Apague su celular

Diseño computarizado

PEP2 – 13 de enero de 2026

Apellidos *Nombres* **Tiempo: 120 min**

Problema 1.– (2.5 Pts.) Determine en forma aproximada la tensión en el punto central P de la estructura de la figura; ésta se encuentra compuesta por dos barras y una placa cuadrada que está empotrada a una pared. La placa es de 10 mm de espesor y de 2000 mm de lado, las barras son de una sección cuadrada de 50 mm de lado y el material de ambos elementos (barras y placa) es acero con $E = 200$ GPa. Utilizando el método de elementos finitos, se pide:

1. Modelo de elementos finitos (malla) con el mínimo de elementos e indique las condiciones de borde usadas. **(0.5 Pts.)**
2. Matriz de rigidez ensamblada. **(0.5 Pts.)**
3. Desplazamiento en el punto de aplicación de la carga F y desplazamiento en P (**1.0 Pts.**)
4. Tensiones en el punto P y tensión de Von Mises (**0.5 Pts.**)

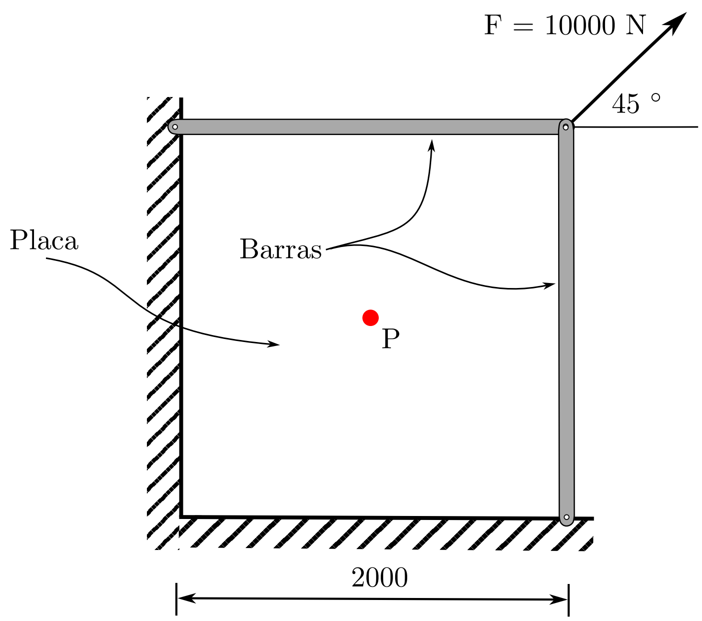


Figura 1: Problema 1, medidas en mm

Problema 2.– (2.0 Pts.) Se desea formular un elemento finito unidimensional para barras utilizando tres nodos, los cuales se ubican en las posiciones $x_1 = 0$, $x_2 = L/2$ y $x_3 = L$.

1. Obtenga las funciones de interpolación **(1.0 pt)**
2. Determine la matriz de rigidez, usando la teoría vista en clases. **(1.0 pt)**.

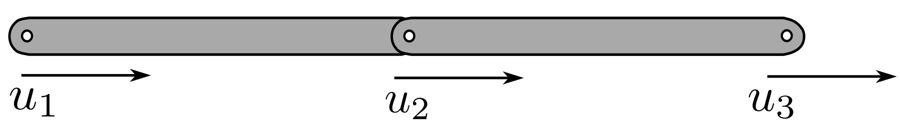


Figura 2: Problema 2

Problema 3.– (1.5 Pts.) Se tiene una placa triangular equilátera de acero empotrada en una superficie horizontal, las dimensiones se indican en la figura 3, el espesor de la placa es 10 mm, por razones de diseño es necesario evaluarla considerando la aceleración de gravedad aumentada igual a 30 m/s^2. Usando el método de elementos finitos :

1. Obtenga el desplazamiento del punto superior. **(1.0 pt)**

2. Determine los esfuerzos en el centroide de la placa. **(0.5 pt)**.

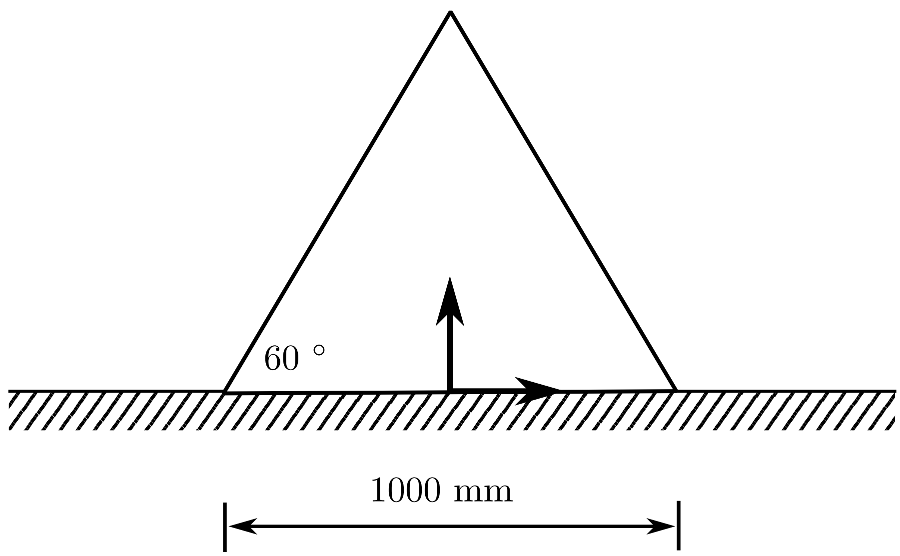
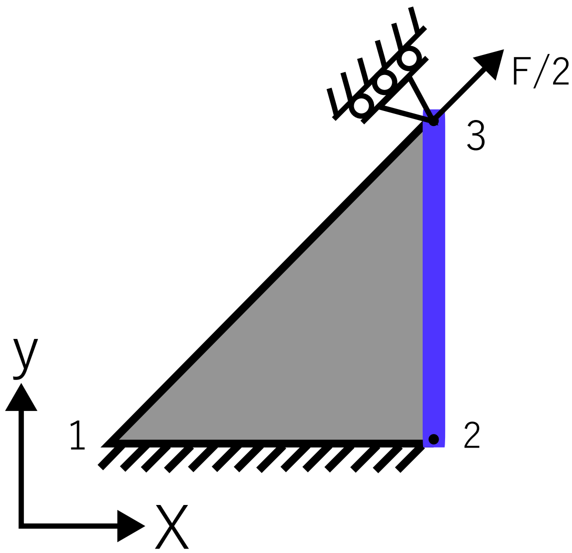


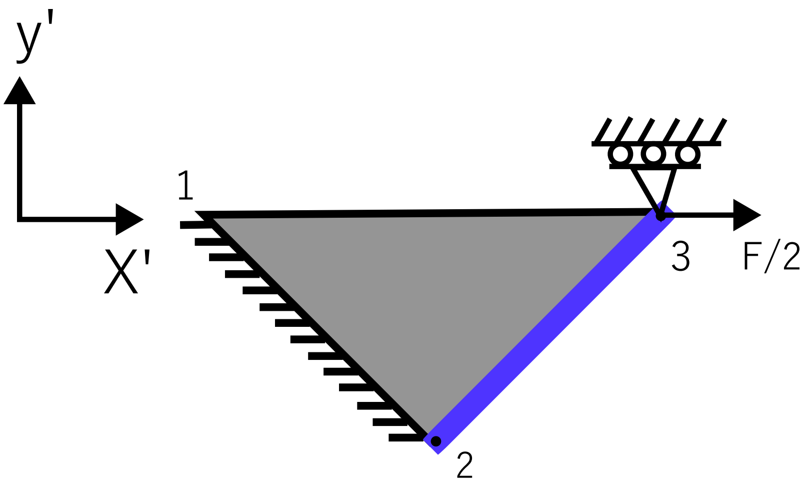
Figura 3: Problema 3

Pauta

Problema 1.1

Se realiza una simetría en la diagonal y se rota el sistema, también se aplican las condiciones de borde correspondientes.





Problema 1.2

Rigidez de la barra en 45°

$$K1 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} u2 & v2 & u3 & v3 \end{array}$$

$$K1 = \begin{bmatrix} 1,250000 \cdot 10^5 & 1,250000 \cdot 10^5 & -1,250000 \cdot 10^5 & -1,250000 \cdot 10^5 \\ 1,250000 \cdot 10^5 & 1,250000 \cdot 10^5 & -1,250000 \cdot 10^5 & -1,250000 \cdot 10^5 \\ -1,250000 \cdot 10^5 & -1,250000 \cdot 10^5 & 1,250000 \cdot 10^5 & 1,250000 \cdot 10^5 \\ -1,250000 \cdot 10^5 & -1,250000 \cdot 10^5 & 1,250000 \cdot 10^5 & 1,250000 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} u2 \\ v2 \\ u3 \\ v3 \end{array}$$

Rigidez de la Placa y Coordenadas para caso 45°

Definición de coordenadas y área para caso 45°

$$xi := 0 \qquad yi := 0$$

$$xj := 2000 \cdot \cos(45°) \qquad yj := -2000 \cdot \sin(45°)$$

$$xk := \sqrt{(2) \cdot (2000^2)} = 2828,427 \qquad yk := 0$$

$$Ap := \frac{2000^2}{2}$$

Se calculan los coeficientes a, b y c.

Matriz de Rigidez K2 para caso 45°

$$K2 := t \cdot Ap \cdot B^{\mathsf{T}} \cdot C \cdot B =$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u1 & v1 & u2 & v2 & u3 & v3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7,417582 \cdot 10^{5} & -3,571429 \cdot 10^{5} & -3,846154 \cdot 10^{5} & 3,296703 \cdot 10^{5} & -3,571429 \cdot 10^{5} & 27472,53 \\ -3,571429 \cdot 10^{5} & 7,417582 \cdot 10^{5} & 3,846154 \cdot 10^{5} & -1,098901 \cdot 10^{6} & -27472,53 & 3,571429 \cdot 10^{5} \\ -3,846154 \cdot 10^{5} & 3,846154 \cdot 10^{5} & 7,692308 \cdot 10^{5} & 0,000000 & -3,846154 \cdot 10^{5} & -3,846154 \cdot 10^{5} \\ 3,296703 \cdot 10^{5} & -1,098901 \cdot 10^{6} & 0,000000 & 2,197802 \cdot 10^{6} & -3,296703 \cdot 10^{5} & -1,098901 \cdot 10^{6} \\ -3,571429 \cdot 10^{5} & -27472,53 & -3,846154 \cdot 10^{5} & -3,296703 \cdot 10^{5} & 7,417582 \cdot 10^{5} & 3,571429 \cdot 10^{5} \\ 27472,53 & 3,571429 \cdot 10^{5} & -3,846154 \cdot 10^{5} & -1,098901 \cdot 10^{6} & 3,571429 \cdot 10^{5} & 7,417582 \cdot 10^{5} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u1 \\ v1 \\ u2 \\ v2 \\ u3 \\ v3 \end{array}$$

Matriz Global KG para caso 45°

$$KG = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u1 & v1 & u2 & v2 & u3 & v3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7,417582 & -3,571429 & -3,846154 & 3,296703 & -3,571429 & 0,2747253 \\ -3,571429 & 7,417582 & 3,846154 & -10,98901 & -0,2747253 & 3,571429 \\ -3,846154 & 3,846154 & 8,942308 & 1,250000 & -5,096154 & -5,096154 \\ 3,296703 & -10,98901 & 1,250000 & 23,22802 & -4,546703 & -12,23901 \\ -3,571429 & -0,2747253 & -5,096154 & -4,546703 & 8,667582 & 4,821429 \\ 0,2747253 & 3,571429 & -5,096154 & -12,23901 & 4,821429 & 8,667582 \end{bmatrix} \end{array} \cdot 10^{5}$$

Problema 1.3

Se utiliza la matriz de rigidez global rotada en 45.

$$u3 := (KG_{5,5})^{-1} \cdot 5000 = 0,005768621 \quad \text{mm}$$

Si llevamos los desplazamientos del nodo 3 a coordenadas globales:

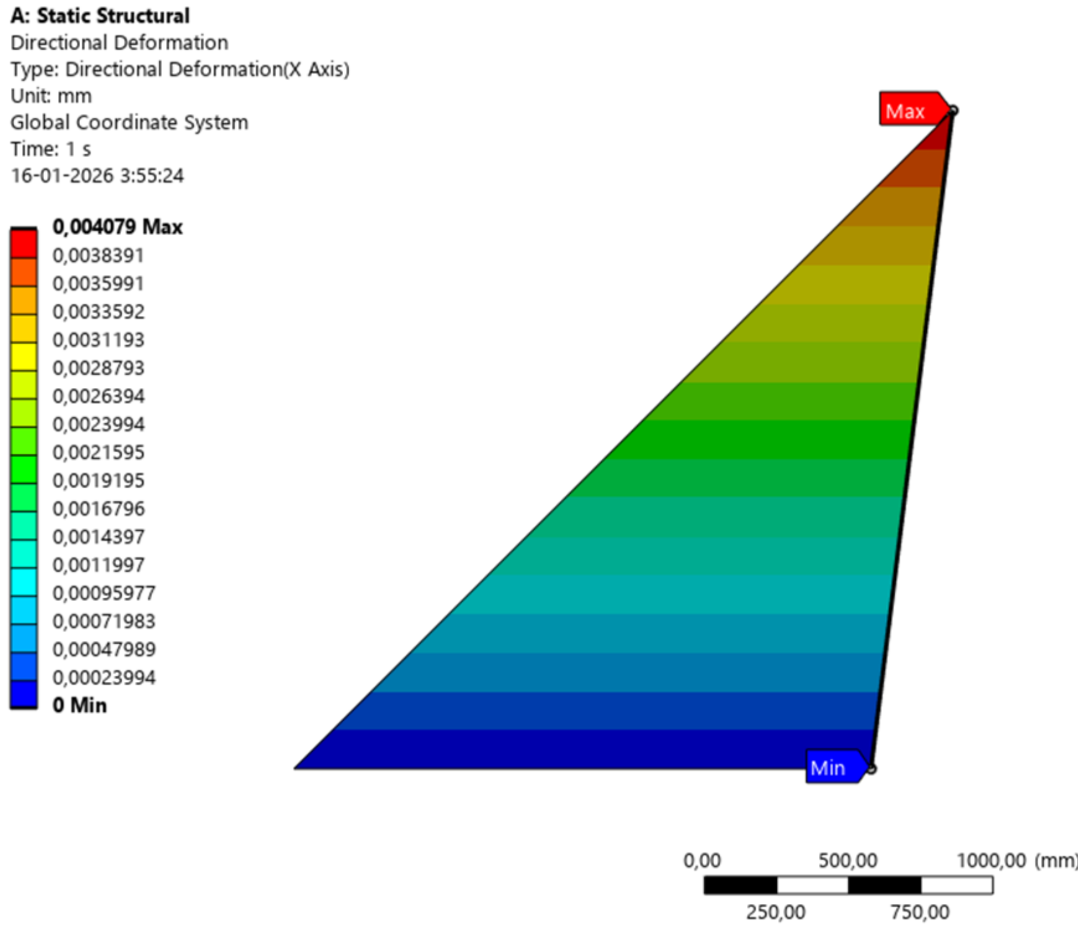
$$u3_{global} = \begin{bmatrix} 0,004079031 \\ 0,004079031 \end{bmatrix} \quad \text{mm}$$

Desplazamientos en el Punto P (Local y Global)

$$uP := \frac{(ak + bk \cdot xc + ck \cdot yc) \cdot u3}{\Delta} = 0,002884311 \qquad v := 0 = 0,000000 \quad \text{mm}$$

Si llevamos los desplazamientos del punto P a coordenadas globales:

$$uP_{global} := R1(-45°) \cdot \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,002039516 \\ 0,002039516 \end{bmatrix} \quad \text{mm}$$



Problema 1.4

Cálculo de Tensiones

Las tensiones del punto P, corresponden a las mismas que las que se calculan en toda la placa, debido a que son constantes en toda la placa.

$$\sigma := C \cdot B \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4482452 \\ 0,1344736 \\ 0,1568858 \end{bmatrix} \quad \text{MPa}$$

rotando las tensiones en -45 (-90 en circulo de mohr)

$$\sigma := \begin{bmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1344736 \\ 0,4482452 \\ 0,1568858 \end{bmatrix}$$

Tensión de Von Mises

$$\sigma VM := \sqrt{{\sigma_{11}}^2 + {\sigma_{21}}^2 - \sigma_{11} \cdot \sigma_{21} + 3 \cdot {\sigma_{31}}^2} = 0,4822543 \quad \text{MPa}$$

Problema 2.

Problema 2.1

Se propone una función de interpolación cuadrática utilizando los 3 nodos.

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Donde x es la posición horizontal de la barra, tomando $x = 0$ en el nodo 1.
Debido a que se conocen los desplazamientos en cada uno de los nodos, es posible determinar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ 1 & L & L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

La resolución del sistema permite obtener los coeficientes del campo de desplazamientos aproximado de la forma

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

donde los coeficientes están dados por:

$$a_0 = u_1,$$

$$a_1 = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{L},$$

$$a_2 = \frac{2(u_1 - 2u_2 + u_3)}{L^2}.$$

Por lo tanto, el campo de desplazamientos interpolado resulta:

$$u(x) = u_1 + \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{L}\, x + \frac{2(u_1 - 2u_2 + u_3)}{L^2}\, x^2.$$

Esta interpolación corresponde a un polinomio cuadrático que reproduce exactamente los desplazamientos nodales en $x = 0$, $x = L/2$ y $x = L$, siendo equivalente a un elemento unidimensional cuadrático de tres nodos.
De manera equivalente, el campo de desplazamientos puede expresarse en términos de las funciones de forma cuadráticas como

$$u(x) = N_1(x)\, u_1 + N_2(x)\, u_2 + N_3(x)\, u_3,$$

donde las funciones de forma asociadas a los nodos $x = 0$, $x = L/2$ y $x = L$ están dadas por:

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}, \qquad N_2(x) = \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}, \qquad N_3(x) = -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2}.$$

Problema 2.2

Se determina el campo de deformaciones a partir del campo de desplazamientos interpolado. La deformación axial se define como la derivada del desplazamiento respecto a la coordenada espacial x:

$$\epsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Utilizando la expresión del campo de desplazamientos en términos de las funciones de forma,

$$u(x) = N_1(x)\,u_1 + N_2(x)\,u_2 + N_3(x)\,u_3,$$

la deformación puede escribirse como:

$$\epsilon(x) = \frac{\partial N_1}{\partial x}\,u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x}\,u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x}\,u_3$$

Derivando las funciones de forma cuadráticas:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}, \qquad \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}, \qquad \frac{\partial N_3}{\partial x} = -\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2},$$

se obtiene finalmente el campo de deformaciones:

$$\epsilon(x) = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{L} + \frac{4(u_1 - 2u_2 + u_3)}{L^2}\,x$$

En forma matricial, la expresión anterior puede escribirse como:

$$\epsilon(x) = \mathbf{B}(x)\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

donde la matriz de deformación $\mathbf{B}(x)$ está dada por:

$$\mathbf{B}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2} & \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} & -\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2} \end{pmatrix}.$$

A partir del campo de deformaciones

$$\epsilon(x) = \mathbf{B}(x)\,\mathbf{u},$$

y considerando un material elástico lineal, el esfuerzo axial está dado por:

$$\sigma(x) = E\,\epsilon(x).$$

La matriz de rigidez del elemento se obtiene como:

$$\mathbf{K} = \int_0^L \mathbf{B}^T(x)\,EA\,\mathbf{B}(x)\,dx$$

Sustituyendo la matriz de deformación

$$\mathbf{B}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2} & \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} & -\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2} \end{pmatrix},$$

y evaluando la integral en el dominio del elemento, se obtiene la matriz de rigidez del elemento cuadrático unidimensional de tres nodos:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{3L} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Problema 3.1

Se considera un elemento triangular equilátero de lado 1 m, con la siguiente numeración nodal:

$$\mathbf{x}_1 = (0,0), \qquad \mathbf{x}_2 = (1,0), \qquad \mathbf{x}_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

El área del elemento es

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.4330 \text{ m}^2$$

Funciones de forma

$$\mathbf{N}(x,y) = \begin{bmatrix} 1 - x - \dfrac{y}{\sqrt{3}} & 0 & x - \dfrac{y}{\sqrt{3}} & 0 & \dfrac{2y}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 - x - \dfrac{y}{\sqrt{3}} & 0 & x - \dfrac{y}{\sqrt{3}} & 0 & \dfrac{2y}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Matriz constitutiva

Se adopta un estado plano de tensiones:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \qquad E = 200 \text{ GPa}, \ \nu = 0.3$$

Matriz de rigidez del elemento

La matriz de rigidez del elemento viene dada por

$$\mathbf{K}^e = 10^9 \begin{bmatrix} 1.06 & 0.357 & -0.841 & -0.0275 & -0.222 & -0.330 \\ 0.357 & 0.650 & 0.0275 & -0.0159 & -0.385 & -0.634 \\ -0.841 & 0.0275 & 1.06 & -0.357 & -0.222 & 0.330 \\ -0.0275 & -0.0159 & -0.357 & 0.650 & 0.385 & -0.634 \\ -0.222 & -0.385 & -0.222 & 0.385 & 0.444 & 0.00 \\ -0.330 & -0.634 & 0.330 & -0.634 & 0.00 & 1.27 \end{bmatrix} \text{[N/m]}$$

Vector de fuerzas por peso propio

La fuerza de cuerpo por unidad de volumen es

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{bmatrix}, \qquad \rho = 7850 \text{ kg/m}^3, \quad g = 30 \text{ m/s}^2$$

$$\rho g = 7850 \cdot 30 = 2.355 \times 10^5 \text{ N/m}^3$$

El vector de fuerzas nodales debido a fuerzas de cuerpo se calcula mediante la integral de volumen sobre el elemento:

$$\mathbf{f}_b^e = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, dV = t \iint_A \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{bmatrix} dA$$

El vector de fuerzas nodales equivalentes resulta

$$\mathbf{f}_b^e = \frac{At}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ -\rho g \\ 0 \\ -\rho g \\ 0 \\ -\rho g \end{bmatrix}, \qquad t = 0.01 \text{ m}$$

$$\frac{At}{3} = \frac{0.4330 \cdot 0.01}{3} = 1.443 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\mathbf{f}_b^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.40 \times 10^2 \\ 0 \\ -3.40 \times 10^2 \\ 0 \\ -3.40 \times 10^2 \end{bmatrix} \text{ N}$$

Condiciones de borde

Los nodos 1 y 2 se consideran empotrados:

$$u_1 = v_1 = u_2 = v_2 = 0$$

El sistema reducido queda asociado únicamente a los grados de libertad del nodo 3:

$$\mathbf{K}_{33}\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.40 \times 10^2 \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{K}_{33} = 10^9\begin{bmatrix} 0.444 & 0.00 \\ 0.00 & 1.27 \end{bmatrix}$$

Desplazamientos

Por simetría del problema y carga puramente vertical:

$$u_3 = 0$$

$$v_3 = \frac{-3.40 \times 10^2}{1.27 \times 10^9} = -2.68 \times 10^{-7} \text{ m}$$

El desplazamiento vertical del nodo libre es:

$$\boxed{v_3 \approx -0.268\ \mu\text{m}}$$

Problema 3.2

El campo de esfuerzos es uniforme y se calcula como $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DBu}^e$. Con los desplazamientos obtenidos $\mathbf{u}^e = [0, 0, 0, 0, 0, -2.68 \times 10^{-7}]^T$, el cálculo es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \underbrace{\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_3 & \beta_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo los valores geométricos y el desplazamiento vertical v_3:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = 2.198 \times 10^{11} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -3.09 \times 10^{-7} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resultados finales:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -20.37 \text{ kPa} \\ \sigma_{yy} &= -67.91 \text{ kPa} \\ \tau_{xy} &= 0 \text{ kPa} \end{aligned}}$$

Cálculo de Esfuerzo de Von Mises:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{VM} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2)\right]} \\ \sigma_{VM} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[(-20,37+67,91)^2+(-67,91-0)^2+(0+20,37)^2+0\right]} \\ \sigma_{VM} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[(47,54)^2+(-67,91)^2+(20,37)^2\right]} \\ \sigma_{VM} &= \mathbf{60,36} \text{ kPa} \end{aligned}}$$

Campo de desplazamientos

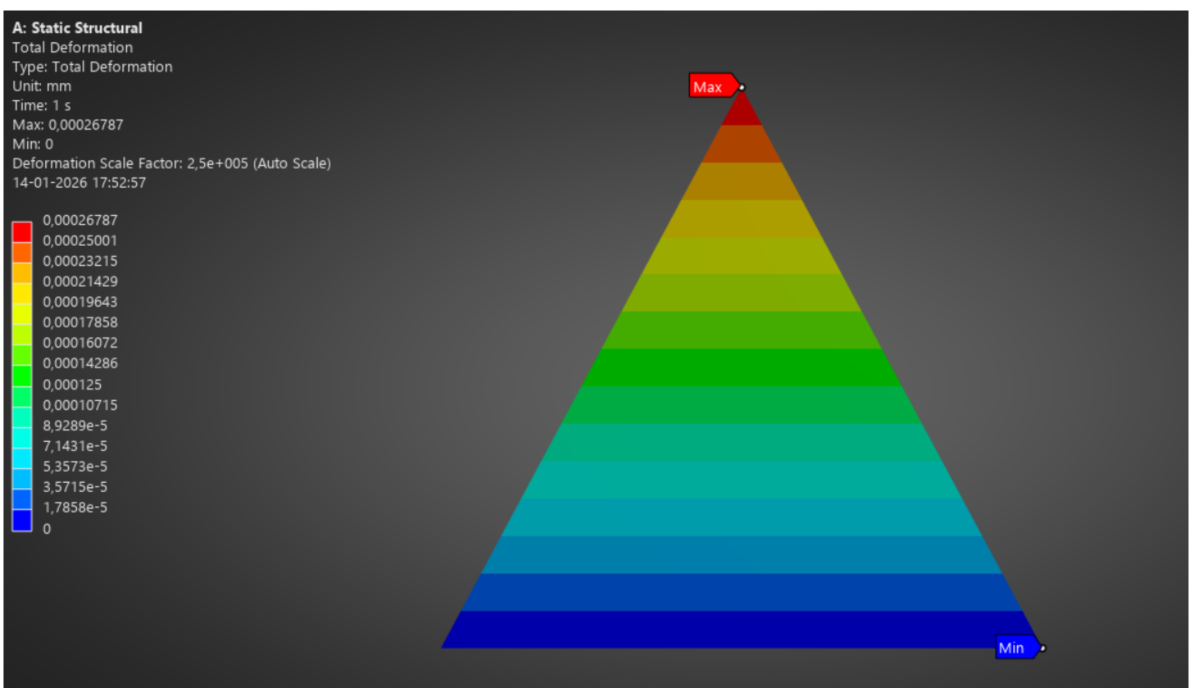


Figura 4: Campo de desplazamientos.