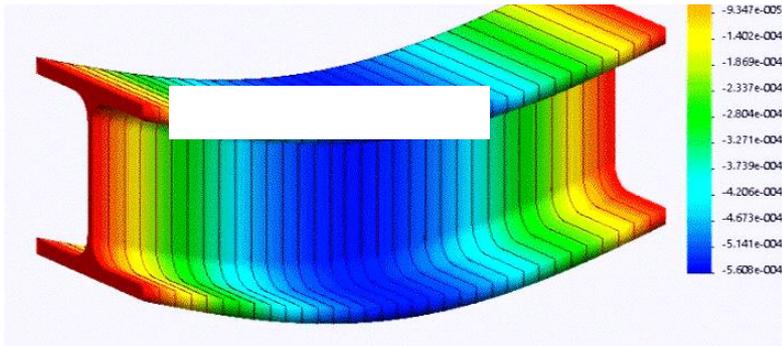
$$\tau_{avg} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A}$$



Esfuerzo normal en flexión

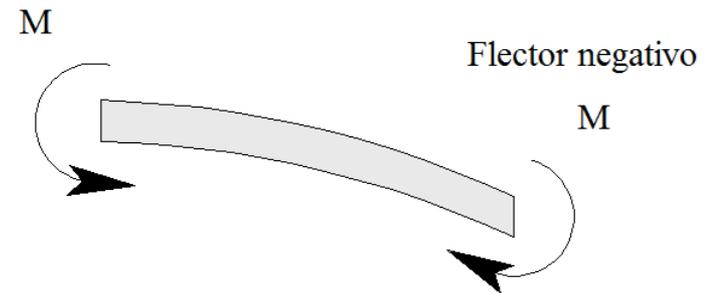
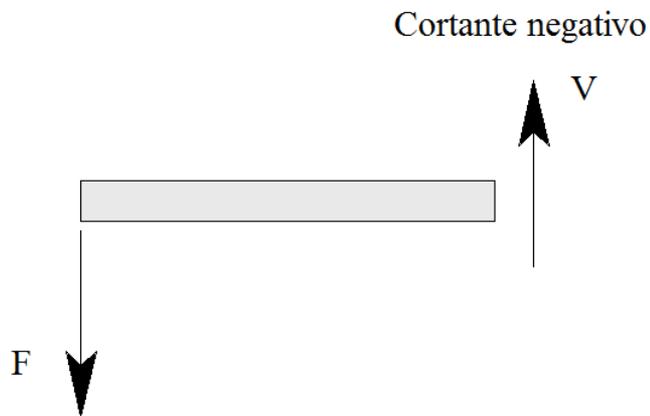
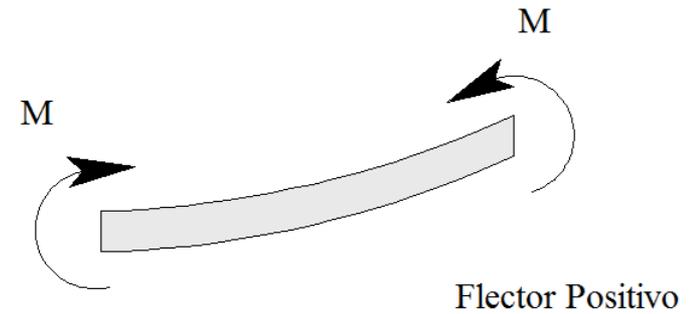
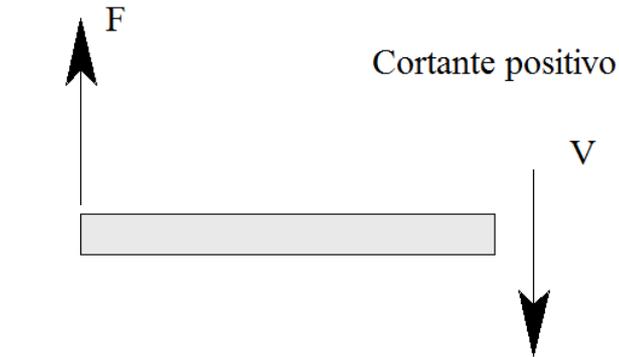


El concepto de flexión es usado en el diseño de prótesis y estudio de elementos biológicos que soportan cargas de flexión. Cuando no existen otras fuerzas aplicadas al sistema se considera flexión pura. Muchas veces se generan esfuerzos de flexión a partir de aplicaciones de otros tipos de cargas, tales como cargas axiales excéntricas o transversales.

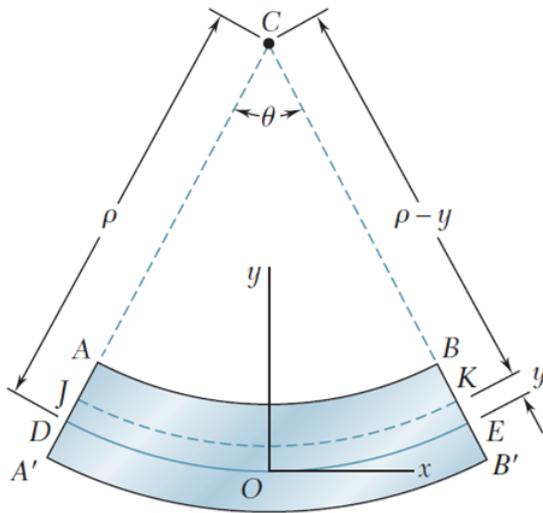




Momento flector: Convención de signos



Esfuerzos y deformaciones en vigas



El eje neutro determina esfuerzos y deformaciones nulos, pasando desde un estado de tracción a compresión. Se tomará un nuevo sistema coordinado desde este punto.

Como cada sección transversal permanece plana, ocurren deformaciones en cada plano paralelo al neutro. Así entonces, la deformación normal longitudinal ε_x varía linealmente con la distancia y desde el eje neutro

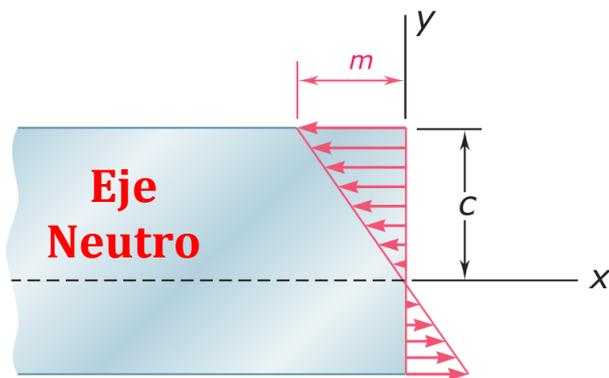
$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$

Considerando deformaciones dentro de la zona elástica, la Ley de Hooke para esfuerzos uniaxiales aplica de la siguiente forma:

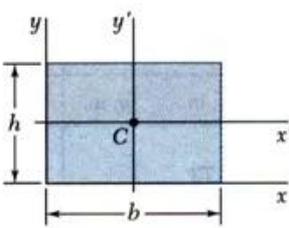
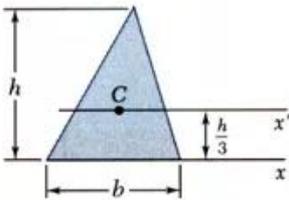
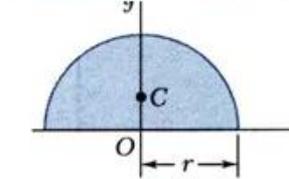
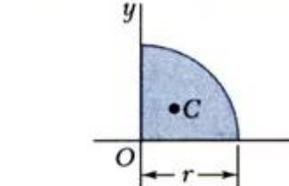
$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\left(-\frac{y}{\rho}\right)$$

Evaluando el máximo esfuerzo normal:

$$\sigma_{max} = -\frac{Mc}{I}$$



Momentos de inercia

Rectangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Semicircle		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Quarter circle		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$

El segundo momento de área o momento de inercia de un área A con respecto a los ejes x e y son

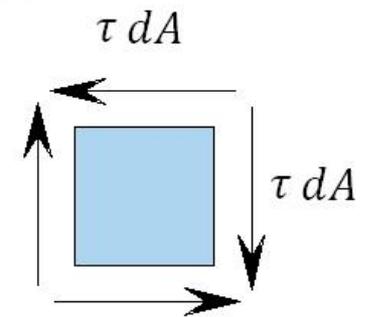
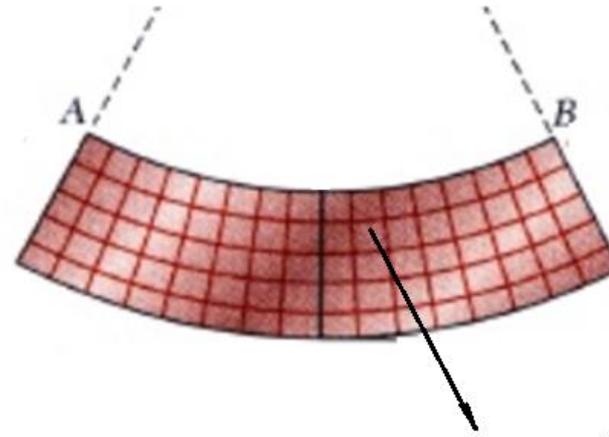
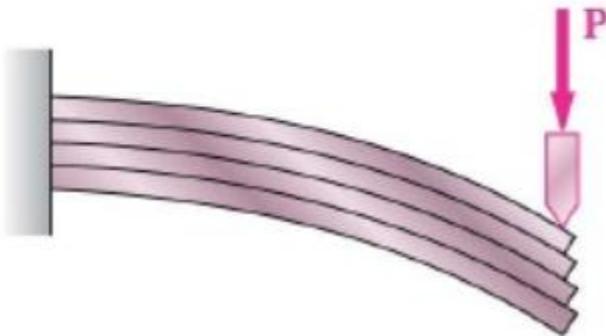
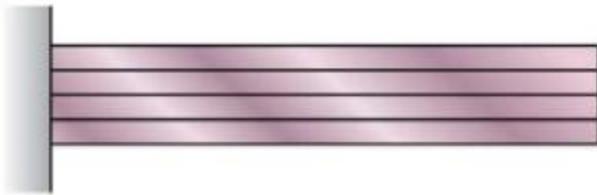
$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I = \sum A_i r_i^2$$



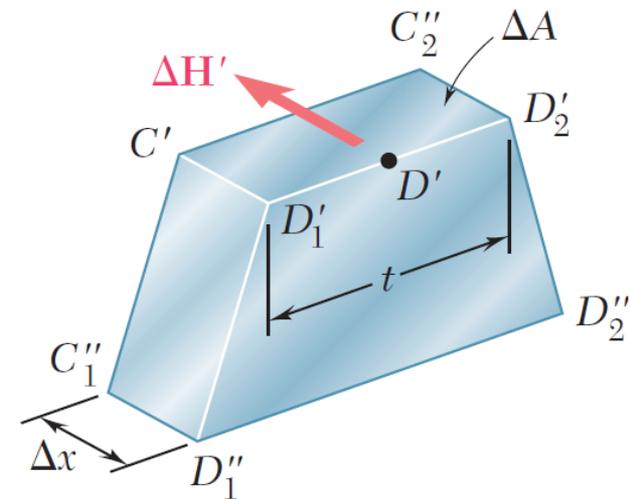
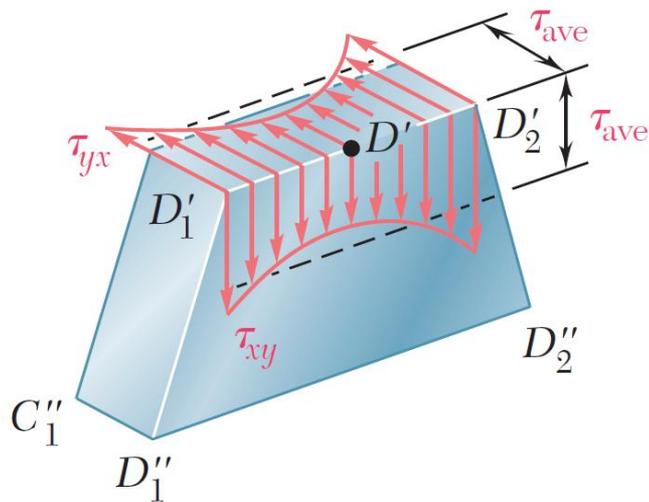
Esfuerzo de corte en flexión

Considere el siguiente caso:



Esfuerzo de corte en flexión

La distribución es casi constante en el ancho



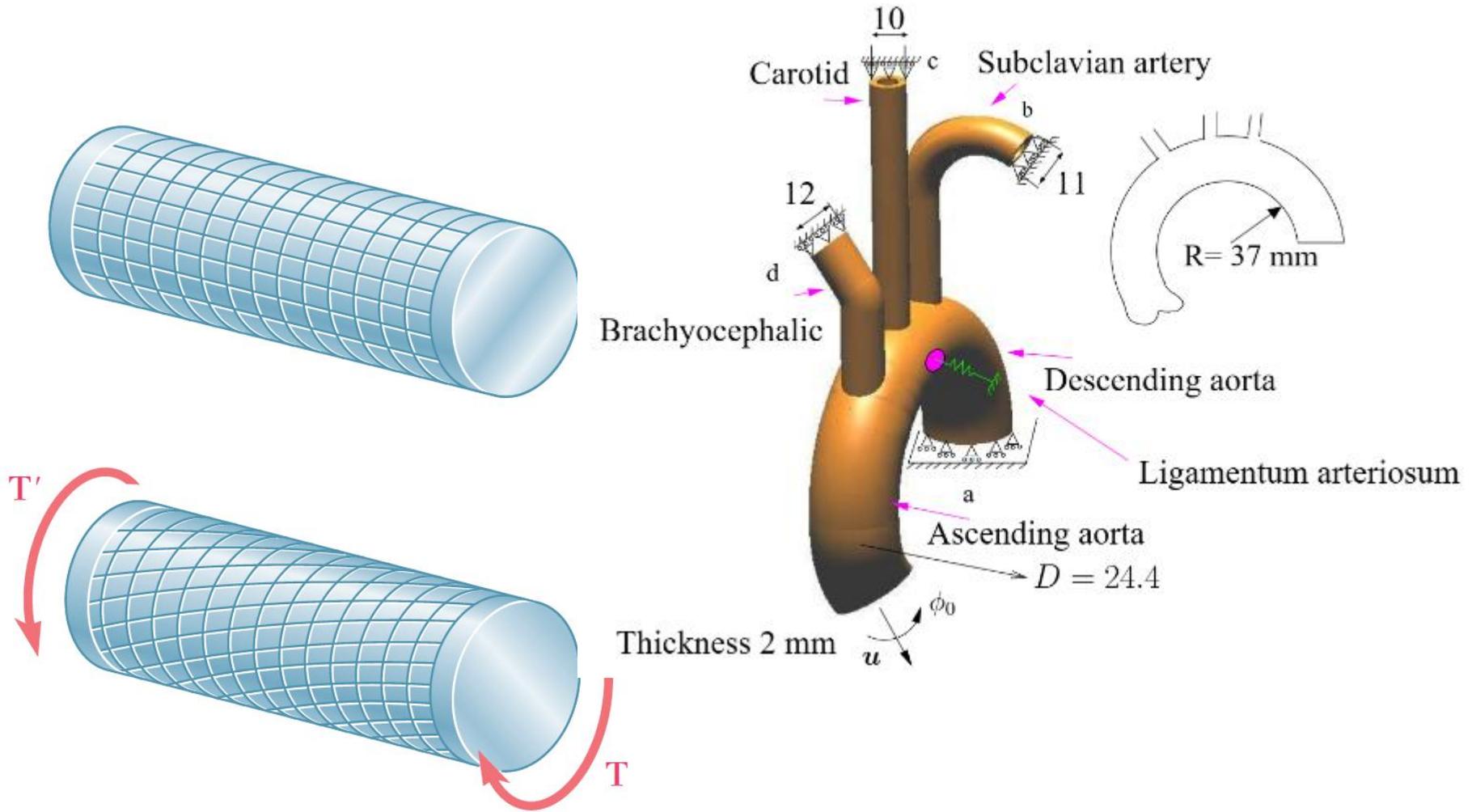
$$\tau_{avg} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{VQ}{I} \frac{\Delta x}{t\Delta x} \rightarrow \tau_{avg} = \frac{VQ}{It}$$

$$Q = \int_A y dA$$

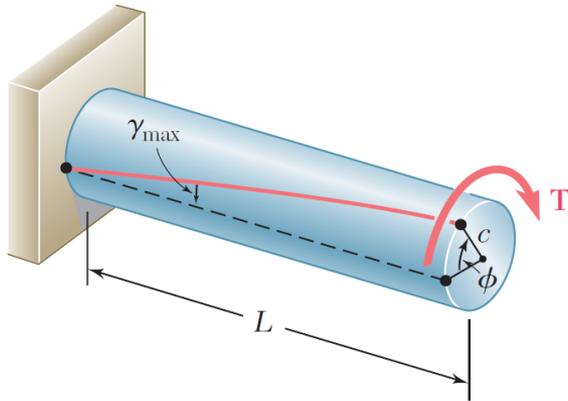
Fórmula de Collignon-Jourawsky



Torsión



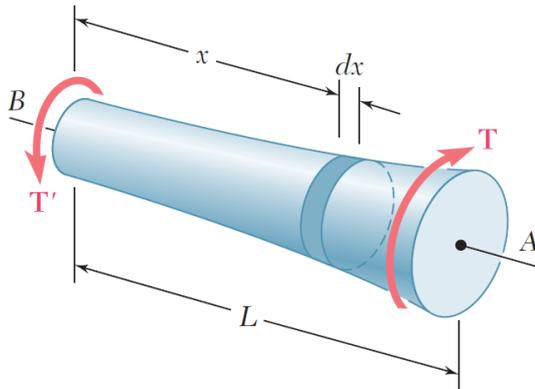
Torsión: Ángulo de giro



En deformación elástica existe una relación directamente proporcional entre el torque aplicado T y el ángulo de giro ϕ del eje sometido. En un eje de sección circular y uniforme en su largo L , el ángulo de giro es:

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

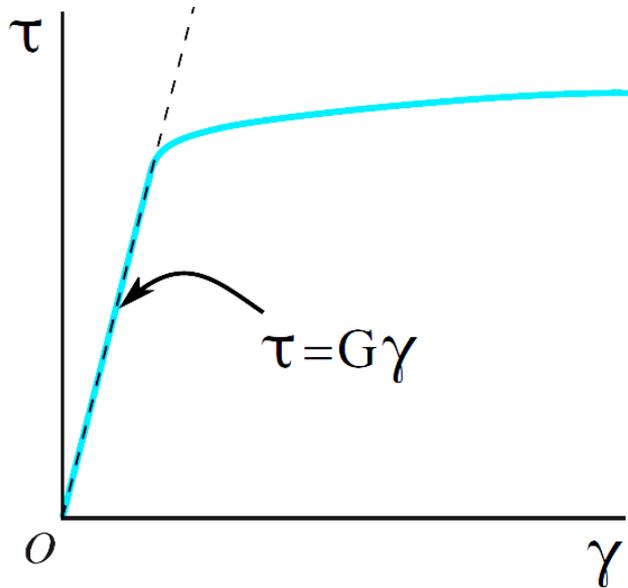
Donde phi es medido en radianes



Cuando el eje sometido a torsión contiene más de un par torsor aplicado, su sección transversal no es constante, o está fabricado por más de un material o este no es homogéneo:

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)}{J(x)G(x)} dx \cong \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

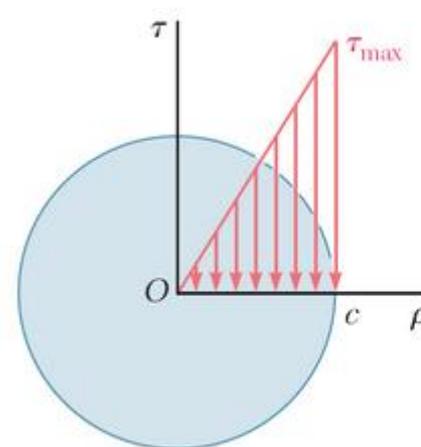
Torsión: Esfuerzo cortante



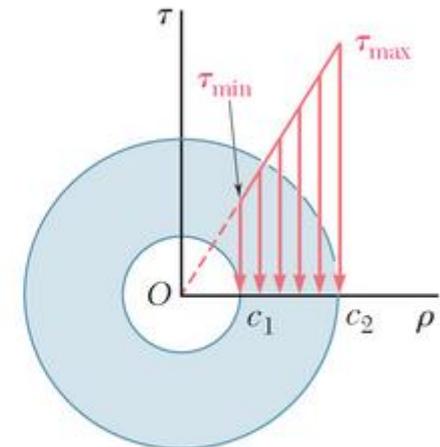
$$\tau = G \frac{\theta \rho}{L} \text{ y } T = \frac{GJ}{L} \theta$$

$$\tau = \frac{Tr}{J}$$

El esfuerzo cortante en un eje a torsión varía linealmente con la distancia ρ desde el centro hasta su extremo



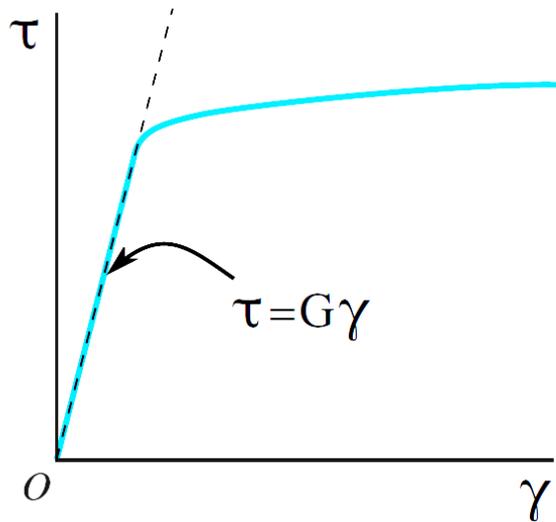
Eje macizo



Eje ahuecado



Torsión: Esfuerzo cortante

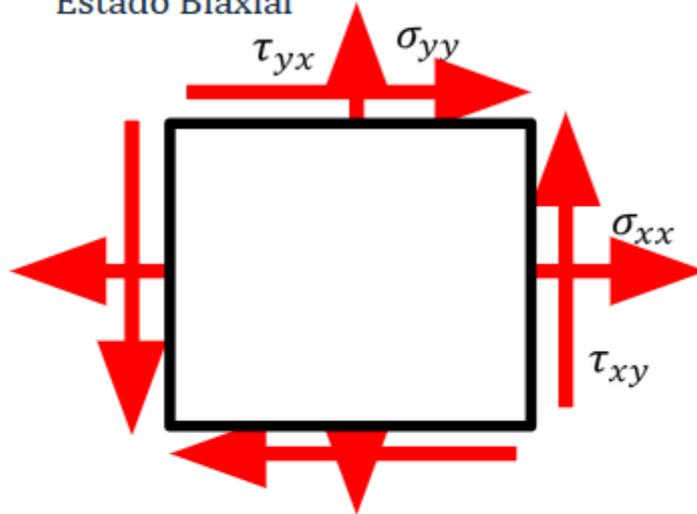


En muchas aplicaciones de la ingeniería se encuentran cuerpos a torsión, comúnmente en ejes de transmisión. Cuando un eje circular está siendo sometido a torsión, cada sección transversal permanece plana y no distorsionada (zona elástica). Así entonces, la distribución de esfuerzos cortantes en un eje circular varía lineal desde el centro hasta los puntos externos.

En la zona de deformación elástica del material, se usa la ley de Hooke para determinar la distribución de esfuerzo de corte en un eje circular y así obtener las ecuaciones de la torsión elástica.

Esfuerzos combinados

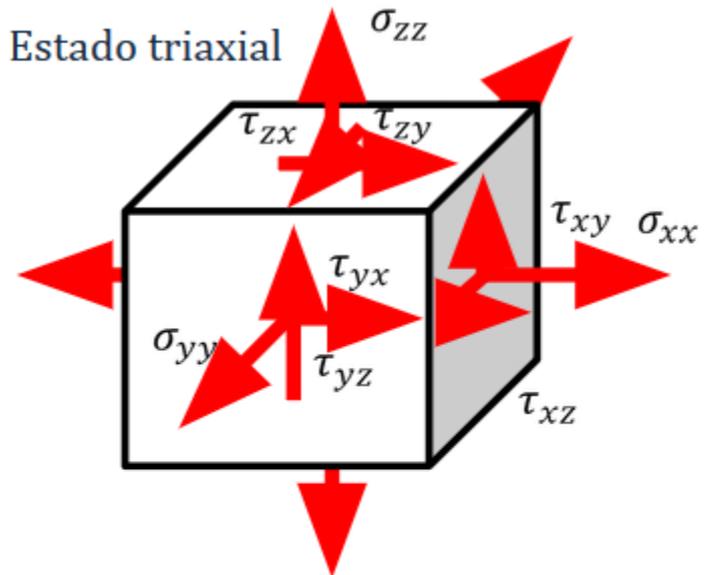
Estado Biaxial



Tensor de tensiones

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

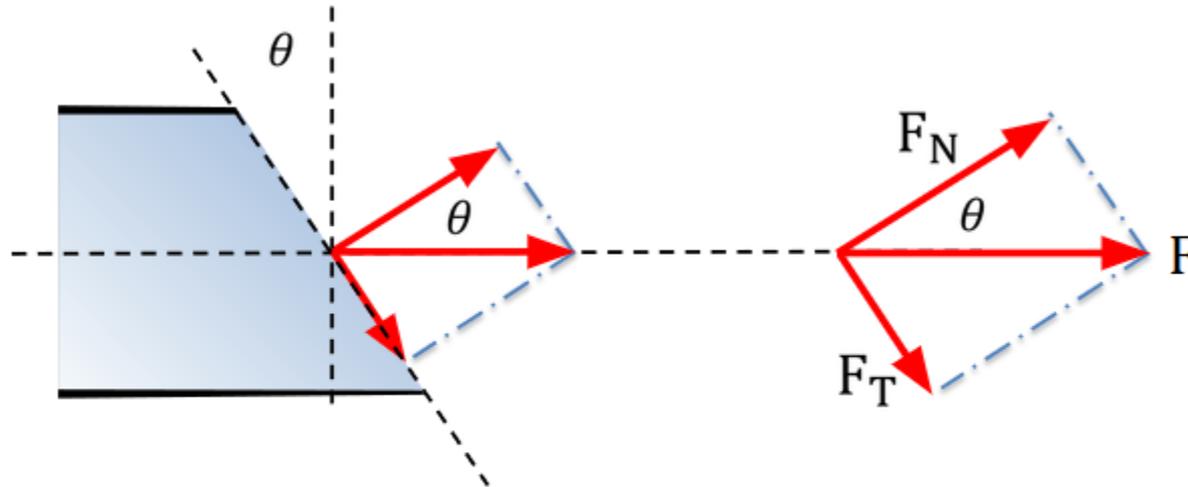
Estado triaxial



Tensor de tensiones

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

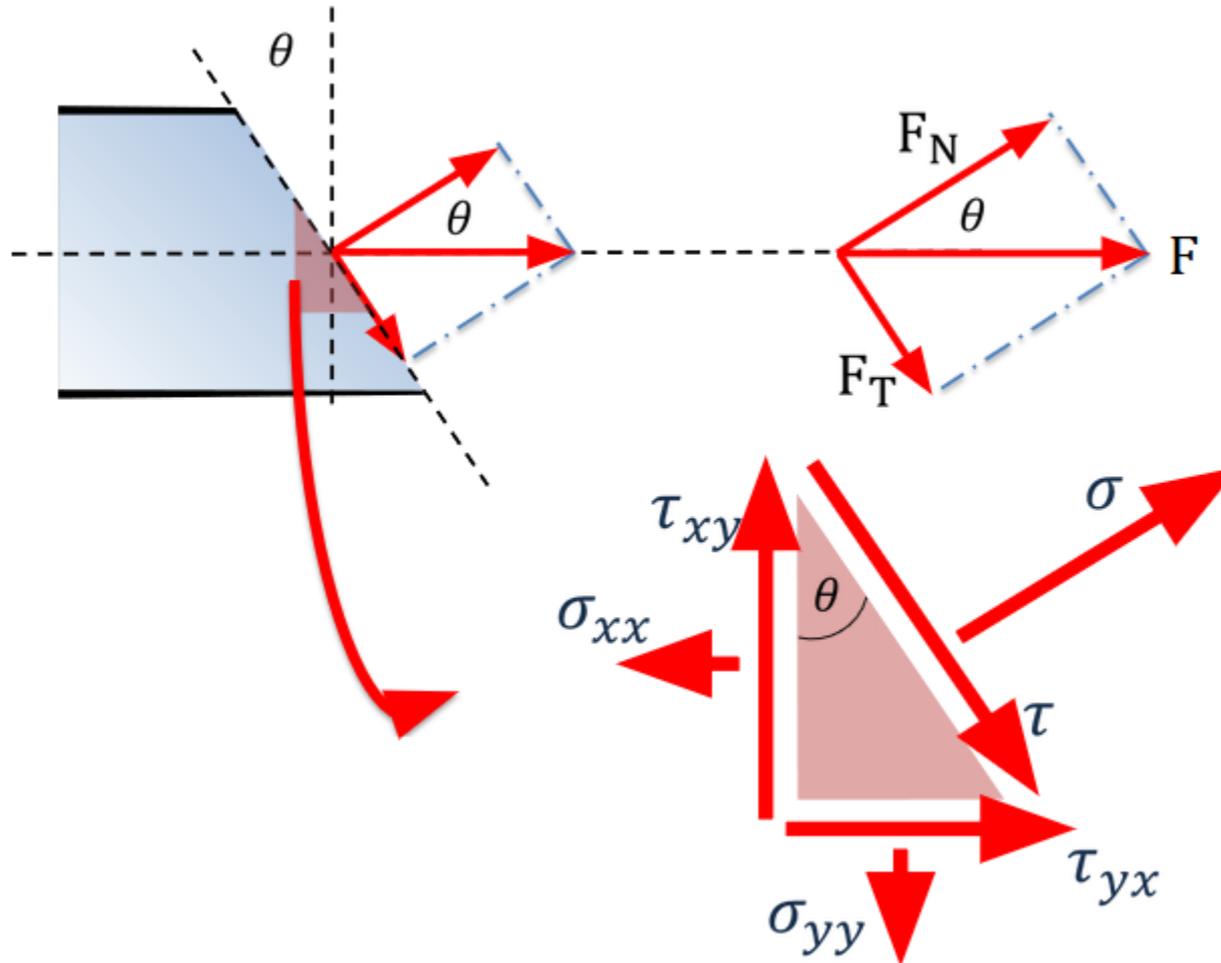
Esfuerzos combinados: Carga en planos inclinados



$$\sigma_N = \frac{F_N}{A'} = \frac{F \cos(\theta)}{A / \cos(\theta)} = \frac{F \cos^2(\theta)}{A}$$

$$\tau_T = \frac{F_T}{A'} = \frac{F \sin(\theta)}{A / \cos(\theta)} = \frac{F \sin(2\theta)}{2A}$$

Esfuerzos combinados: Carga en planos inclinados



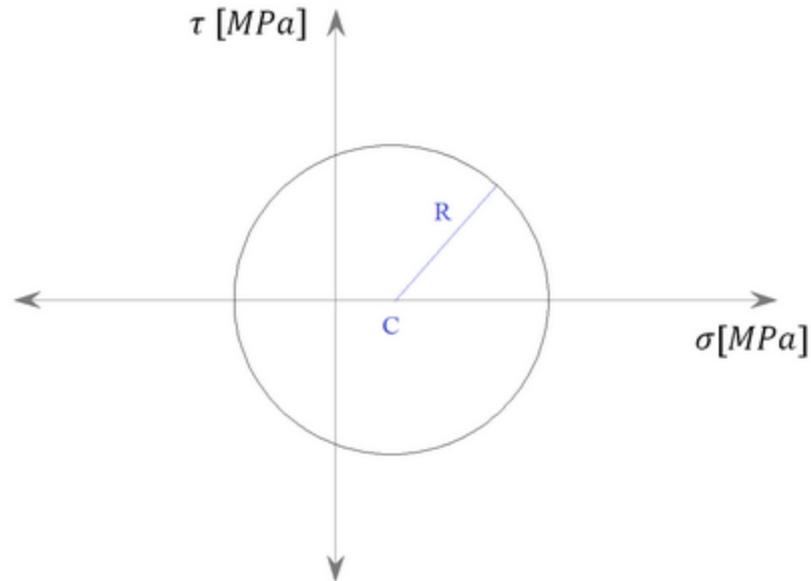


Esfuerzos combinados: Círculo de Mohr

Combinando las ecuaciones de esfuerzo normal y cortante:

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xy} \sin(2\theta) \quad \tau(\theta) = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

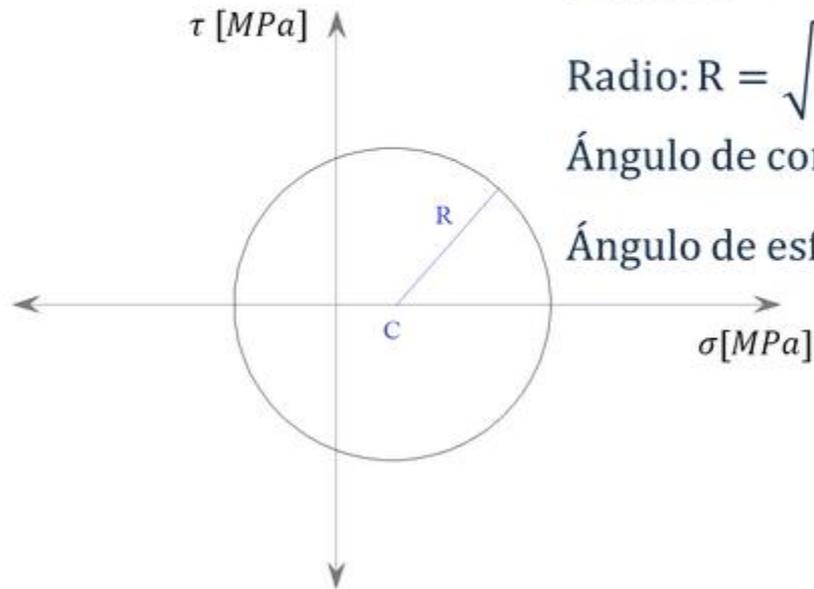
$$\left[\sigma(\theta) - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right]^2 + \tau(\theta)^2 = \left[\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2$$





Esfuerzos combinados: Círculo de Mohr

$$\left[\sigma(\theta) - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right]^2 + \tau(\theta)^2 = \left[\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2$$



$$\text{Centro: } C = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

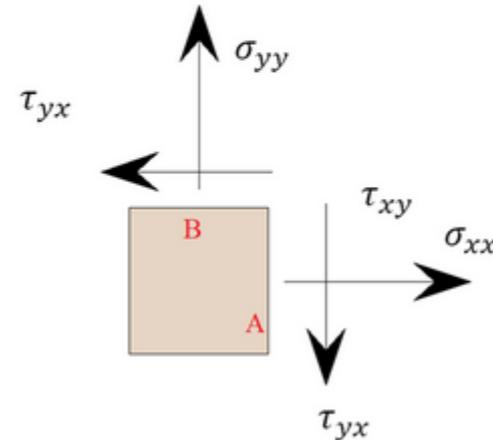
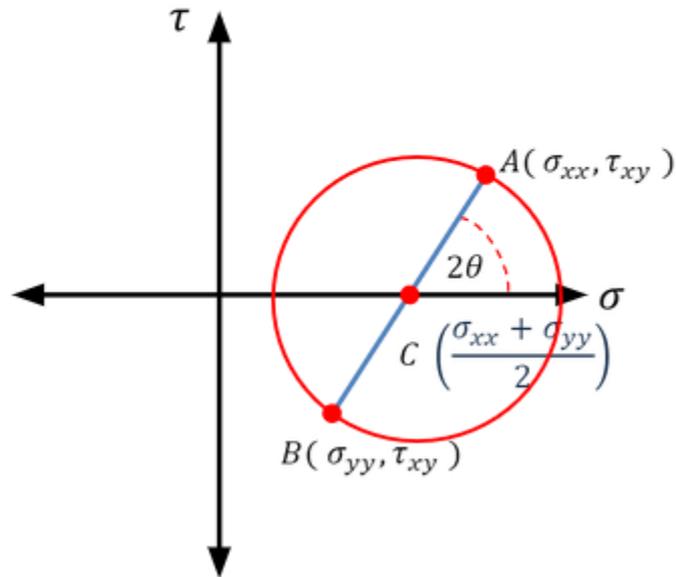
$$\text{Radio: } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\text{Ángulo de corte máximo: } \tan(2\theta) = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}}$$

$$\text{Ángulo de esfuerzo normal máximo: } \tan(2\theta) = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

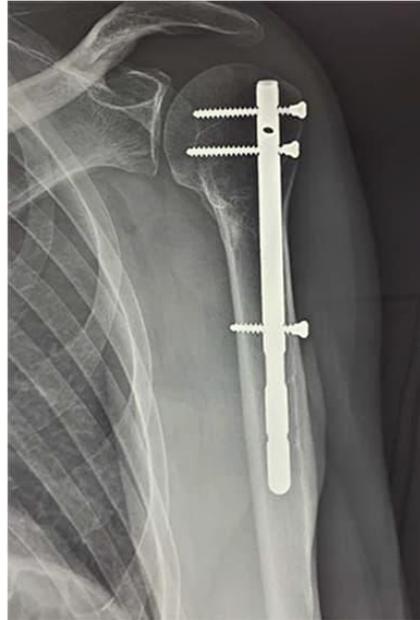
Esfuerzos combinados: Círculo de Mohr

$$\left[\sigma(\theta) - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right]^2 + \tau(\theta)^2 = \left[\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2$$





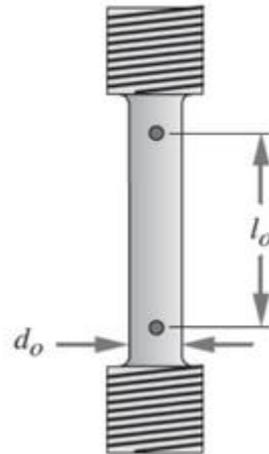
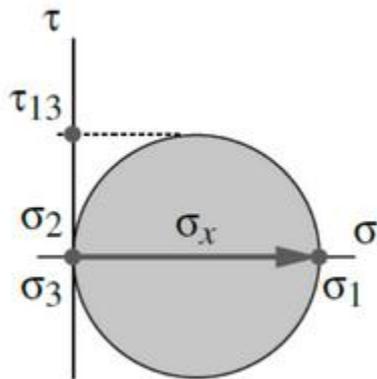
Teoría de falla



En general, podríamos decir que: **“los materiales fallan porque sus esfuerzos exceden su resistencia”**, pero ¿Qué clases de esfuerzos causan la falla?
¿Tensión? ¿Compresión? ¿Cortante?

A lo que podríamos contestar: **“depende del material en cuestión y de sus resistencias relativas a la compresión, a la tensión y al cortante. También depende del tipo de carga (ya sea estática o dinámica), y de la presencia o ausencia de grietas en el material”**.

Teoría de falla



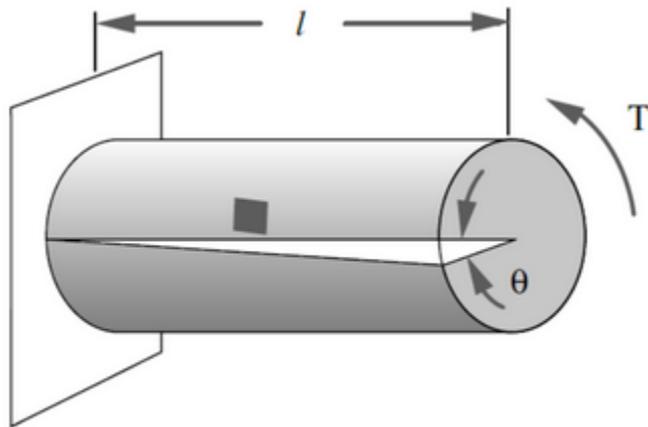
La figura ilustra el círculo de Mohr para el estado de esfuerzos en una muestra de prueba a la tensión.

El círculo de Mohr muestra que también se presenta un esfuerzo cortante, el cual es exactamente la mitad de la magnitud del esfuerzo normal. ¿Cuál esfuerzo hace fallar a la pieza, el esfuerzo normal o el esfuerzo cortante?

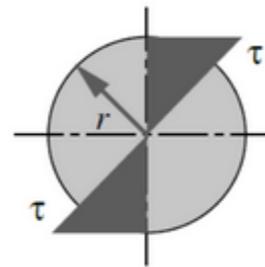
Teoría de falla

La figura ilustra el círculo de Mohr del estado de esfuerzos en una muestra de prueba a la torsión.

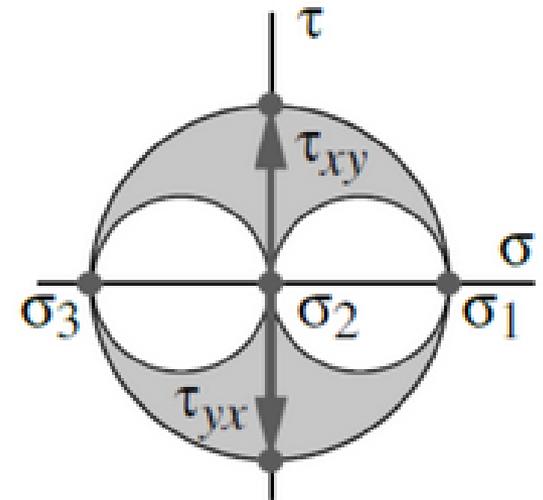
El círculo de Mohr muestra que también se presenta un esfuerzo normal, el cual es exactamente igual al esfuerzo cortante. ¿Cuál esfuerzo hace fallar la pieza, el esfuerzo normal o el esfuerzo cortante?



(a) Deflexión θ



(b) Distribución del esfuerzo cortante





Teoría de falla

En general, **los materiales dúctiles e isotrópicos con cargas estáticas de tensión están limitados por sus resistencias al cortante; mientras que los materiales frágiles están limitados por sus resistencias a la tensión.**

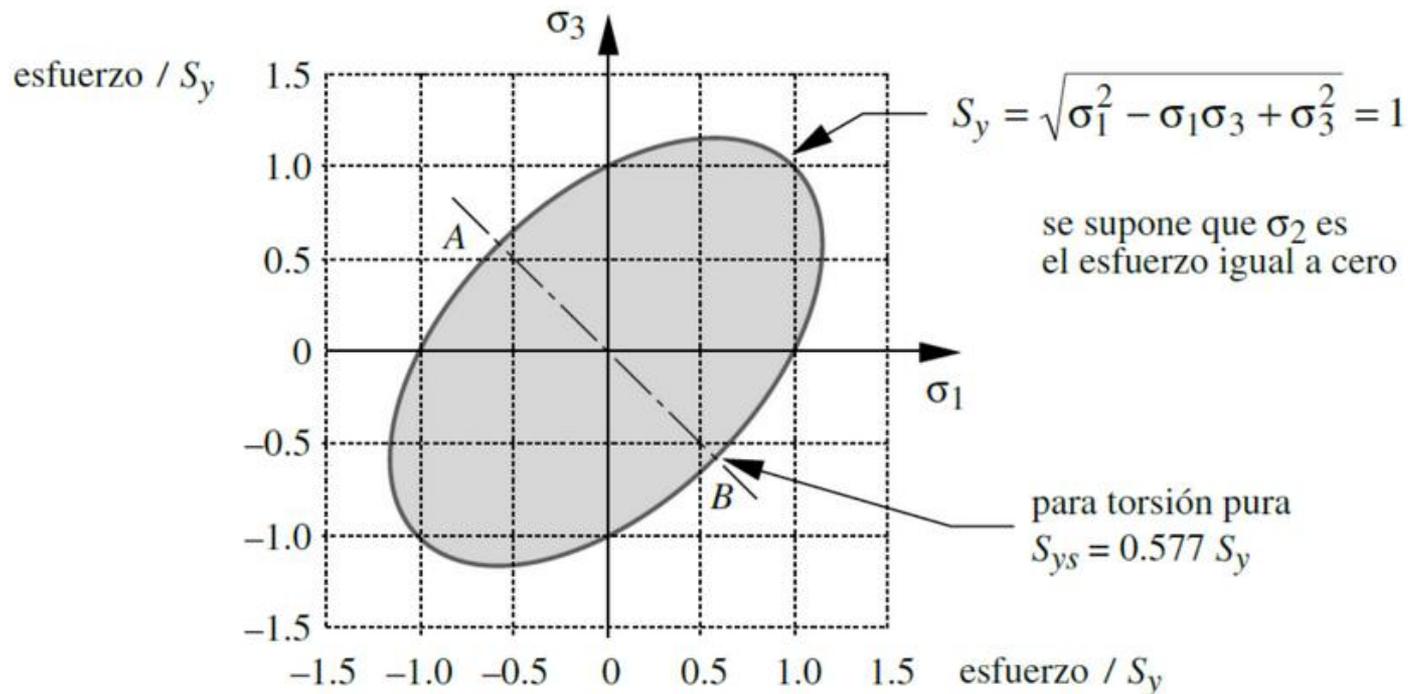
Esta situación provoca que existan teorías de falla diferentes para las **dos clases de materiales, dúctiles y frágiles.**

La ductilidad se define de varias maneras, la más común de las cuales la define en función del **porcentaje de elongación en la fractura del material que, si es $> 5\%$, se considera dúctil.** La mayoría de los metales dúctiles tienen elongaciones en la fractura $> 10\%$.



Teoría de falla: VON MISES-HENCKY

Ahora se sabe que el mecanismo de fluencia microscópico se debe al deslizamiento relativo de los átomos del material dentro de su estructura de entramado. Este deslizamiento es causado por un esfuerzo cortante y está acompañado por la distorsión de la forma de la pieza. La energía almacenada en la pieza por esta distorsión es un indicador de la magnitud del esfuerzo cortante presente.





Teoría de falla: VON MISES-HENCKY

ESFUERZO EFECTIVO DE VON MISES

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}$$

$$\sigma' = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2}$$

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$



Teoría de falla: VON MISES-HENCKY

Cortante puro:

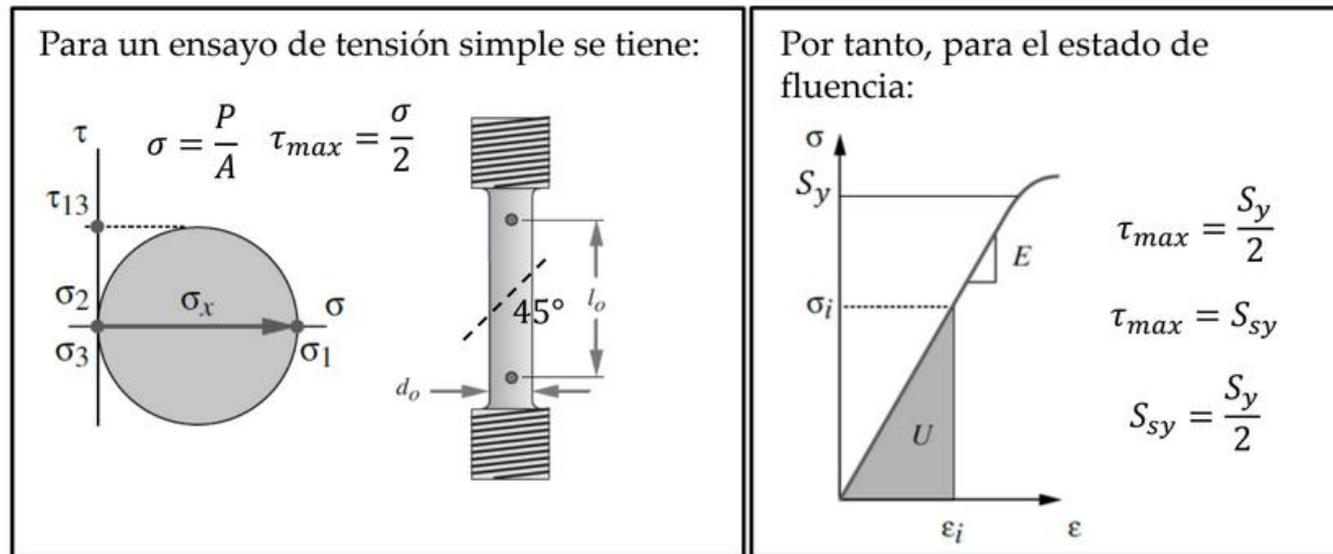
$$S_y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_1 + \sigma_1^2 = 3\sigma_1^2 = 3\tau_{máx}^2$$

$$\sigma_1 = \frac{S_y}{\sqrt{3}} = 0.577 S_y = \tau_{máx}$$

$$S_{ys} = 0.577 S_y$$

Teoría de falla: TRESCA

La teoría del esfuerzo cortante máximo estipula que la **fluencia comienza cuando el cortante máximo de cualquier material de cualquier elemento iguala al esfuerzo de cortante máximo en una pieza de ensayo a tensión del mismo material cuando esa pieza comienza a fluir** (Teoría de Tresca o Guest).





Teoría de falla: TRESCA

TERORÍA DE ESFUERZO CORTANTE MÁXIMO

Caso 2D

