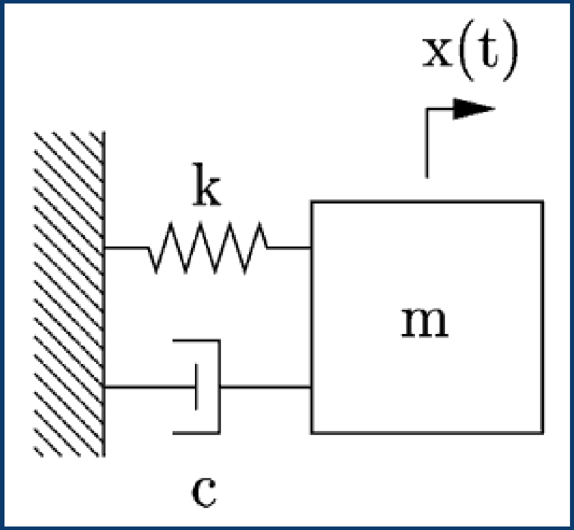
APLICACIONES COMPUTACIONALES

INGENIERÍA EJECUCIÓN MECÁNICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

UdeSantiago de Chile

Se llamará ***ecuación diferencial*** a aquella ecuación que contiene una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o mas variables independientes.
Cuando la función tiene *una variable* independiente, la ecuación se llama ***ecuación diferencial ordinaria*** (o *EDO*).



Sistema Masa-Resorte-Amortiguador

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + k\,x = 0$$

x: variable dependiente
t: variables independiente

k: constante del resorte
c: coeficiente de amortiguamiento

Las ecuaciones diferenciales se clasifican también en cuanto a su orden. Por ejemplo, la ecuación que describe la posición x*(t)* del sistema masa-resorte-amortiguamiento es una *EDO de segundo orden*.

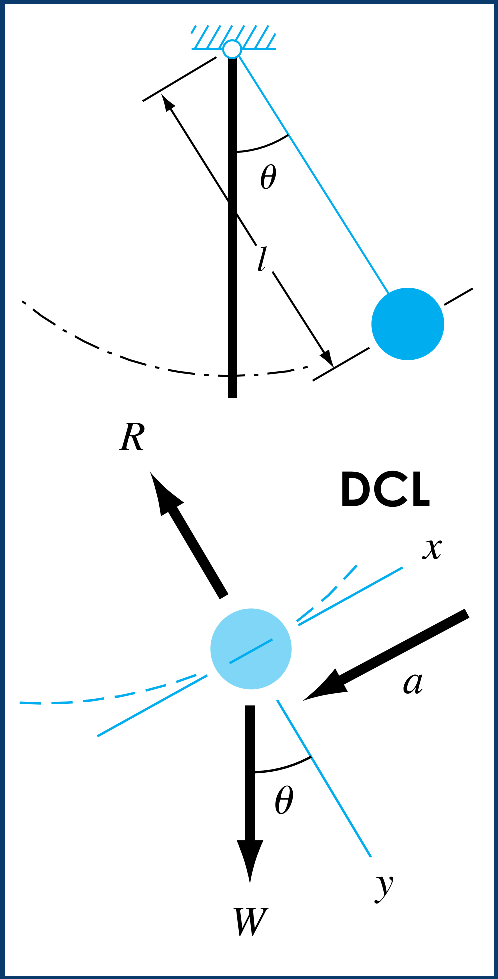
MOTIVACIÓN

Las ecuaciones de orden superior pueden reducirse a un sistema de ecuaciones de primer orden. Esto se logra al definir una nueva variable. Por ejemplo, para la ecuación del sistema masa-resorte-amortiguador se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{c\,y + kx}{m}$$

Esto constituye un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, equivalente a la ecuación de segundo orden original.



Otro ejemplo simple es la aplicación de las EDO para predecir el movimiento de un péndulo oscilante.

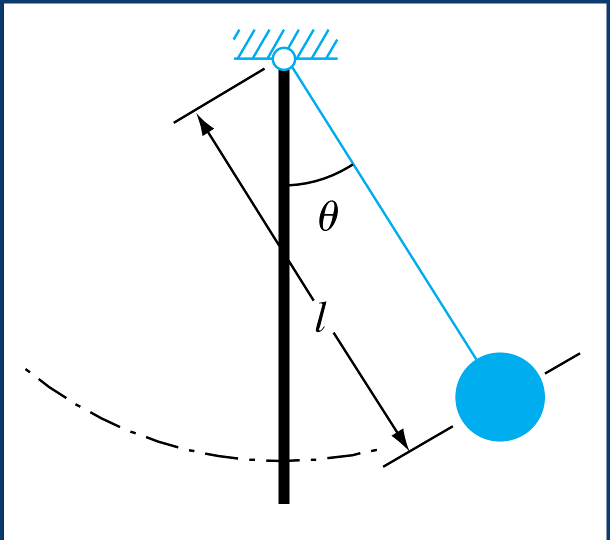
La partícula de peso *W* está suspendida de un cable sin peso de longitud *l*. Las únicas fuerzas que actúan sobre esta partícula son su peso y la tensión *R* en el cable. La posición de la partícula en cualquier instante está completamente especificada en términos del ángulo theta y *l*.

$$\boxed{\sum F = m\,a}$$

$$\boxed{a = \frac{d^2\theta}{dt^2} l}$$

$$-W \sin\theta = \frac{W}{g}\frac{d^2\theta}{dt^2} l$$

MOTIVACIÓN



La EDO que gobierna el movimiento de un péndulo oscilante queda entonces como:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Esta ecuación aparentemente simple es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden, prácticamente imposible de resolver de manera analítica.

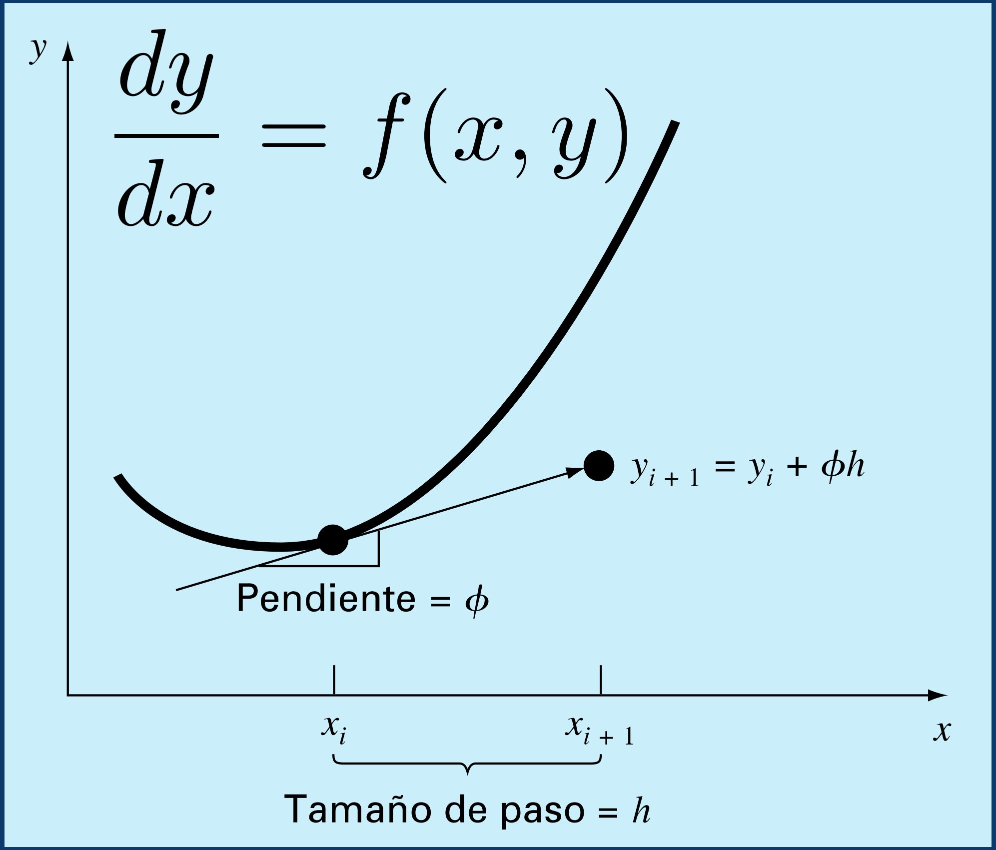
Solución analítica aproximada: La transformamos en una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\sin\theta \approx \theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Solución aproximada válida para pequeños oscilaciones del ángulo.

Idea: La pendiente estimada (figura) se usa para extrapolar desde un valor anterior y_i a un nuevo valor y_{i+1} en una distancia h.
Los métodos de un paso que se expresen de esta forma general, tan sólo van a diferir en la manera en la que se estima la pendiente.



En otras palabras, se toma la pendiente al inicio del intervalo como una aproximación de la pendiente promedio sobre todo el intervalo.
Tal procedimiento, se llama *método de Euler*.

UdeSantiago de Chile

Método de Euler

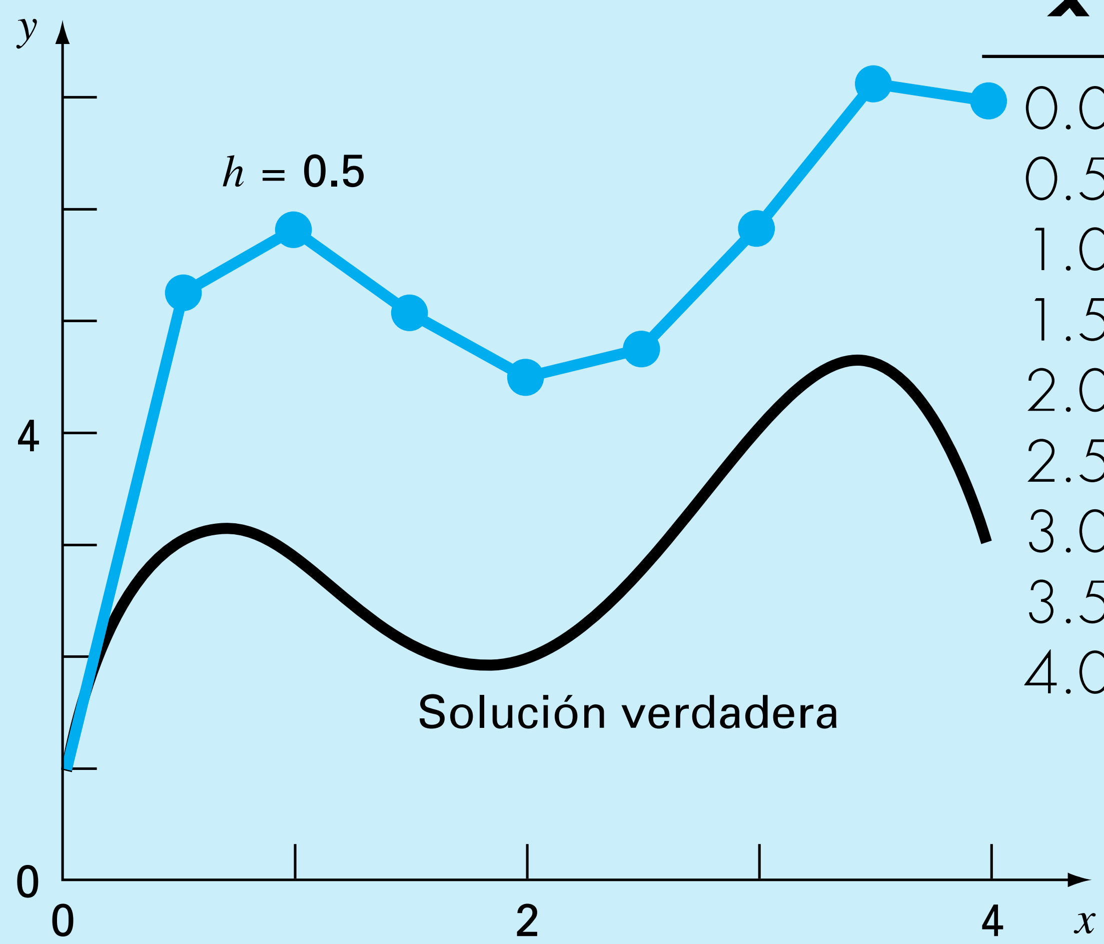
$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ejemplo: Resuelva esta ecuación diferencial usando el método de Euler para x=0 hasta x=4

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

Use un paso h=0.5 y la condición inicial y(x=0)=1.

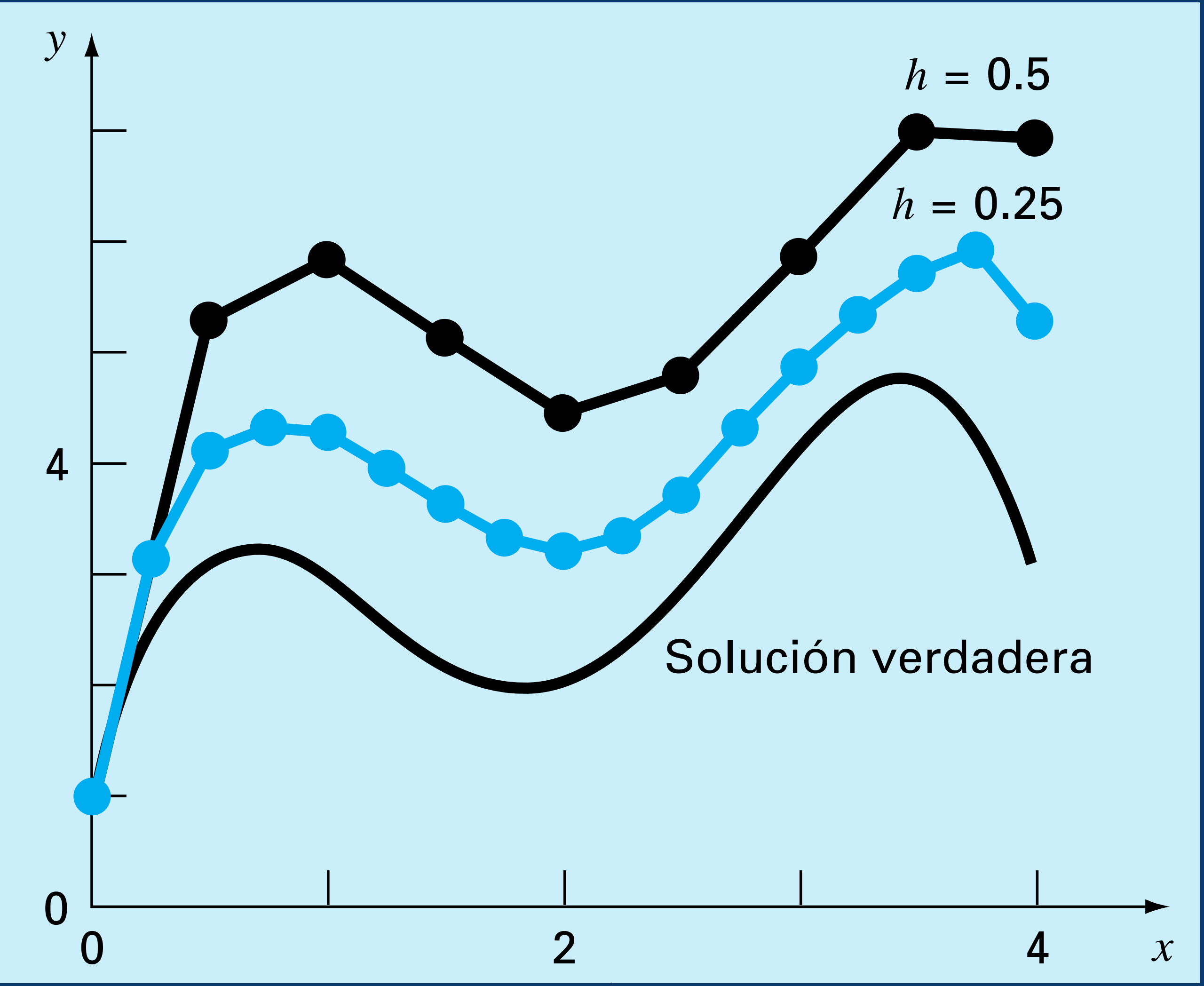
Método de Euler



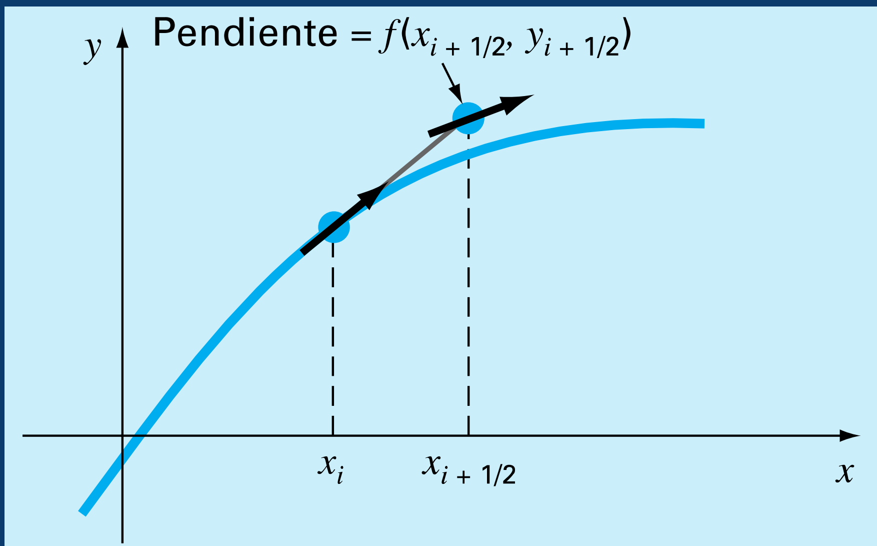
x	$y_{verdadero}$	y_{Euler}
0.0	1.00000	1.00000
0.5	3.21875	5.25000
1.0	3.00000	5.87500
1.5	2.21875	5.12500
2.0	2.00000	4.50000
2.5	2.71875	4.75000
3.0	4.00000	5.87500
3.5	4.71875	7.12500
4.0	3.00000	7.00000

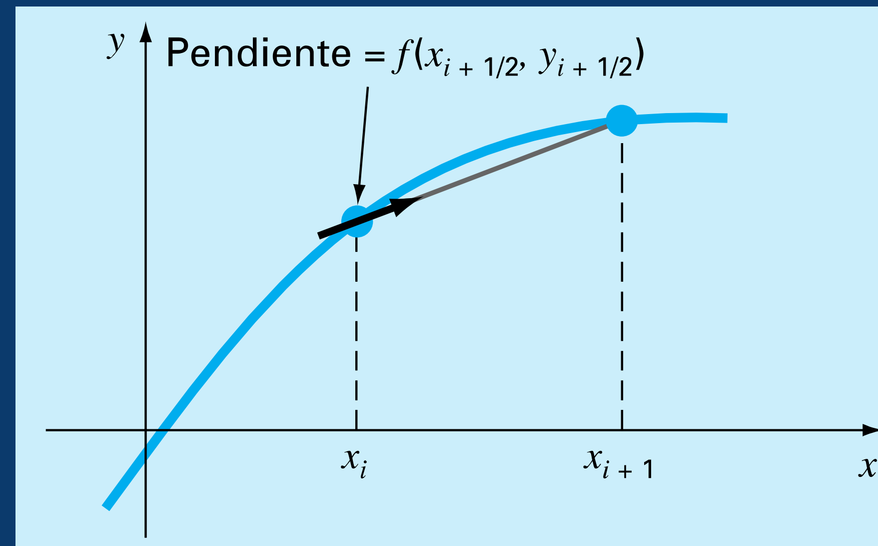
UdeSantiago de Chile

Método de Euler



Método de Euler Modificado o Método de punto medio





$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(y_{i+1/2}, t_{i+1/2})$$

UdeSantiago de Chile

Los **métodos de *Runge-Kutta*** (*RK*) logran la exactitud del procedimiento de la serie de Taylor sin necesitar el cálculo de derivadas de orden superior.
Su forma general está dada por

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

donde Φ(*xi*, *yi*, *h*) se conoce como *función incremento*, la cual puede interpretarse como una pendiente representativa en el intervalo.
La función incremento tiene la forma:

$$\phi(x_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$
$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

UdeSantiago de Chile

Métodos de Runge-Kutta de segundo orden

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

Los coeficientes a1, a2, p1, q11 se evalúan al igualar la ecuación que aproxima y(i+1) con la expansión de la serie de Taylor hasta el termino de segundo orden, obteniéndose las siguientes expresiones

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad a_2 p_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

Sistema formado por 3 ecuaciones y 4 incógnitas. Debemos fijar el valor de una para obtener las otras 3. Esto conduce a infinitas posibilidades del método Runge-Kutta de orden 2.

UdeSantiago de Chile

Método de Heun con un solo corrector ($a2 = ½$)

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

Método del Punto Medio ($a2 = 1$)

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

Método del Ralston ($a2 = 2/3$)

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$