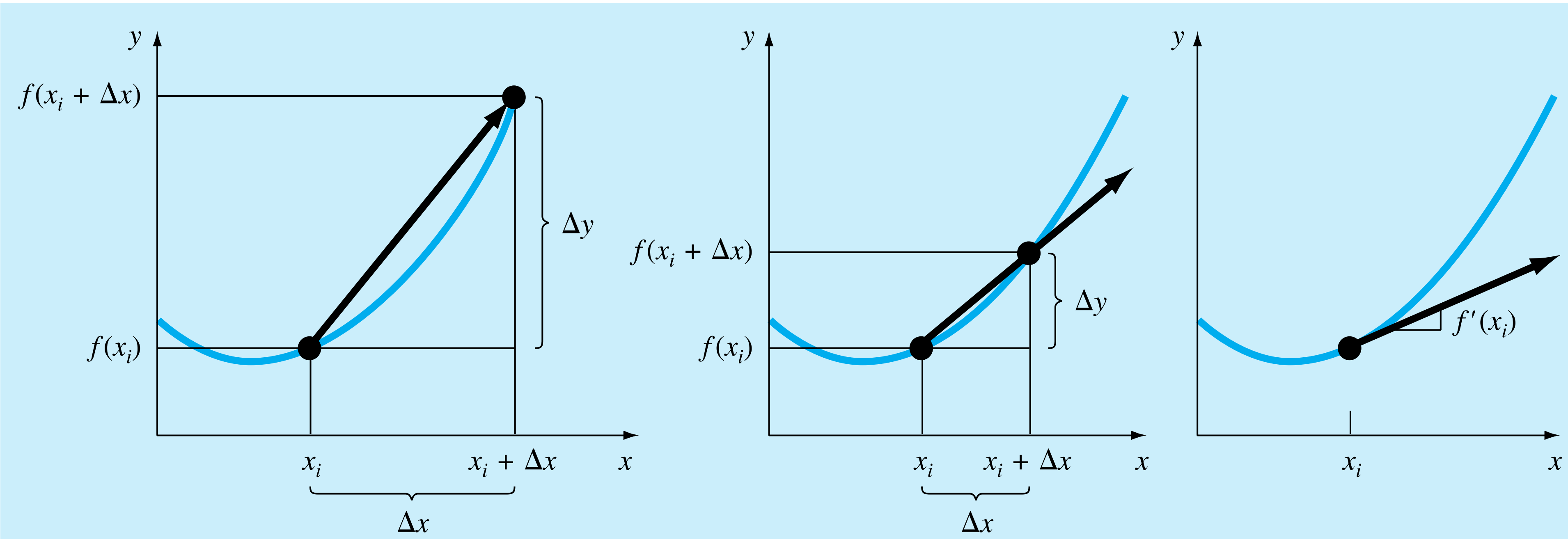
APLICACIONES COMPUTACIONALES

INGENIERÍA EJECUCIÓN MECÁNICA

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA DERIVADA



Aproximación

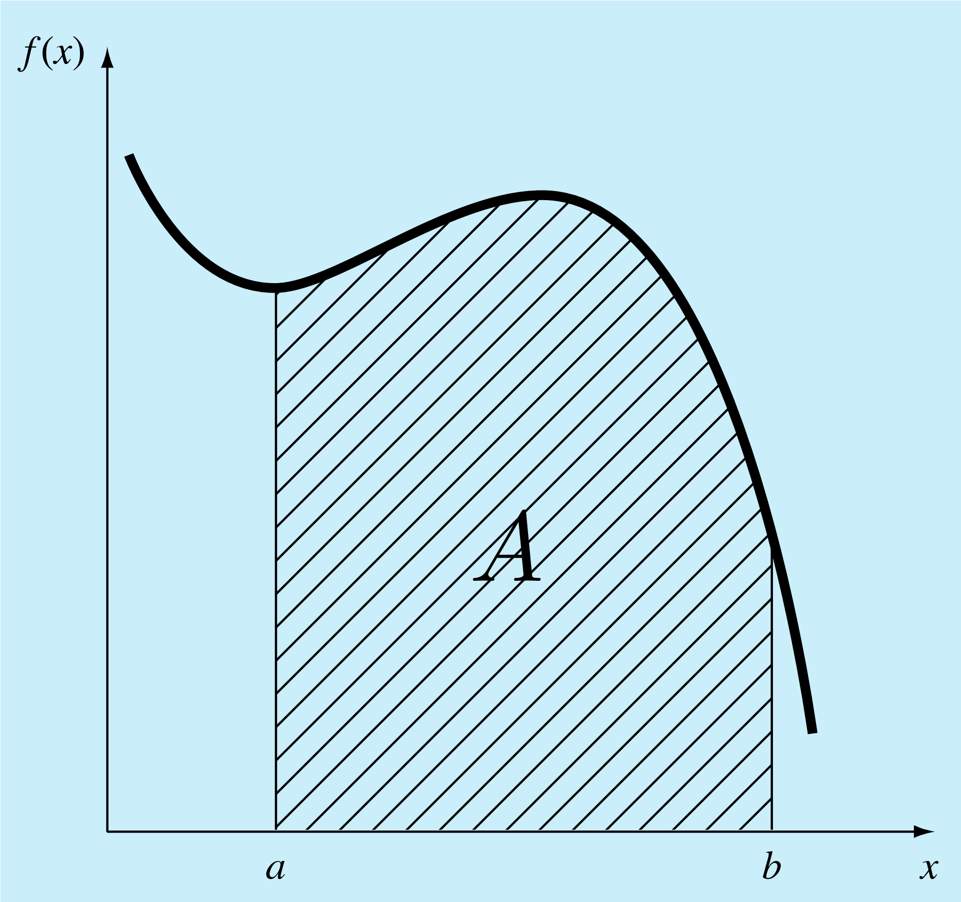
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

$$\Delta x \to 0$$

Definición

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA INTEGRAL

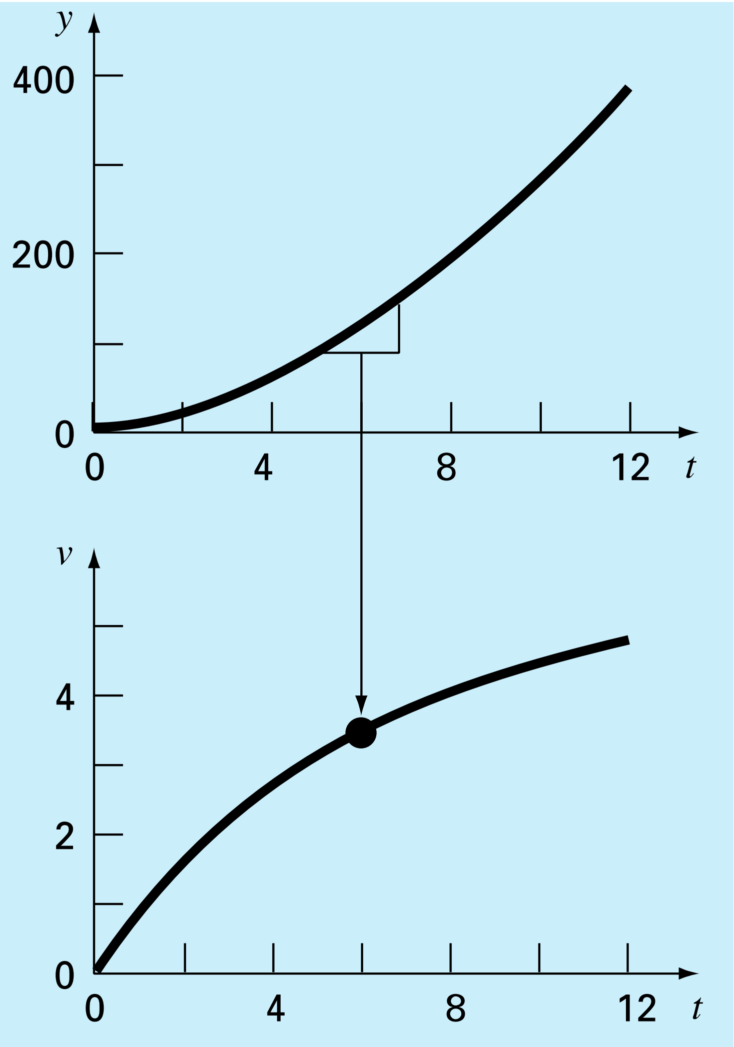


La integral es equivalente al área bajo la curva:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Representa la integral de la función *f*(*x*) con respecto a la variable independiente *x*, evaluada entre los límites *x* = *a* y *x* = *b*.

DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

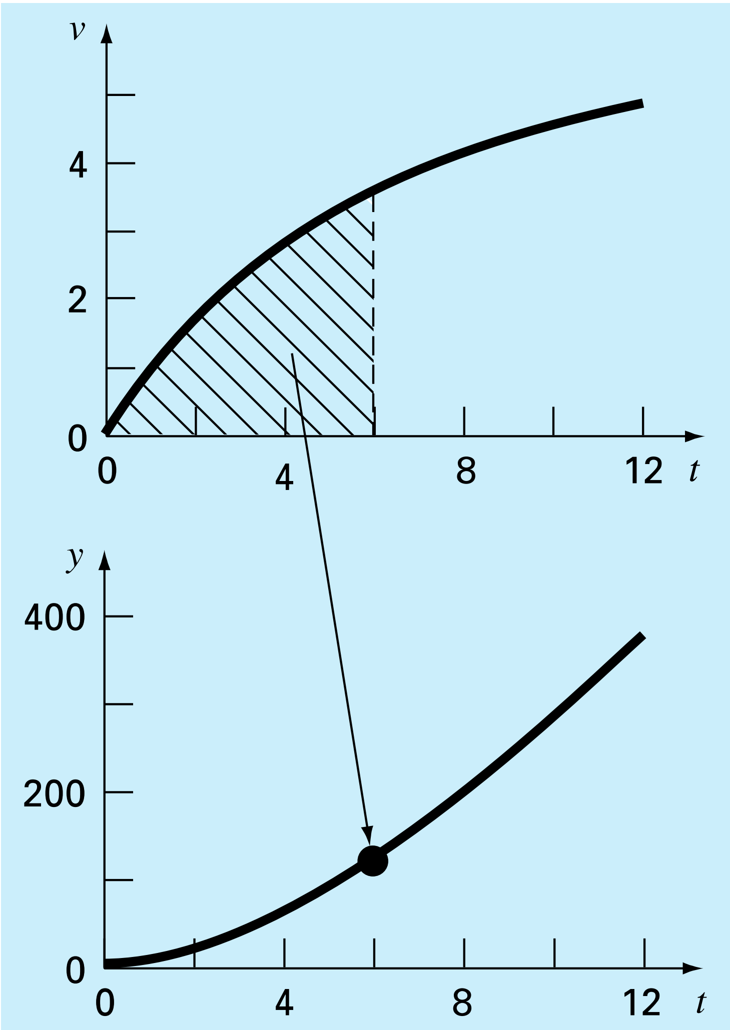


La diferenciación y la integración son procesos estrechamente relacionados, de hecho, inversamente relacionados.

Por ejemplo, si se tiene una función dada $y(t)$ que especifica la posición de un objeto en función del tiempo, la diferenciación proporciona un medio para determinar su velocidad:

$$v(t) = \frac{d}{dt} y(t)$$

DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN



De manera inversa, si se tiene la velocidad como una función del tiempo, la integración se utilizará para determinar su posición:

$$y(t) = \int_0^t v(t)\,dt$$

DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

De manera general, se tiene que la evaluación de la integral:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

es equivalente a resolver la ecuación diferencial

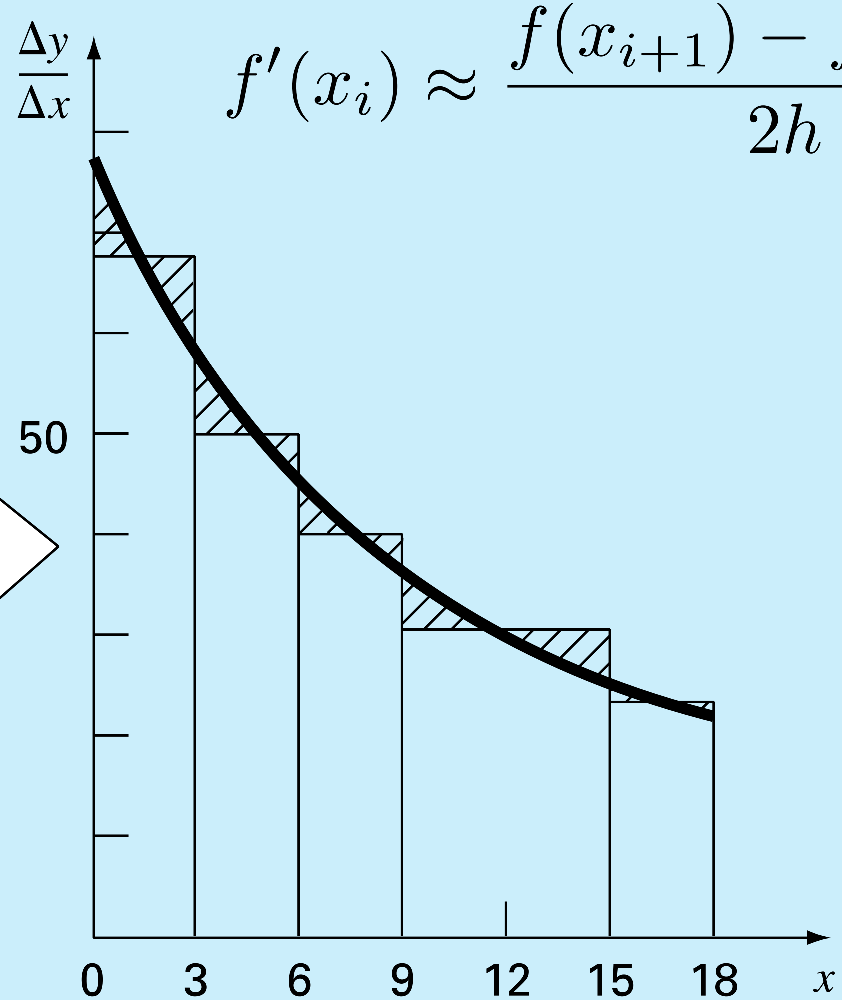
$$f(x) = \frac{dy}{dx}$$

para $y(b)$ dada la condición inicial $y(a) = 0$.

MÉTODO GRAFICO PARA DIFERENCIACIÓN

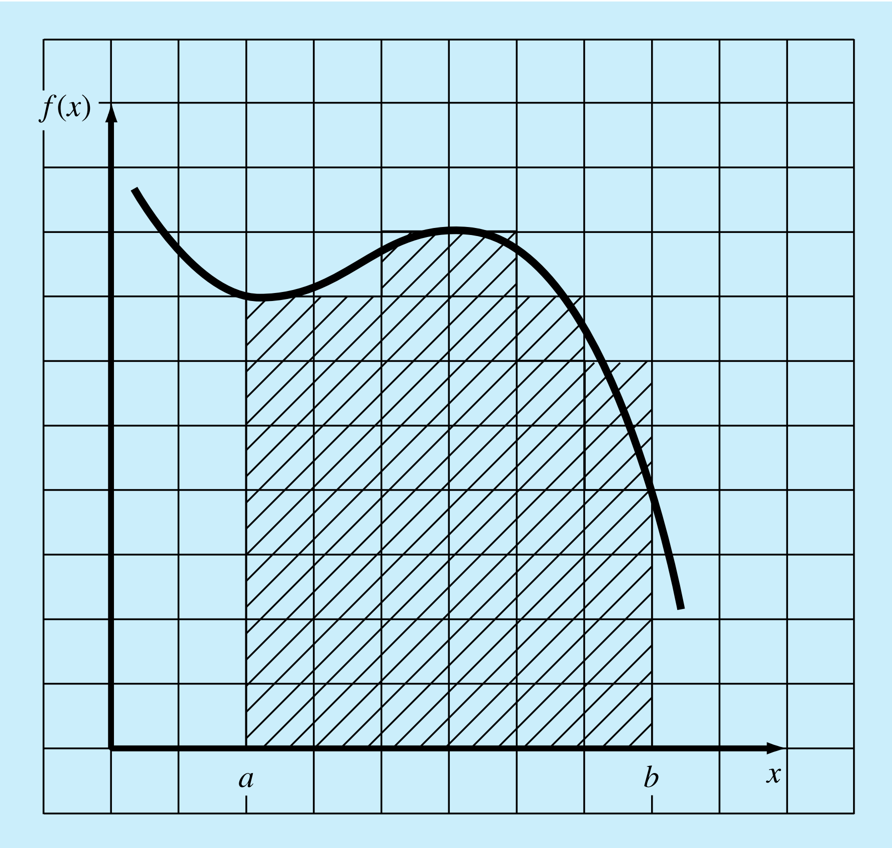
$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

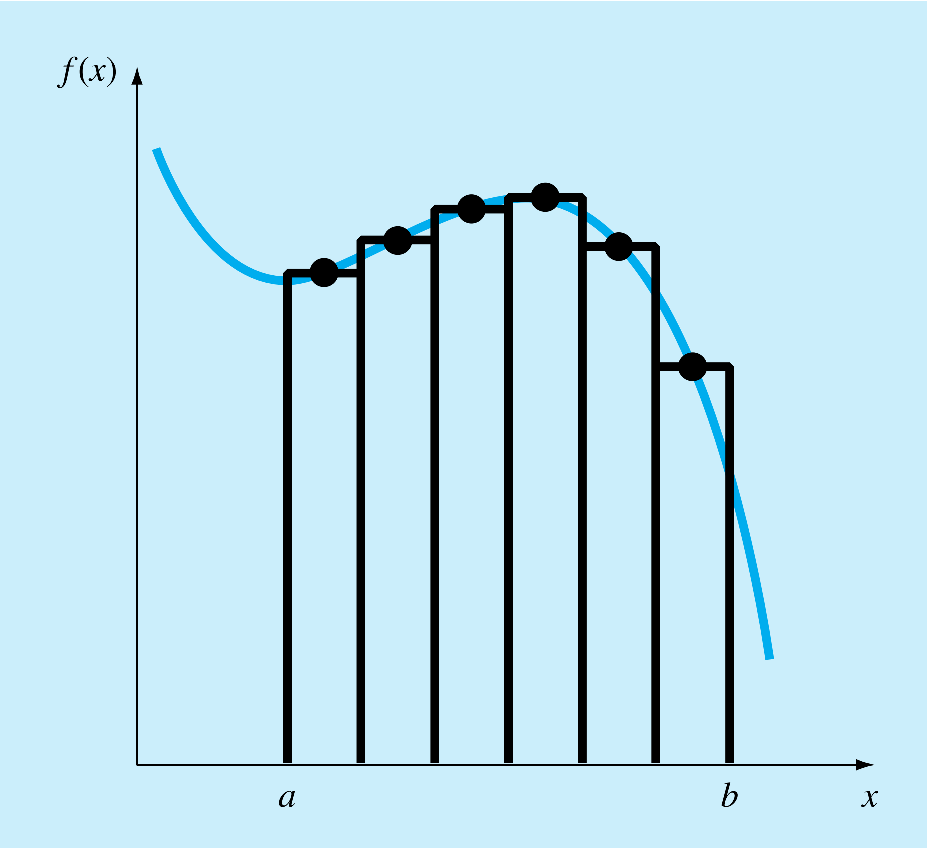
x	y	$\Delta y/\Delta x$
0	0	
		66.7
3	200	
		50
6	350	
		40
9	470	
		30
15	650	
		23.3
18	720	



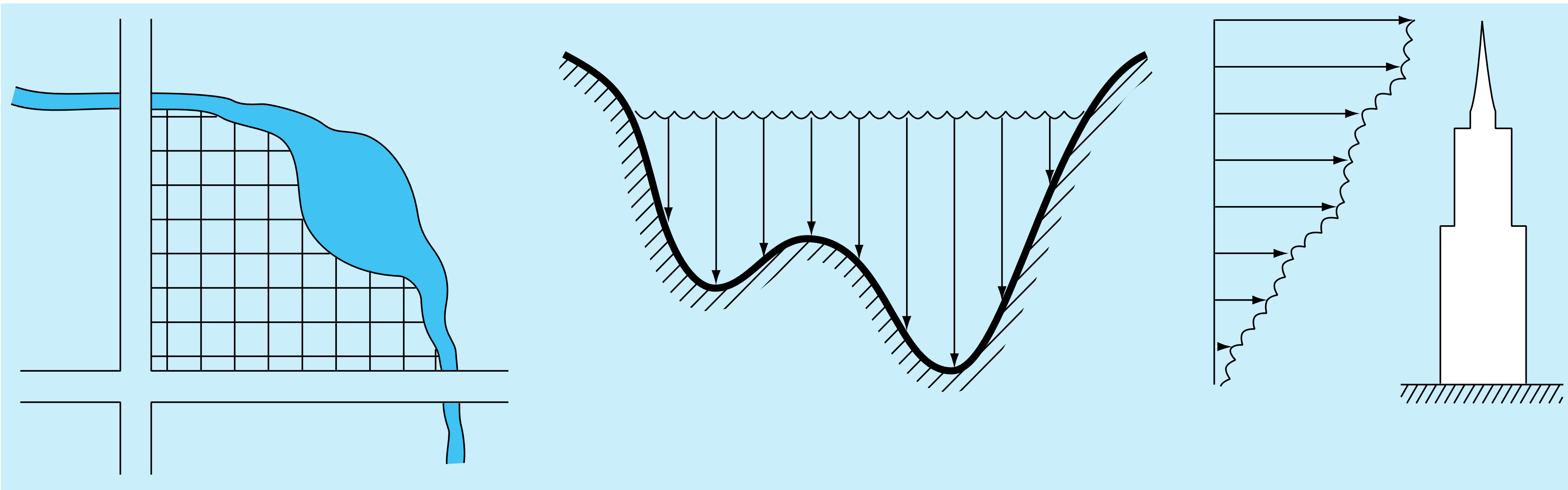
x	dy/dx
0	76.50
3	57.50
6	45.00
9	36.25
15	25.00
18	21.50

MÉTODO GRAFICO PARA INTEGRACIÓN





APLICACIONES EN INGENIERÍA



Un topógrafo podría necesitar conocer el área de un campo limitado.

Un ingeniero en hidráulica tal vez requiera conocer el área de la sección transversal de un río.

Un ingeniero en estructuras quizá necesite determinar la fuerza neta ejercida por un viento no uniforme que sopla contra un lado de un rascacielos.

UdeSantiago de Chile

APLICACIONES EN INGENIERÍA

Masa de un sólido con densidad variable:

$$M = \int\int\int \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Masa total de una barra con densidad variable, y que tiene un área de sección transversal constante:

$$m = A\int_0^L \rho(x)\, dx$$

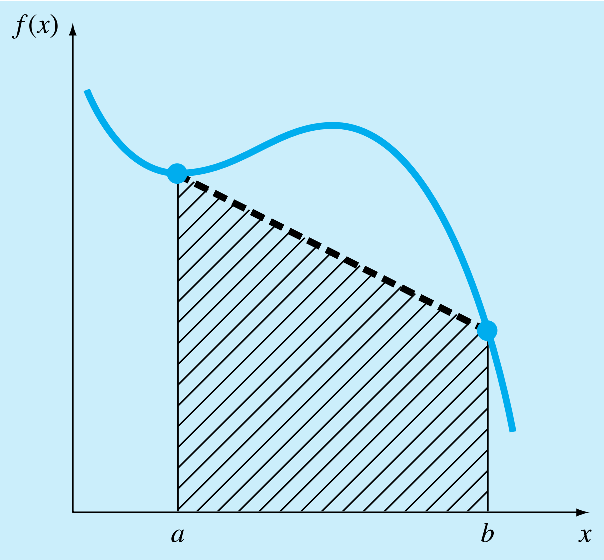
NEWTON-COTES

Se basan en la estrategia de reemplazar una función o datos tabulados por un polinomio de aproximación que es fácil de integrar.

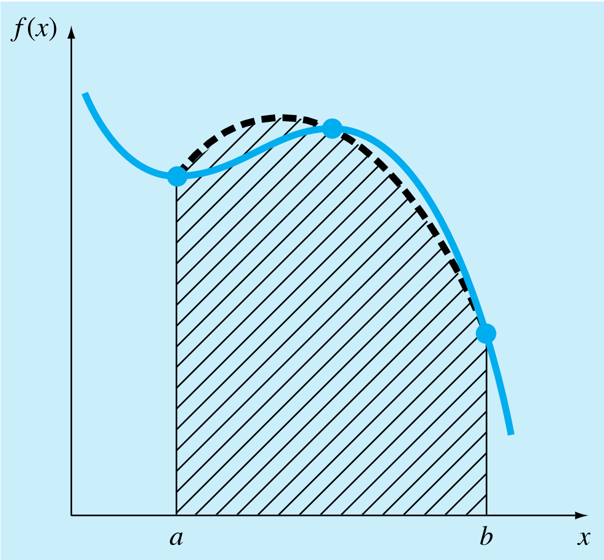
$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Donde la $f_n(x)$ es un polinomio de la forma:

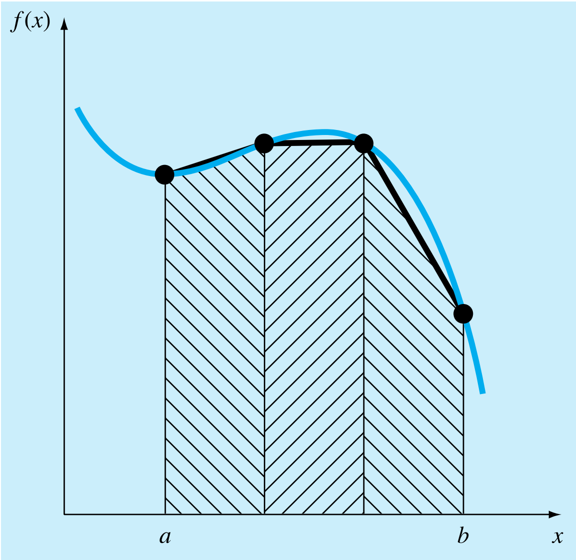
$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$



Polinomio de grado uno para aproximar una integral.

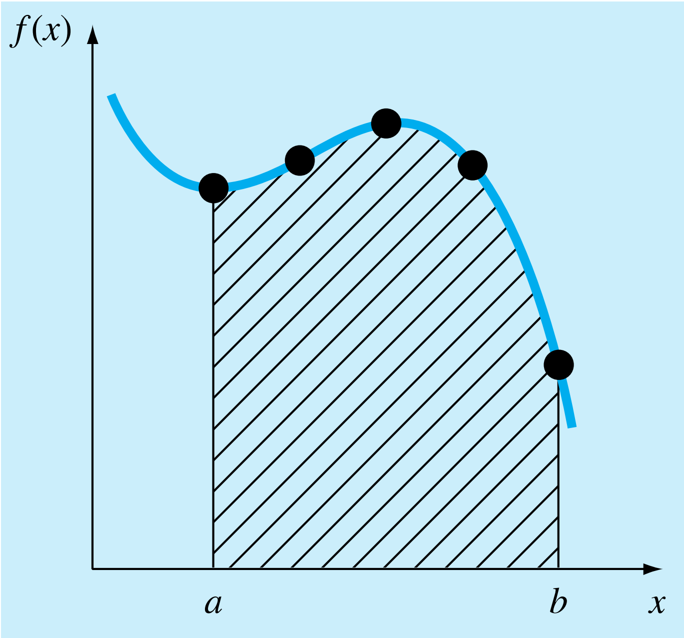


Polinomio de grado dos para aproximar una integral.

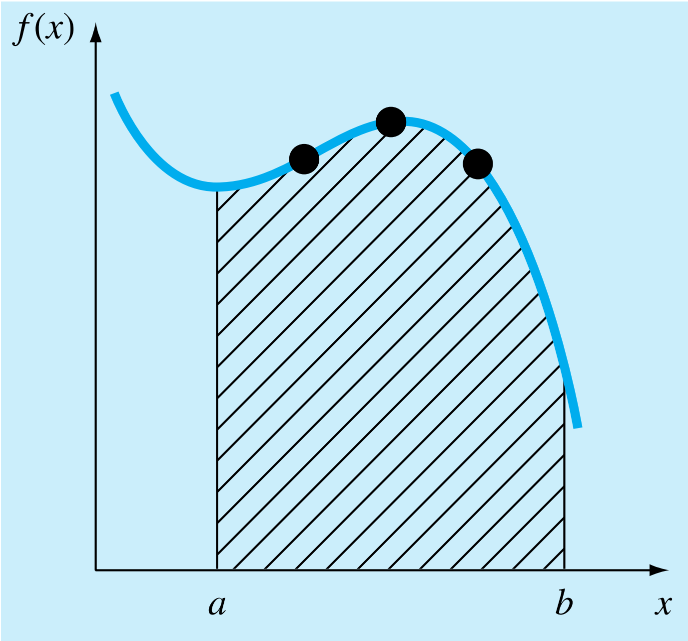


Varios polinomios de grado uno (línea recta) para aproximar una integral.

Existen formas cerradas y abiertas de las fórmulas de Newton-Cotes.

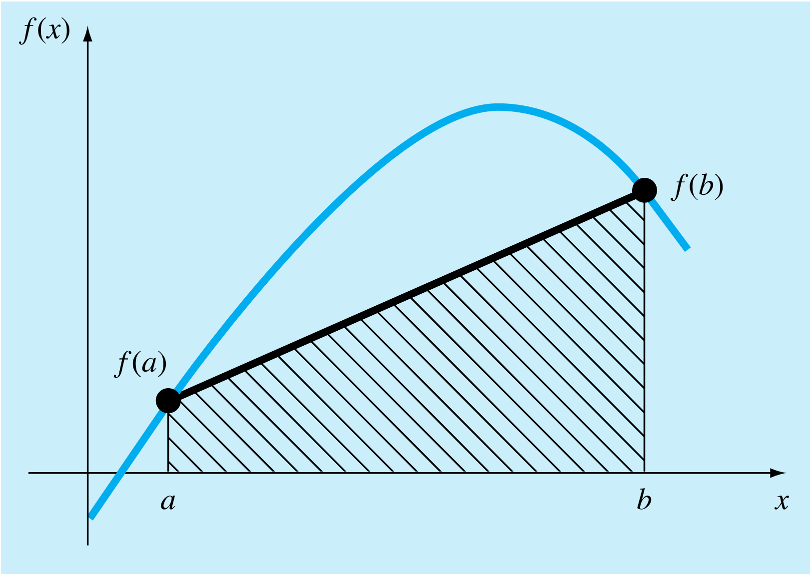


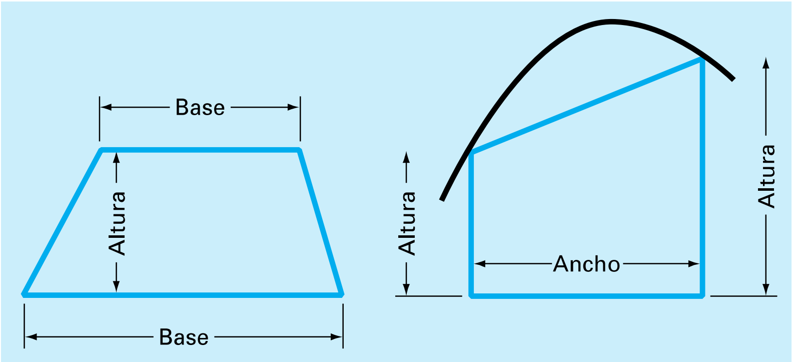
formas cerradas son aquellas donde se conocen los datos al inicio y al final de los límites de integración.



Las ***formas abiertas*** tienen límites de integración que se extienden más allá del intervalo de los datos.

REGLA DEL TRAPECIO



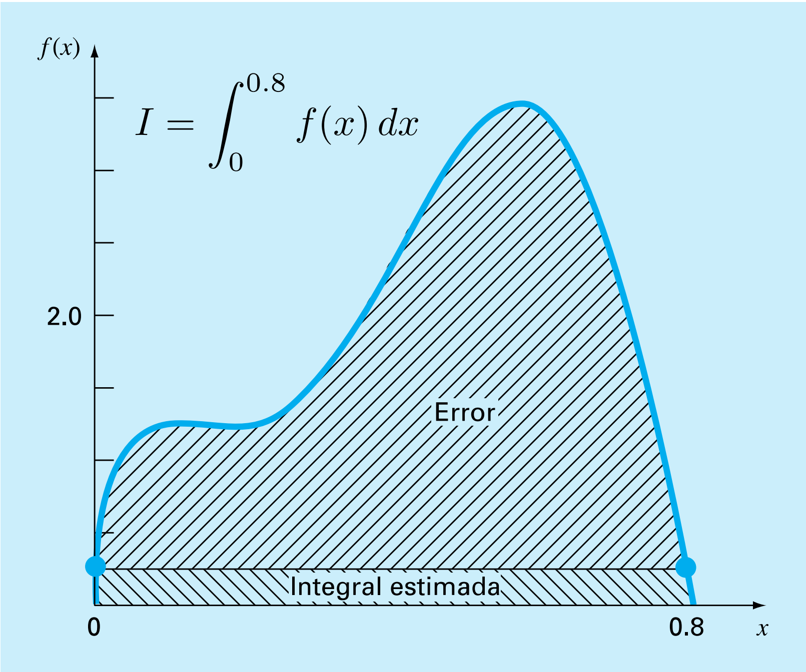


La ***regla del trapecio o regla trapezoidal*** es la primera de las fórmulas de Newton-Cotes.

Geométricamente, la regla del trapecio es equivalente a aproximar el área del trapecio bajo la línea recta que une $f(a)$ y $f(b)$.

$$I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ERROR DE LA REGLA DEL TRAPECIO



$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

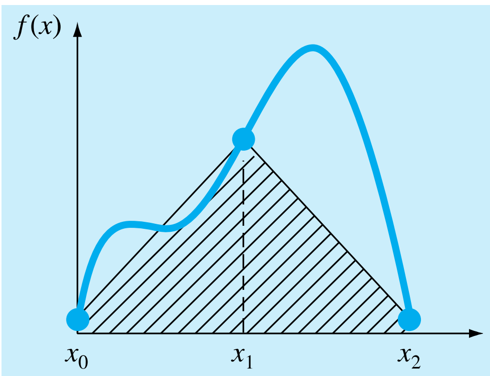
Una estimación al error de truncamiento local para una sola aplicación de la regla del trapecio es:

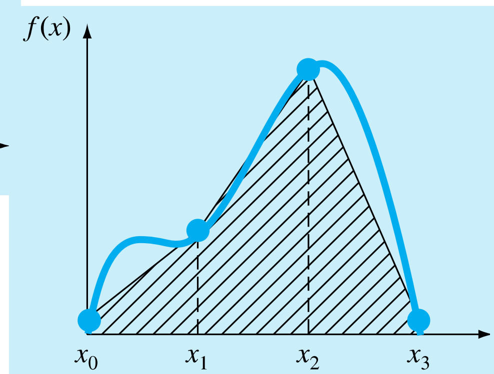
$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

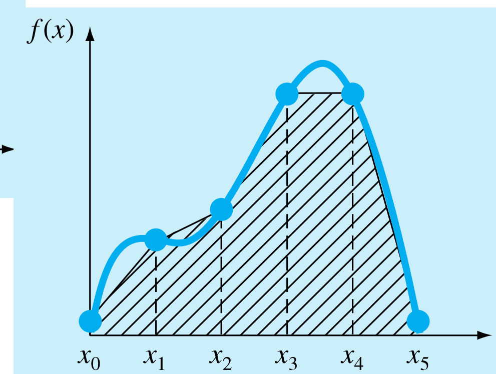
donde ξ está en algún lugar en el intervalo [a, b].

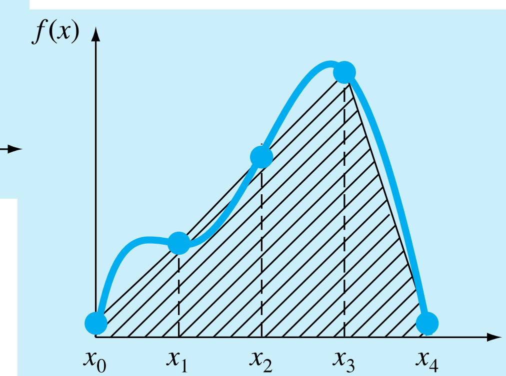
APLICACIÓN MULTIPLE DE LA REGLA DEL TRAPECIO

Para mejorar la precisión de la **regla del trapecio** se puede **dividir** el intervalo de integración en **varios segmentos**, y aplicar el método a cada uno de ellos





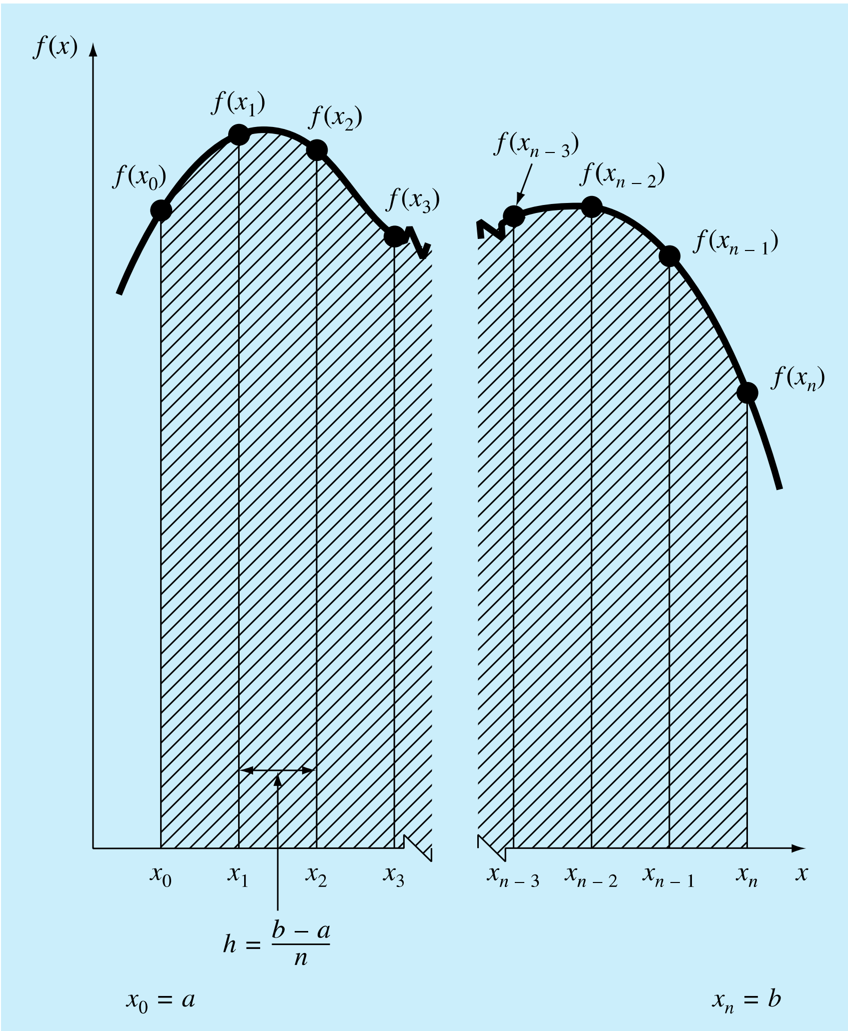




$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

APLICACIÓN MULTIPLE DE LA REGLA DEL TRAPECIO



Fórmulas de integración de aplicación múltiple o compuestas.

$$\underbrace{I = (b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}_{\text{Altura promedio}}$$

Error

$$E_a = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''$$

EJEMPLO: Programe la regla del trapecio para obtener la siguiente integral

$$I = \int_0^{0.8} \left[0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5\right] dx$$

SEUDOCÓDIGO

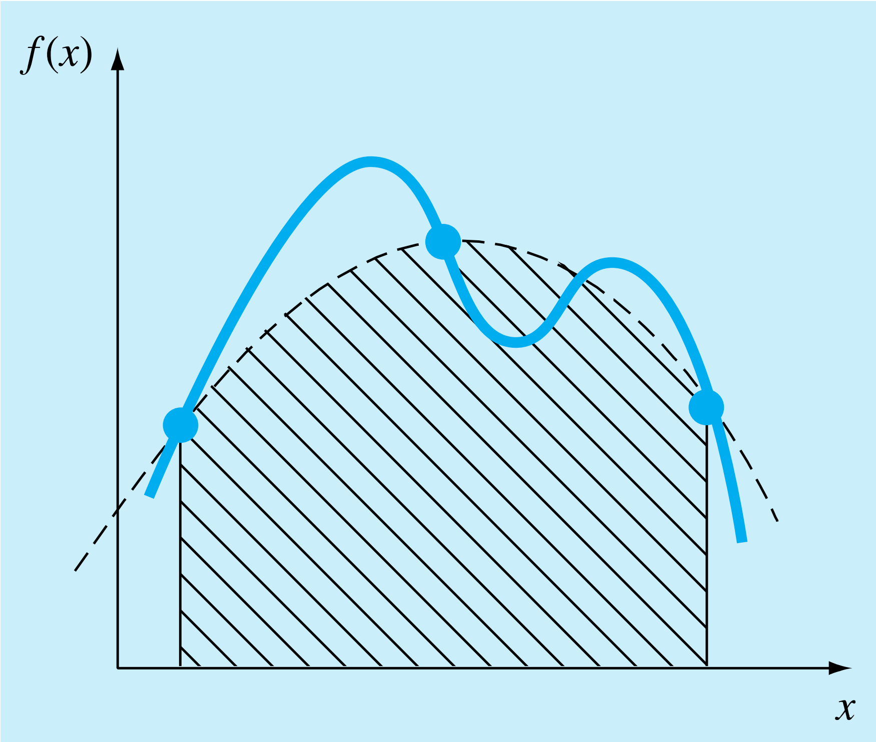
```
FUNCTION Trapm (h, n, f)
  sum = f_0
  DOFOR i = 1, n − 1
    sum = sum + 2 * f_i
  END DO
  sum = sum + f_n
  Trapm = h * sum/2
END Trapm
```

RESULTADOS

n	***h***	***I***	ε_t **(%)**
2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6

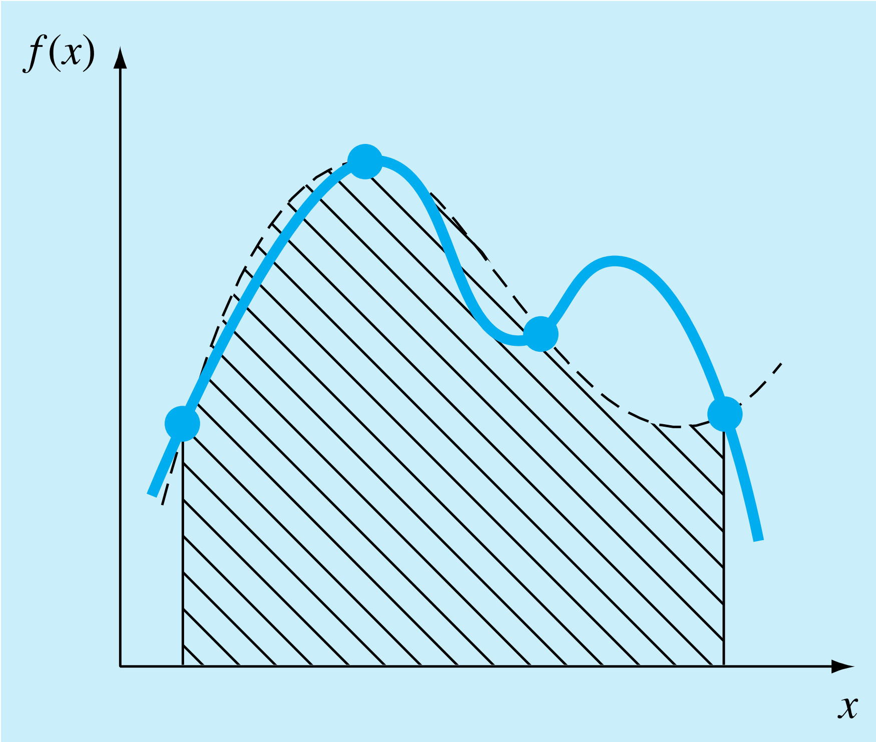
Otra forma de obtener una estimación más exacta de una integral consiste en usar polinomios de grado superior para unir los puntos.

REGLA DE SIMPSON 1/3



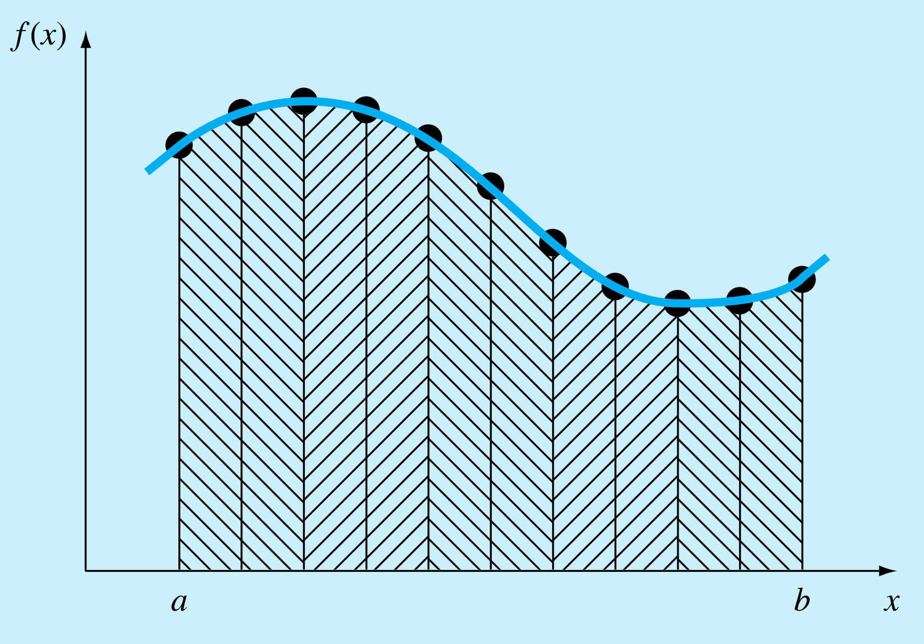
Usa un polinomio de segundo grado (parábola).

REGLA DE SIMPSON 3/8



Usa un polinomio de tercer grado (cúbico).

REGLA DE SIMPSON 1/3 – APLICACIÓN MÚLTIPLE

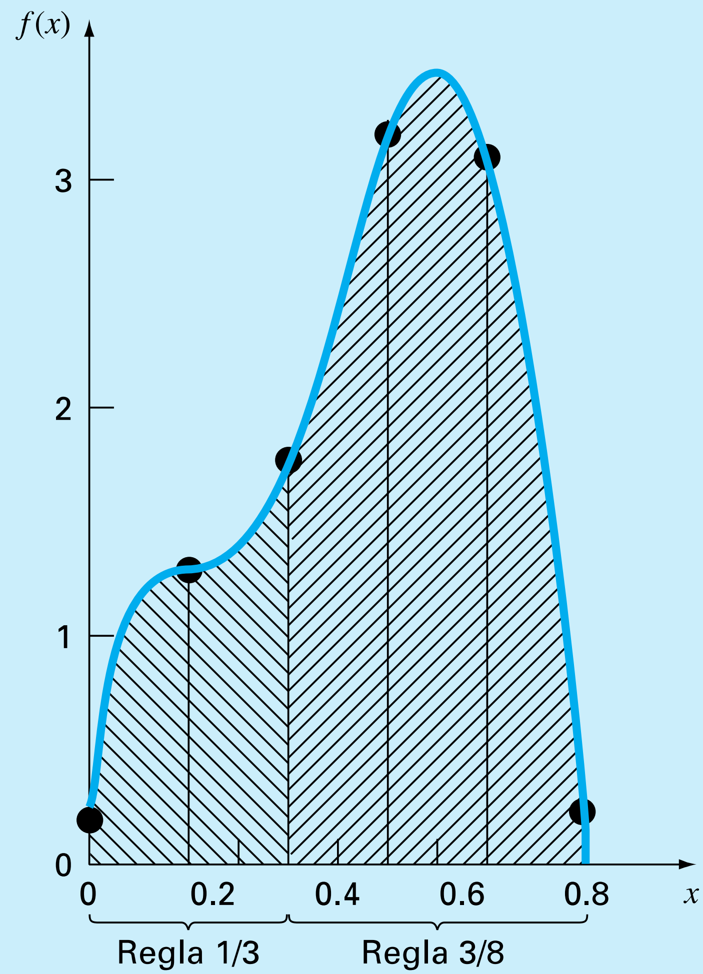


Representación gráfica de la regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple. Observe que el método se puede emplear sólo si el número de segmentos es par.

$$I \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}}_{\text{Peso promedio}}$$

REGLA DE SIMPSON 3/8 – APLICACIÓN MÚLTIPLE



En general se prefiere la regla de Simpson 1/3, ya que alcanza una exactitud de tercer orden con tres puntos en lugar de los cuatro puntos requeridos en la versión 3/8.

No obstante, la regla de 3/8 es útil cuando el número de segmentos es impar.

$$I \cong \frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}}\underbrace{\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio}}$$

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN DE NEWTON-COTES

Regla del trapecio $(b-a)\dfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2}$

Regla de Simpson 1/3 $(b-a)\dfrac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$

Regla de Simpson 3/8 $(b-a)\dfrac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$

Regla de Boole $(b-a)\dfrac{7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)}{90}$

$$(b-a)\frac{19f(x_0)+75f(x_1)+50f(x_2)+50f(x_3)+75f(x_4)+19)f(x_5)}{288}$$

El tamaño de paso está dado por $h = (b-a)/n$.

SEUDOCÓDIGO PARA REGLAS DE SIMPSONS

a)

```
FUNCTION Simp13 (h, f0, f1, f2)
  Simp13 = 2*h*(f0+4*f1+f2) / 6
END Simp13
```

b)

```
FUNCTION Simp38 (h, f0, f1, f2, f3)
  Simp38 = 3*h* (f0+3*(f1+f2)+f3) / 8
END Simp38
```

c)

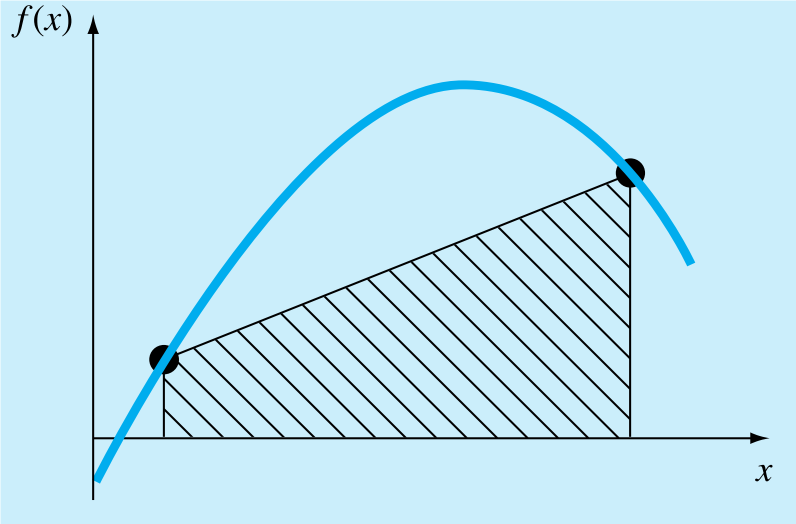
```
FUNCTION Simp13m (h,n,f)
  sum = f(0)
  DOFOR i = 1, n - 2, 2
    sum = sum + 4 * f_i + 2 * f_i+1
  END DO
  sum = sum + 4 * f_n-1 + f_n
  Simp13m = h * sum /3
END Simp13m
```

d)

```
FUNCTION SimpInt(a,b,n,f)
  h = (b - a) / n
  IF n = 1 THEN
    sum = Trap(h,f_n-1,f_n)
  ELSE
    m = n
    odd = n / 2 - INT(n / 2)
    IF odd > 0 AND n > 1 THEN
      sum = sum + Simp38(h,f_n-3,f_n-2,f_n-1,f_n)
      m = n - 3
    END IF
    IF m > 1 THEN
      sum = sum + Simp13m(h,m,f)
    END IF
  END IF
  SimpInt = sum
END SimpInt
```

INTRODUCCIÓN

La **regla del trapecio** se basa en obtener el área bajo la línea recta que une los valores de la función, en los extremos del intervalo de integración.

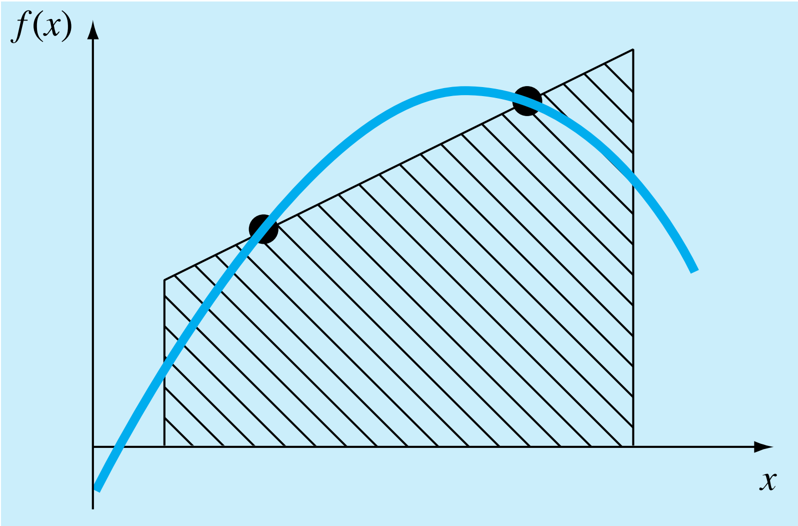


Formula:

$$I \cong (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

INTRODUCCIÓN

Ahora, suponga que se elimina la restricción de los puntos fijos y se tuviera la libertad de evaluar el área bajo una línea recta que uniera dos puntos cualesquiera de la curva

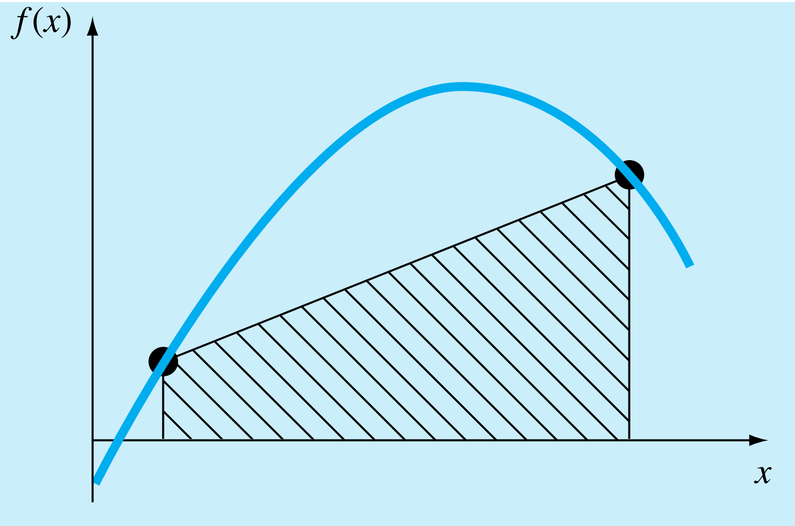


Al ubicar esos puntos en forma inteligente, definiríamos una línea recta que equilibrara los errores negativo y positivo. Así que, como en la figura, llegaríamos a una mejor estimación de la integral.

Cuadratura de Gauss es el nombre de una clase de técnicas para realizar tal estrategia.

METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Obtuvimos la regla del trapecio integrando un polinomio de interpolación lineal y mediante un razonamiento geométrico. El ***método de coeficientes indeterminados*** ofrece un procedimiento que también tiene utilidad para encontrar otras técnicas de integración, como la cuadratura de Gauss.



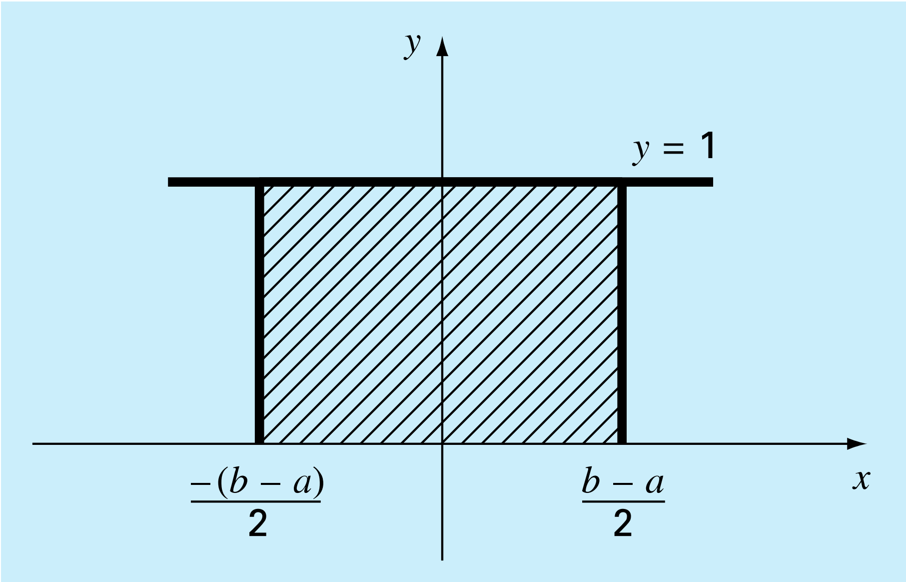
¿Cómo obtener la regla del trapecio?

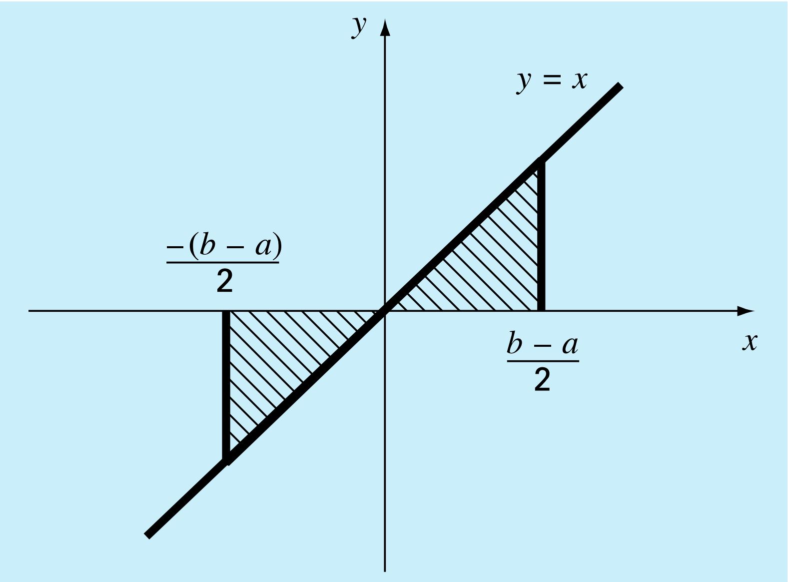
$$I \cong c_0 f(a) + c_1 f(b)$$

La **regla del trapecio** deberá dar resultados exactos cuando la función que se va a integrar es una constante o una línea recta.

METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Dos ecuaciones simples que representan esos casos son $y = 1$ y $y = x$.





$$c_0 + c_1 = \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} 1\,dx$$

$$-c_0\frac{b-a}{2} + c_1\frac{b-a}{2} = \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} x\,dx$$

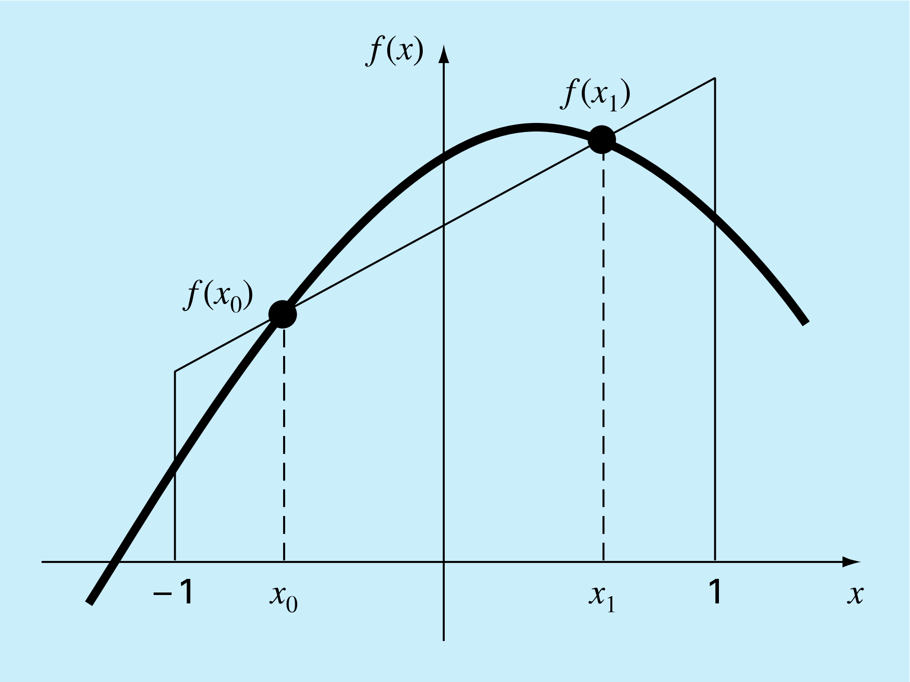
$$c_0 = c_1 = \frac{b-a}{2} \Rightarrow I = \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b)$$

FORMULA DE GAUSS-LEGENDRE

Así como en el caso anterior para la obtención de la regla del trapecio, el objetivo de la cuadratura de Gauss es determinar los coeficientes de una ecuación de la forma:

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

Sin embargo, a diferencia de la regla del trapecio que utiliza puntos extremos fijos *a* y *b*, los argumentos de la función *x*0 y *x*1 no están fijos en los extremos, sino que son incógnitas.



FORMULA DE GAUSS-LEGENDRE

Las cuatro ecuaciones (4 incógnitas) que habrá que resolver son:

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$c_0 = c_1 = 1$$

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.5773503\ldots$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773503\ldots$$

Se determinan las cuatro incógnitas y además se obtiene una fórmula de integración lineal de dos puntos que es exacta para cúbicas (exactitud de tercer grado).

$$I \cong f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

FORMULA DE GAUSS-LEGENDRE

Observe que los límites de integración en las ecuaciones anteriores son desde –1 a 1. Es posible utilizar un simple cambio de variable para transformar otros límites de integración a esta forma.

$$x = a_0 + a_1 x_d$$

x = a, xd=-1
x = b, xd=+1

$$a = a_0 + a_1(-1)$$

$$b = a_0 + a_1(1)$$

Estas ecuaciones se podrán resolver simultáneamente para obtener

$$a_0 = \frac{b+a}{2}$$

$$a_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2}$$

$$dx = \frac{b-a}{2} dx_d$$

EJEMPLO: Evalúe la integral:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Para los límites de integración a=0 y b=0.8. Evalúe también el error usando el resultado exacto I=1.640533

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2}$$

$$dx = \frac{b-a}{2}dx_d$$

$$I \cong f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

FORMULA DE GAUSS-LEGENDRE CON MÁS PUNTOS

Puntos	Factor de ponderación	Argumentos de la función	Error de truncamiento
2	$c_0 = 1.0000000$	$x_0 = -0.577350269$	$\cong f^{(4)}(\xi)$
	$c_1 = 1.0000000$	$x_1 = 0.577350269$	
3	$c_0 = 0.5555556$	$x_0 = -0.774596669$	$\cong f^{(6)}(\xi)$
	$c_1 = 0.8888889$	$x_1 = 0.0$	
	$c_2 = 0.5555556$	$x_2 = 0.774596669$	
4	$c_0 = 0.3478548$	$x_0 = -0.861136312$	$\cong f^{(8)}(\xi)$
	$c_1 = 0.6521452$	$x_1 = -0.339981044$	
	$c_2 = 0.6521452$	$x_2 = 0.339981044$	
	$c_3 = 0.3478548$	$x_3 = 0.861136312$	
5	$c_0 = 0.2369269$	$x_0 = -0.906179846$	$\cong f^{(10)}(\xi)$
	$c_1 = 0.4786287$	$x_1 = -0.538469310$	
	$c_2 = 0.5688889$	$x_2 = 0.0$	
	$c_3 = 0.4786287$	$x_3 = 0.538469310$	
	$c_4 = 0.2369269$	$x_4 = 0.906179846$	
6	$c_0 = 0.1713245$	$x_0 = -0.932469514$	$\cong f^{(12)}(\xi)$
	$c_1 = 0.3607616$	$x_1 = -0.661209386$	
	$c_2 = 0.4679139$	$x_2 = -0.238619186$	
	$c_3 = 0.4679139$	$x_3 = 0.238619186$	
	$c_4 = 0.3607616$	$x_4 = 0.661209386$	
	$c_5 = 0.1713245$	$x_5 = 0.932469514$	

ERROR

$$E_t = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\xi)$$

PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA
PROGRAMA DEL CURSO

UdeSantiago de Chile

TEMARIO
- Introducción a la Mecánica Computacional.
- Primeros pasos con Matlab.
- Raíces de ecuaciones.
- Sistema de Ecuaciones Algebraicas Lineales.
- Diferenciación e Integración Numérica.
- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- Ecuaciones Diferenciales Parciales.
- Aplicación: Método de Elementos Finitos.
- Aplicación: ANSYS.

PROYECTO	27 DE JUNIO 2014
PEP2	01 DE JULIO DE 2014
POR	08 DE JULIO DE 2014