# APLICACIONES COMPUTACIONALES

INGENIERÍA EJECUCIÓN MECÁNICA

## ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

# MOTIVACIÓN

Una ecuación que tiene **derivadas parciales** de una función desconocida, de dos o más variables independientes, se denomina ecuación diferencial parcial, o **EDP**.

Segundo orden, lineal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$$

Segundo orden, no lineal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu\frac{\partial u}{\partial y} = x$$

Tercer orden, lineal

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$$

Tercer orden, no lineal

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3 + 6\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x$$

## MOTIVACIÓN

Debido a su amplia aplicación en ingeniería, estudiaremos únicamente las ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden.
Para dos variables independientes, se pueden expresar de la forma general siguiente:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0$$

donde A, B y C son funciones de *x* e *y*, y D es una función de *x, y, u, ∂u/∂x y ∂u/∂y*.

Dependiendo de los valores de los coeficientes de los términos de la segunda derivada (A, B y C), la ecuación se clasifica en una de tres categorías.

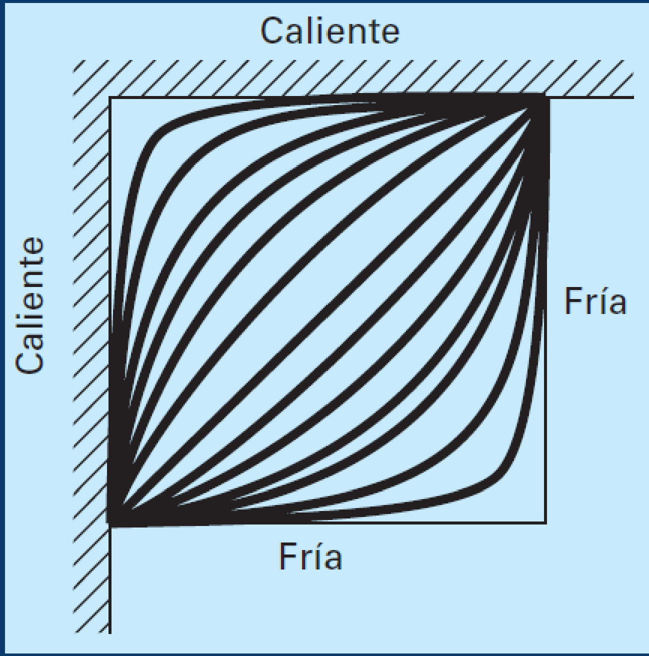
UdeSantiago de Chile

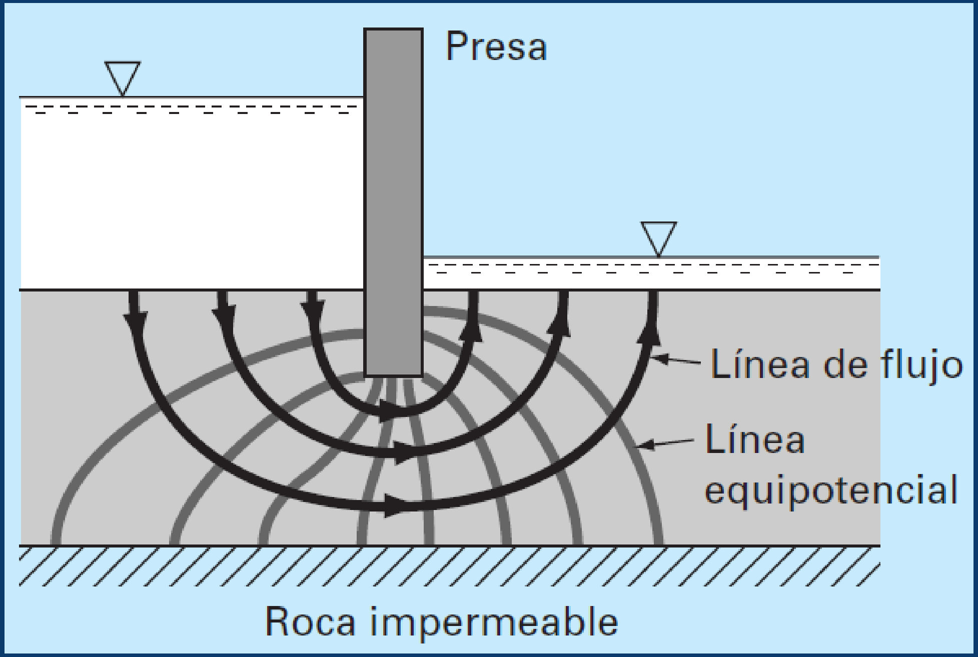
**TABLA 1**: Categorías en las que se clasifican las ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden con dos variables.

| $B^2 - 4AC$ | Categoría | Ejemplo |
|---|---|---|
| $< 0$ | Elíptica | Ecuación de Laplace (estado estacionario con dos dimensiones espaciales) $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$ |
| $= 0$ | Parabólica | Ecuación de conducción del calor (variable de tiempo y una dimensión espacial) $$\frac{\partial T}{\partial t} = k' \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$ |
| $> 0$ | Hiperbólica | Ecuación de onda (variable de tiempo y una dimensión espacial) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$ |

Comúnmente, las ***ecuaciones elípticas*** se utilizan para caracterizar sistemas en estado **estacionario**. Como en la ecuación de Laplace (Tabla 1). Esto se indica, por la **ausencia** de una derivada con respecto **al tiempo**.

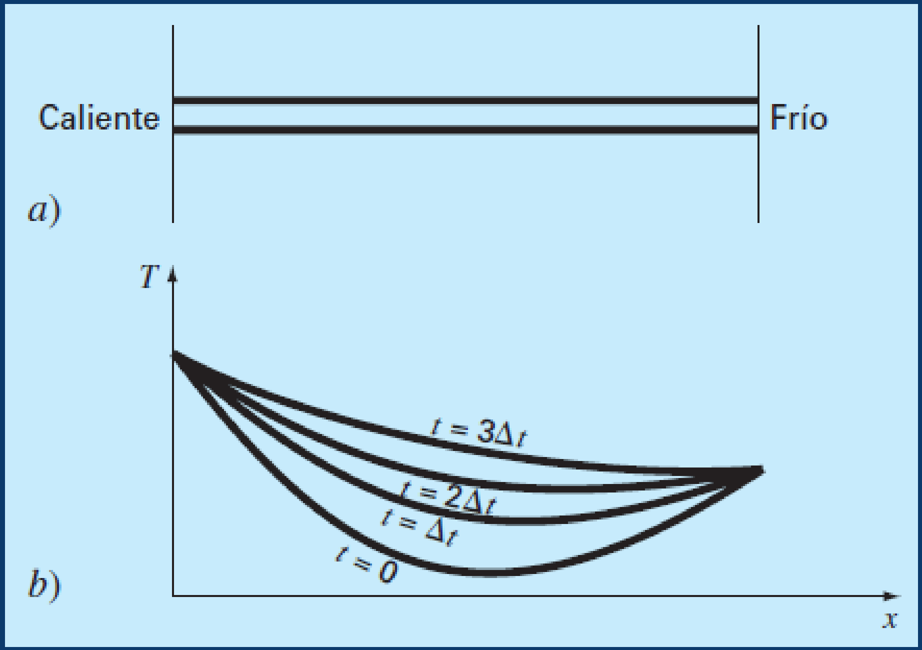
Así, estas ecuaciones se emplean para determinar la distribución en estado estacionario de una incógnita en dos dimensiones espaciales.



# MOTIVACIÓN

Las ***ecuaciones parabólicas*** determinan cómo una incógnita varía tanto en el espacio como en el tiempo, lo cual se manifiesta por la presencia de las derivadas espacial y temporal, como la ecuación de conducción de calor (Tabla 1). Tales casos se conocen como problemas de propagación, puesto que la solución se "propaga", o cambia, con el tiempo.

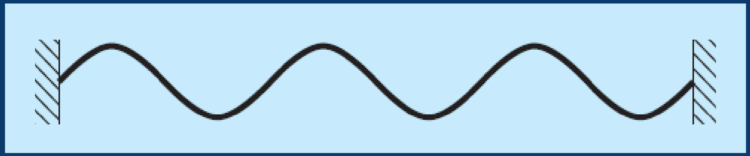



Barra que está aislada, excepto en sus extremos. La dinámica de la distribución unidimensional de temperatura a lo largo de la barra se puede describir mediante una EDP parabólica.

## MOTIVACIÓN



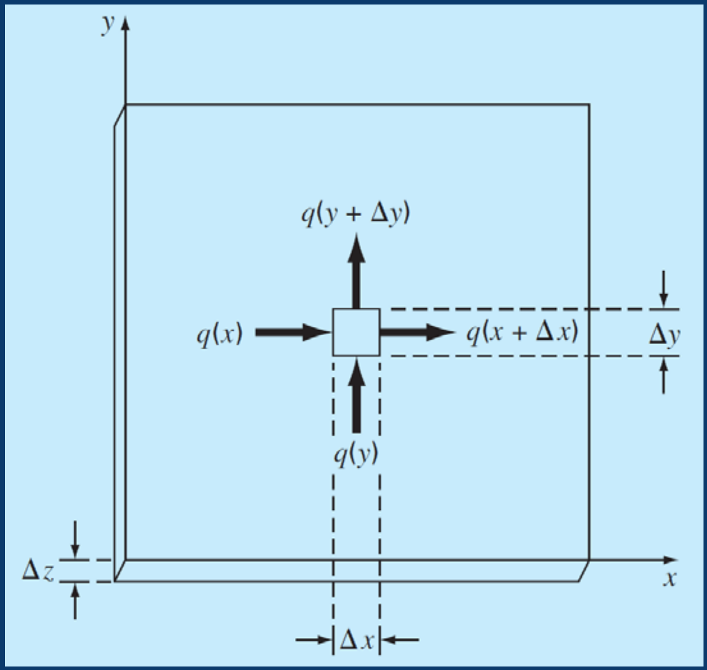
La categoría ***hiperbólica***, también tiene que ver con problemas de ***propagación***. Sin embargo, una importante diferencia manifestada por la ecuación de onda (Tabla 1), es que la incógnita se caracteriza por una segunda derivada con respecto al tiempo. En consecuencia, la solución oscila.



Una cuerda tensa que vibra a baja amplitud es un sistema físico simple que puede caracterizarse por una EDP hiperbólica.

La ***ecuación de Laplace*** se utiliza para modelar diversos problemas que tienen que ver con el potencial de una variable desconocida.

Debido a su simplicidad y a su relevancia en la mayoría de las áreas de la ingeniería, usaremos una placa rectangular calentada para deducir y resolver esta EDP elíptica.




En estado estacionario, el flujo de calor hacia el elemento en una unidad de tiempo $\Delta t$ debe ser igual al flujo de salida, es decir:

$$-\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}=0$$

$$q_i=-k\rho C\frac{\partial T}{\partial i}$$

$$T=\frac{H}{\rho C V}$$

$$k'=k\rho C$$

$$q(x)\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t+q(y)\,\Delta x\,\Delta z\,\Delta t=q(x+\Delta x)\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t+q(y+\Delta y)\Delta x\,\Delta z\,\Delta t$$

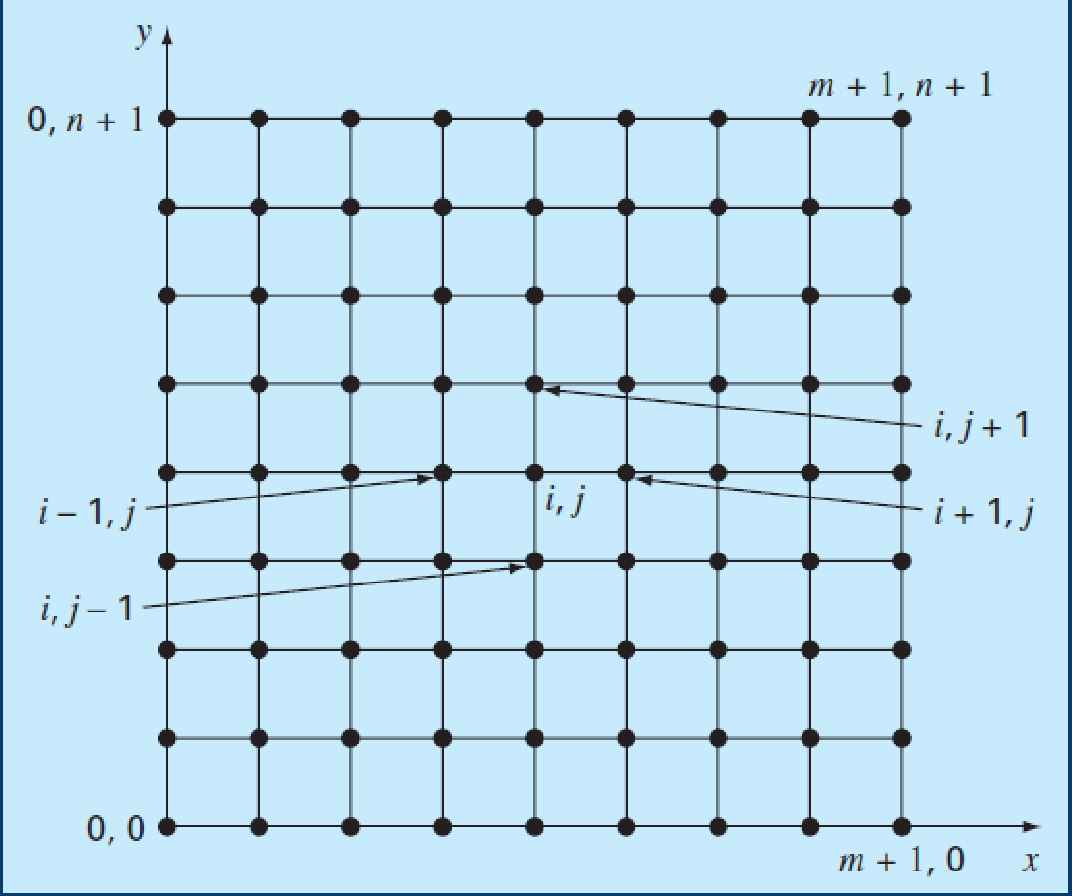
Reemplazando las expresiones anteriores, se obtiene la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Diferencias centradas para la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$



UdeSantiago de Chile

Sustituyendo las expresiones anteriores se obtiene:

$$\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j+1}-2T_{i,j}+T_{i,j-1}}{\Delta y^2}=0$$

Si en la malla se cumple que $\Delta x = \Delta y$, y reagrupando términos, la ecuación se convierte en

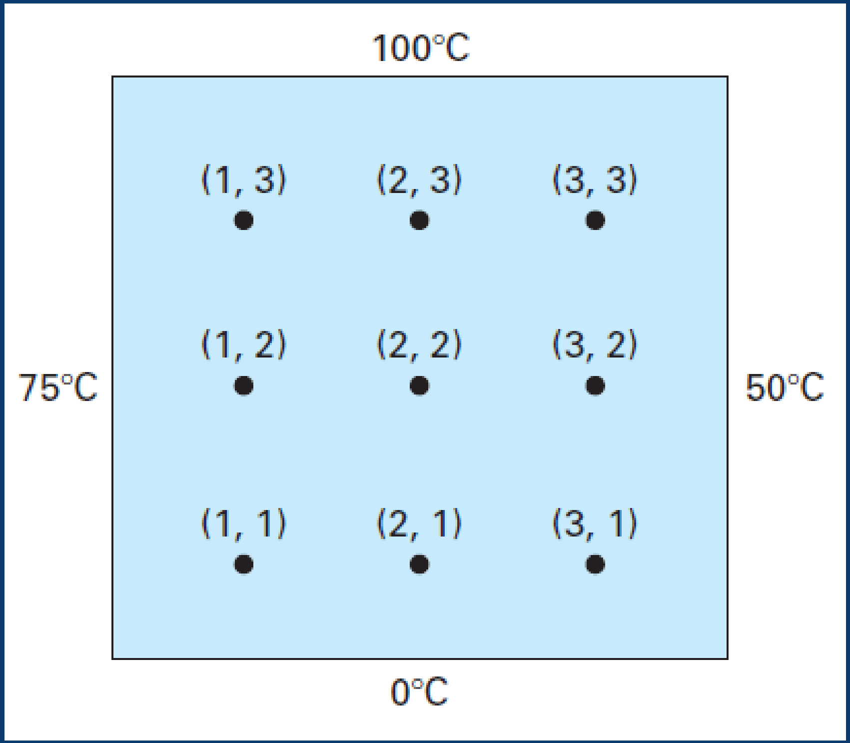
$$T_{i+1,j}+T_{i-1,j}+T_{i,j+1}+T_{i,j-1}-4T_{i,j}=0$$

Esta relación, que se satisface por todos los ***puntos interiores*** de la placa, se conoce como ***ecuación laplaciana en diferencias***.

Además, se deben especificar las condiciones de frontera en los extremos de la placa para obtener una solución única. El caso más simple es aquel donde la temperatura en la frontera es un valor fijo (que se conoce como ***condición de frontera de Dirichlet***).

## DIFERENCIAS FINITAS: ECUACIONES ELÍPTICAS

Una placa calentada donde las temperaturas de la frontera se mantienen a niveles constantes.




$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

Escriba las ecuaciones para cada uno de los nodos de la siguiente placa.

UdeSantiago de Chile

SOLUCIÓN: Sistema de ecuaciones algebraicas lineales A x = b

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
4T_{11} & -T_{21} & & -T_{12} & & & & & & = & 75 \\
-T_{11} & +4T_{21} & -T_{31} & & -T_{22} & & & & & = & 0 \\
 & -T_{21} & +4T_{31} & & & -T_{32} & & & & = & 50 \\
-T_{11} & & & +4T_{12} & -T_{22} & & -T_{13} & & & = & 75 \\
 & -T_{21} & & -T_{12} & +4T_{22} & -T_{32} & & -T_{23} & & = & 0 \\
 & & -T_{31} & & -T_{22} & +4T_{32} & & & -T_{33} & = & 50 \\
 & & & -T_{12} & & & +4T_{13} & -T_{23} & & = & 175 \\
 & & & & -T_{22} & & -T_{13} & +4T_{23} & -T_{33} & = & 100 \\
 & & & & & -T_{32} & & -T_{23} & +4T_{33} & = & 150
\end{array}
$$

```
% Matlab:
x = A \ b
```

## DIFERENCIAS FINITAS: ECUACIONES ELÍPTICAS

Debido al gran número de ceros que aparecen en la matriz A (Ax=b), los métodos aproximados representan un mejor procedimiento para obtener soluciones de EDP elípticas. El método comúnmente empleado es el de Gauss-Seidel, (método de Liebmann).

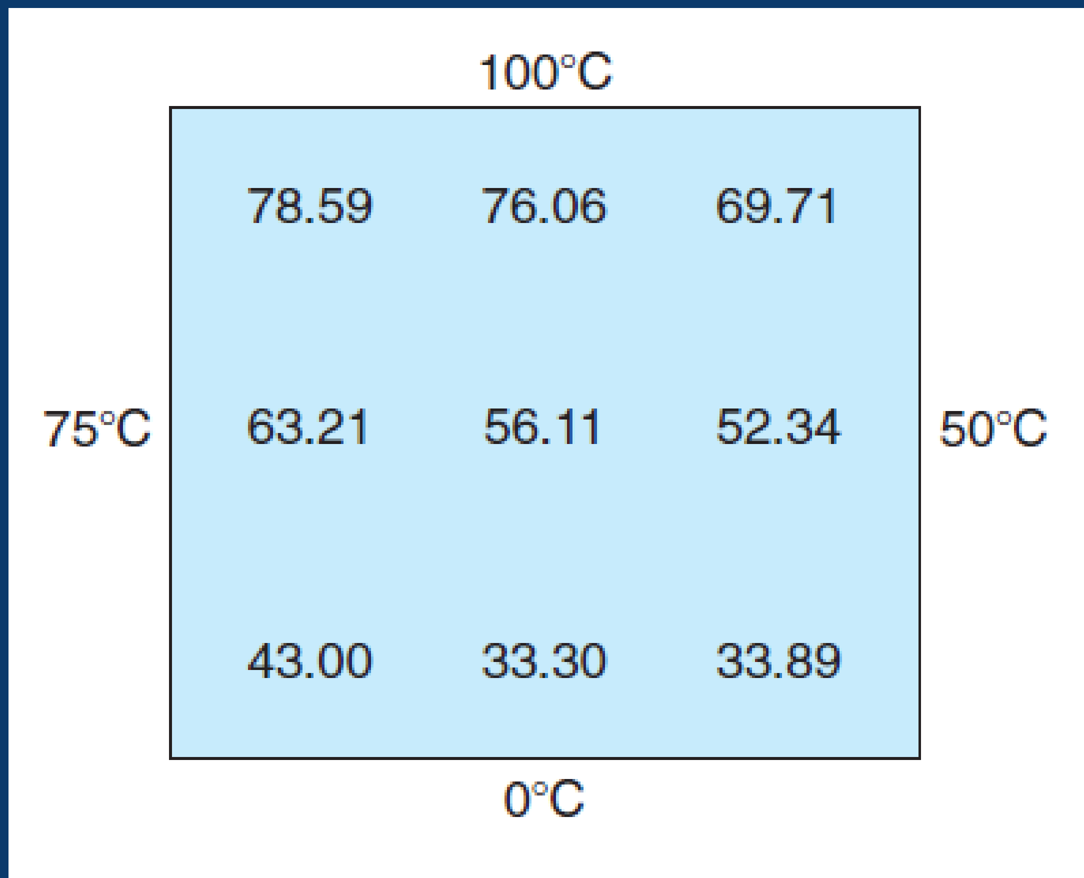
Con esta técnica, la ***ecuación laplaciana en diferencias*** se expresa como:

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4}$$

y se resuelve de manera iterativa para j = 1 hasta n e i = 1 hasta m.

Como la ecuación es diagonalmente dominante, este procedimiento al final convergerá a una solución estable.

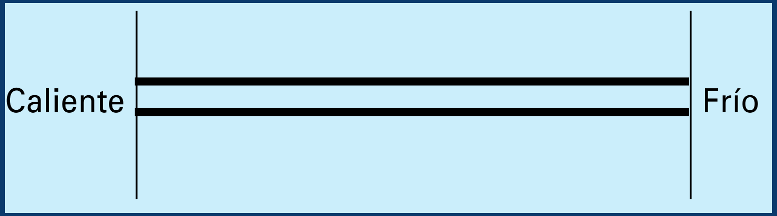
Distribución de temperatura en una placa calentada, sujeta a condiciones de frontera fijas.



## LA ECUACIÓN DE CONDUCCIÓN DE CALOR

De manera similar a la deducción de la ecuación de Laplace, se puede establecer el balance de calor de un elemento diferencial en una barra (larga y delgada) aislada sujeta a temperaturas en sus extremos.

Consideremos en esta ocasión la cantidad de calor que se almacena en el elemento en un ***periodo*** $\Delta t$.




El balance tiene la forma [entradas – salidas = acumulación]:

$$q(x)\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t - q(x+\Delta x)\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z \rho C\,\Delta T$$

Dividiendo por el volumen y ***Δt***:

$$\frac{q(x)-q(x+\Delta x)}{\Delta x} = \rho C \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

Tomando límite se llega a:

$$\frac{q}{x} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

UdeSantiago de Chile

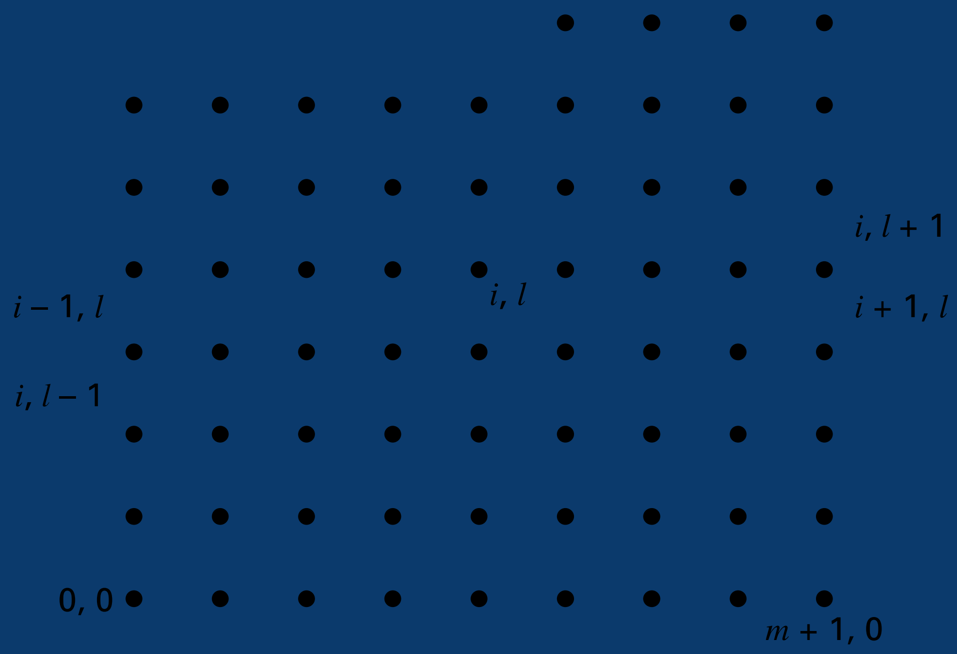
Sustituyendo la ley de Fourier para la conducción del calor se obtiene:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

que es la ***ecuación de conducción del calor***.

De la misma manera que con las EDP elípticas, las ecuaciones parabólicas se resuelven sustituyendo las derivadas parciales por diferencias divididas finitas. Sin embargo, debemos considerar cambios tanto **en el tiempo** como **en el espacio**. Mientras que las ecuaciones elípticas están acotadas en todas las dimensiones, las EDP parabólicas están **temporalmente abiertas** en los extremos.

Malla utilizada para la solución por diferencias finitas de las EDP parabólicas con dos variables independientes. Observe que la malla está abierta en los extremos en la dimensión temporal.



## MÉTODO EXPLICITO

La ecuación de conducción del calor requiere aproximaciones de la **segunda derivada** en el **espacio**, y de la **primera derivada** en el **tiempo**.

La segunda derivada se representa, de la misma manera que la ecuación de Laplace, mediante una diferencia dividida finita centrada:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{l} - 2T_{i}^{l} + T_{i-1}^{l}}{\Delta x^2}$$

Una diferencia dividida finita hacia adelante sirve para aproximar a la derivada con respecto al tiempo:

Sustituyendo

con $\lambda = k\,\Delta t/(\Delta x)^2$

# ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)
## DIFERENCIAS FINITAS: ECUACIONES PARABÓLICAS

UdeSantiago de Chile

**PROBLEMA**

Con el método explícito calcule la distribución de temperatura en una barra con las siguientes propiedades:

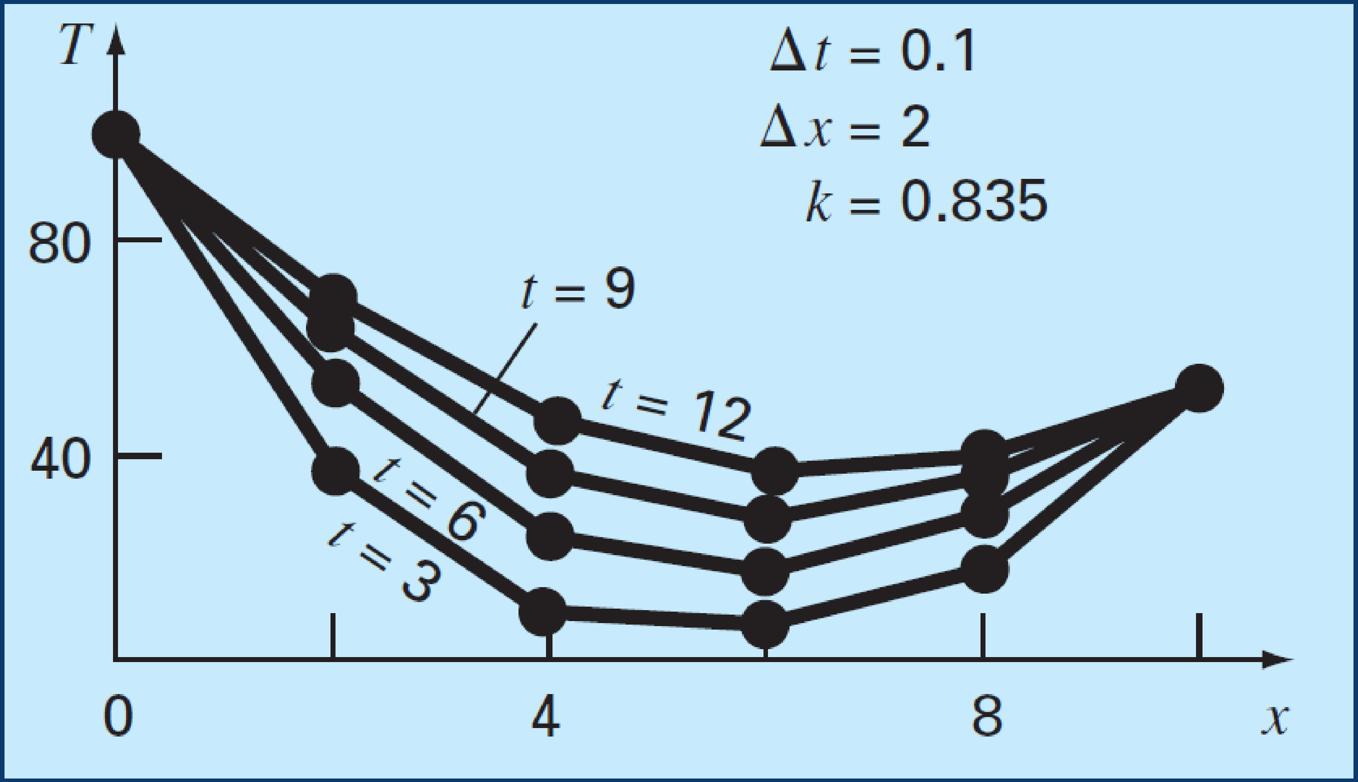
$L$ = 10 cm
$k'$ = 0.49 cal/(s cm ºC)
$\Delta x$ = 2 cm
$\Delta t$ = 0.1 s

En $t$ = 0, la temperatura de la barra es cero, y las condiciones de frontera se fijan para todos los tiempos en:
$T(x=0)$ = 100ºC y $T(x=10)$ = 50ºC.

Considere que la barra es de aluminio con:
$C$ = 0.2174 cal/(g ºC)
$\rho$ = 2.7 g/cm3

con $\lambda = k\,\Delta t/(\Delta x)^2$

## SOLUCION




| t=0.2 s |
|---|
| 4.0878 |
| 0.043577 |
| 0.021788 |
| 2.0439 |

Se puede demostrar (véase Carnahan y cols., 1969) que el método explícito es convergente y estable si

$$\Delta t \leq \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{k}$$

La ecuación de conducción del calor se puede aplicar a más de una dimensión espacial.
Para dos dimensiones, su forma es

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Esta ecuación ofrece un medio para calcular la distribución de temperatura conforme cambia con el tiempo.

Es posible obtener una solución explícita sustituyendo en la ecuación las aproximaciones por diferencias finitas.
Este método está limitado por un estricto criterio de estabilidad, que para el caso bidimensional corresponde a

$$\Delta t \le \frac{1}{8}\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{k}$$