



## Diseño computarizado

PEP1 – 9 de diciembre de 2025

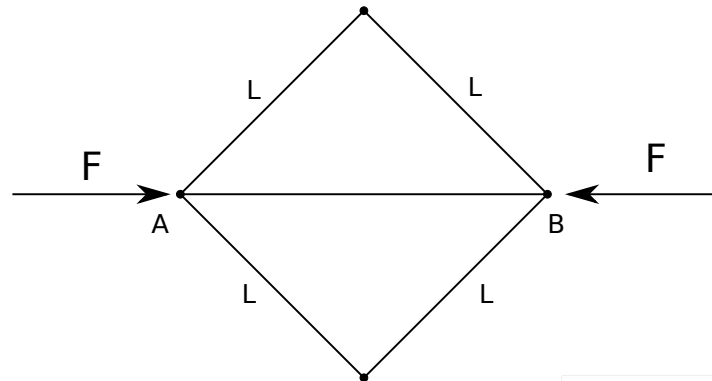
Apellidos

Nombres

Tiempo: 120 min

**Problema 1.– (2.0 Pts.)** Se quiere analizar la integridad de la estructura mostrada en la figura a través del método de la rigidez. La estructura está compuesta por cinco barras, con un área de  $A = 20 \text{ mm}^2$  cada una. Las barras exteriores tienen un largo de  $L = 2\text{m}$ . En los puntos mostrados en la figura se aplica una fuerza  $F = 2\text{kN}$  y se tiene que  $E = 200\text{GPa}$  y  $\sigma_y = 300\text{MPa}$ . Se pide:

1. Transforme el sistema a la forma más simplificada sin perder precisión. (0.8 pt)
2. Las matrices de rigidez de cada elemento, calculando solo los valores útiles para resolver el problema. (0.4 pt)
3. La solución del problema, indicando los desplazamientos de cada punto, junto con la fuerza cada elemento. (0.4 pt)
4. Obtener los máximos esfuerzos de cada elemento y el acortamiento que se produce entre A y B. (0.4 pt)



**Problema 2.– (2.5 Pts.)** Una persona mantiene un movimiento lento y constante (puede despreciar los efectos inerciales) en el rango indicado de  $135^\circ$  mientras ejercita su tríceps. Para esta condición, se puede suponer que la tensión en el cable es constante  $W = 45 \text{ N}$ . Se pide:

1. Determinar el momento  $M(\theta)$  de la tensión del cable aplicada en A respecto al punto O de la articulación del codo para el rango  $0 \leq \theta \leq 135^\circ$ . (0.8 Pts.)
2. Escriba un programa en FORTRAN para determinar el máximo  $M$  y el valor de  $\theta$  para el cual ocurre. (1.0 Pts.)
3. Realice tres iteraciones para determinar el máximo  $M$  y el valor de  $\theta$  para el cual ocurre. Considere un ángulo inicial de  $30^\circ$ . (0.7 Pts.)

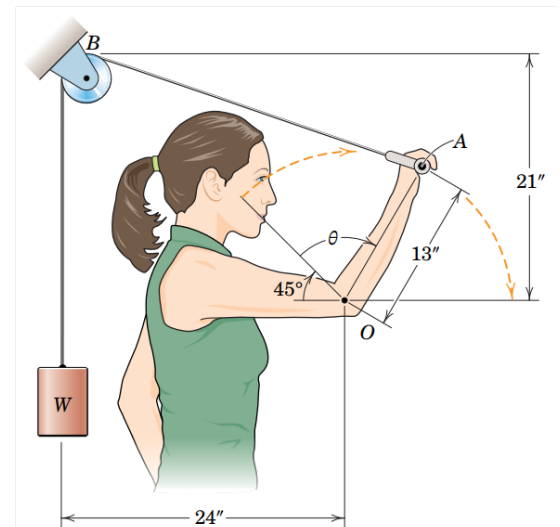


Figura 1: Considere radio de polea despreciable

**Problema 3.– (1.5 Pts.)** Para los mecanismos de la figura, se pide:

1. Calcular los grados de libertad de los siguientes mecanismos. **(0.6 Pts.)**

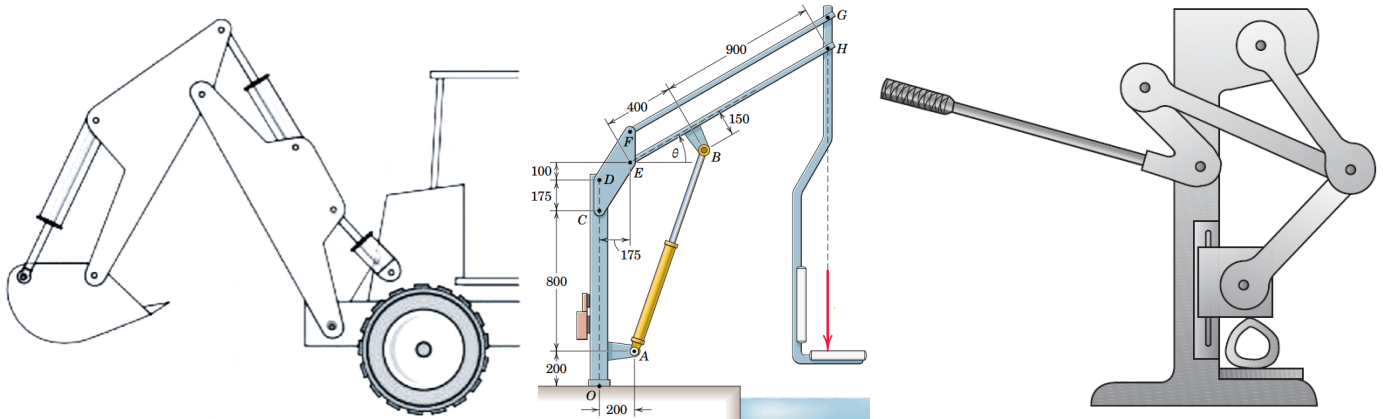


Figura 2: Mecanismos

2. Para el siguiente mecanismo obtener los grados de libertad y las ecuaciones de restricción **(0.3 Pts.)**.
3. La posición para la condición que el eslabón AB se encuentra a  $120^\circ$  (haga tres iteraciones) **(0.6 Pts.)**.

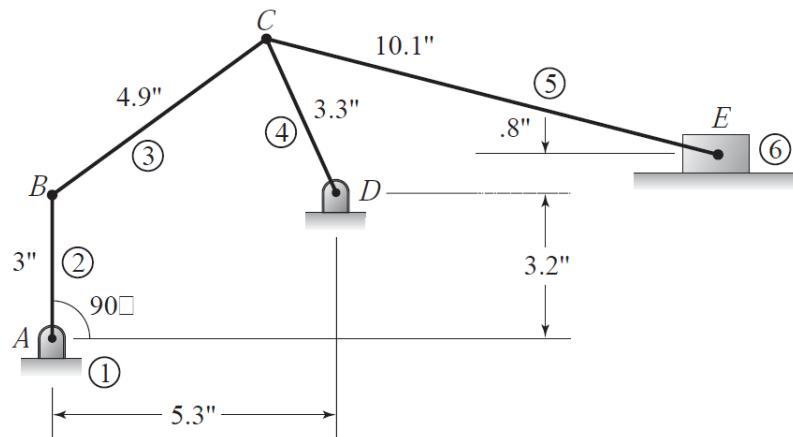


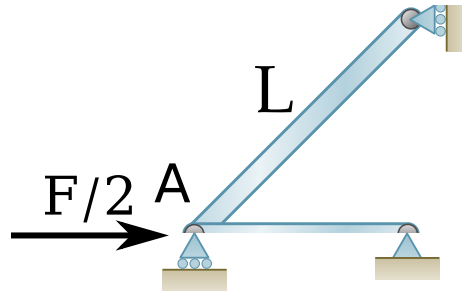
Figura 3: Mecanismo para ítems 3.2 y 3.3

# Pauta

## Problema 1

1)

Utilizando simetrías la simplificación queda como sigue:



2)

Como los grados realmente libres son solo el desplazamiento en  $x$  del nodo  $A$  y el desplazamiento en  $y$  del otro nodo, la barra central queda con la mitad del área y la fuerza aplicada queda a la mitad, la matriz de rigidez de la barra 1 es:

$$K_1 = \frac{E \frac{A}{2}}{L \frac{\sqrt{2}}{2}} \cos^2(0) = \frac{\sqrt{2}EA}{2L}$$

Para la barra 2

$$K_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2(45) & -\sin(45)\cos(45) \\ -\sin(45)\cos(45) & \sin^2(45) \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3)

Al ensamblar la matriz queda y el sistema queda

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema

$$u_1 = v_2 = \frac{F}{2} \sqrt{2} \frac{L}{EA} = 0.70711mm$$

Las fuerzas se obtiene multiplicando las matrices de rigidez de cada elemento por sus desplazamientos nodales. Para la barra 1

$$F_1 = K_1 u_1 = \frac{\sqrt{2}EA}{2L} \cdot \frac{F}{2} \sqrt{2} \frac{L}{EA} = \frac{F}{2} = 1000N$$

Para la barra 2

$$F_2 = K_2 v_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F\sqrt{2}\frac{L}{EA} \\ F\sqrt{2}\frac{L}{EA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4)

Los esfuerzos para la barra 1 y 2:

$$\sigma_{b1} = F/A = 100MPa$$

$$\sigma_{b2} = 0/A = MPa$$

Como es simétrico, el desplazamiento que se produce en el punto  $A$ , es lo mismo que en el punto  $B$ , por lo tanto

$$\delta = 2u_1 = 1.4142mm$$

## Problema 2

### P2.1

Se presenta el esquema con los ángulos auxiliares necesarios para resolver el problema.

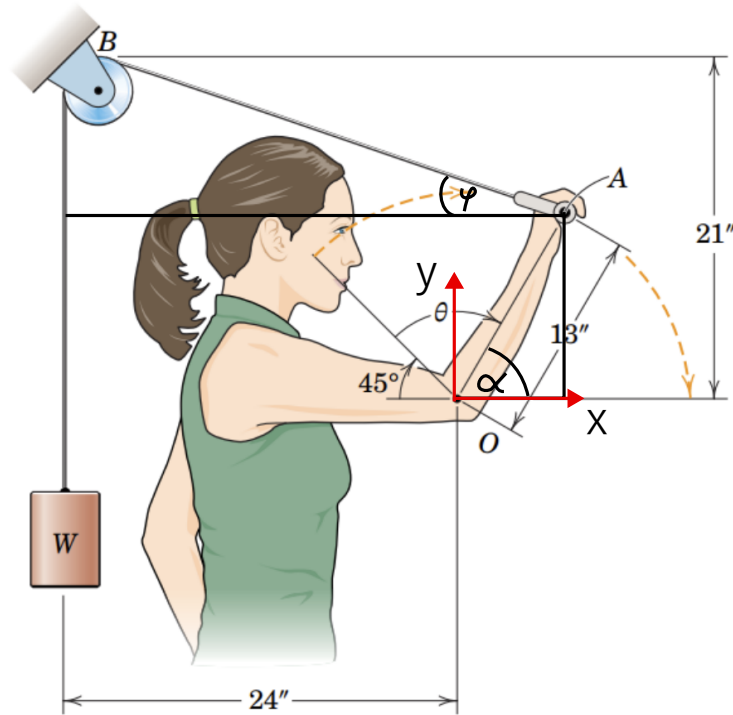


Figura 4: Esquema con ángulos auxiliares.

Es posible establecer la siguiente relación:

$$\frac{\pi}{4} + \theta + \alpha = \pi \implies \alpha = \frac{3\pi}{4} - \theta \quad (1)$$

Por otra parte, es posible determinar el ángulo  $\varphi$  en función de  $\alpha$  de tal manera:

$$\tan \varphi = \frac{21 - 13 \sin \alpha}{24 + 13 \cos \alpha} \implies \varphi = \arctan \left( \frac{21 - 13 \sin \alpha}{24 + 13 \cos \alpha} \right) = \arctan \left( \frac{21 - 13 \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \theta \right)}{24 + 13 \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \theta \right)} \right) \quad (2)$$

Se realiza el DCL del antebrazo para determinar el momento con respecto al punto O.

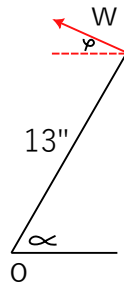


Figura 5: DCL antebrazo.

Se determina el la fuerza ejercida por el cable en el punto A de forma vectorial.

$$\vec{W} = -W \cdot \cos \left( \arctan \left( \frac{21 - 13 \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \theta \right)}{24 + 13 \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \theta \right)} \right) \right) \hat{i} + W \cdot \sin \left( \arctan \left( \frac{21 - 13 \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \theta \right)}{24 + 13 \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \theta \right)} \right) \right) \hat{j} \quad (3)$$

Finalmente, el momento que ejerce la tensión del cable aplicada en el punto A con respecto a O viene dado por la siguiente expresión:

$$M_z = W \cdot \cos \left( \arctan \left( \frac{21 - 13 \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \theta \right)}{24 + 13 \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \theta \right)} \right) \right) \cdot 13 \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \theta \right) + W \cdot \sin \left( \arctan \left( \frac{21 - 13 \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \theta \right)}{24 + 13 \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \theta \right)} \right) \right) \cdot 13 \cos \left( \frac{3\pi}{4} - \theta \right) [N \cdot in] \quad (4)$$

## P2.2 y P2.3

A continuación se presenta el código en FORTRAN para obtener el valor máximo del momento con 3 iteraciones.

```

1  Program PEP2
2  Implicit none
3  real :: m,x1,x,h
4  integer :: i
5  !Se define un delta theta
6  h = 0.01
7  !Se presenta un valor inicial (angulo de 30 grados)
8  x1 = acos(-1.0)/6
9  !Se realiza ciclo do para iniciar el metodo NR
10 do i = 1,3,1
11 x=x1-((m(x1+h)-m(x1-h))/(2*h))/((m(x1+h)-2.0*m(x1)+m(x1-h))/(h*h))
12 write(*,*) i,x,m(x)
13 x1 = x
14 enddo
15 !Se presenta la solucion final
16 write(*,*) "-----"
17 write(*,*) "El angulo que vuelve maximo el momento es:", x
18 write(*,*) "-----"
19 !Se la solucion final
20 write(*,*) "-----"
21 write(*,*) "El maximo momento es:", m(x)
22 write(*,*) "-----"
23
24
25 pause
26 end program PEP2
27
28
29 function m(x)
30 implicit none
31 real:: m,x,p,a,w
32 ! Se define el peso W
33 w = 45
34 !Se define el angulo alpha
35 a = (3*acos(-1.0))/4 - x

```

```
36 ! Se define el angulo varphi
37 p = atan((21-13*sin(a))/(24+13*cos(a)))
38 ! Se define la funcion del momento
39 m = w*cos(p)*13*sin(a) + w*sin(p)*13*cos(a)
40 end function m
```

Iteración	Ángulo (rad)	Ángulo (°)	Momento (N·in)
1	0.94687593	54.26	579.115
2	1.0724310	61.46	584.958
3	1.0842861	62.12	585.000

Tabla 1: Convergencia del ángulo que maximiza el momento.

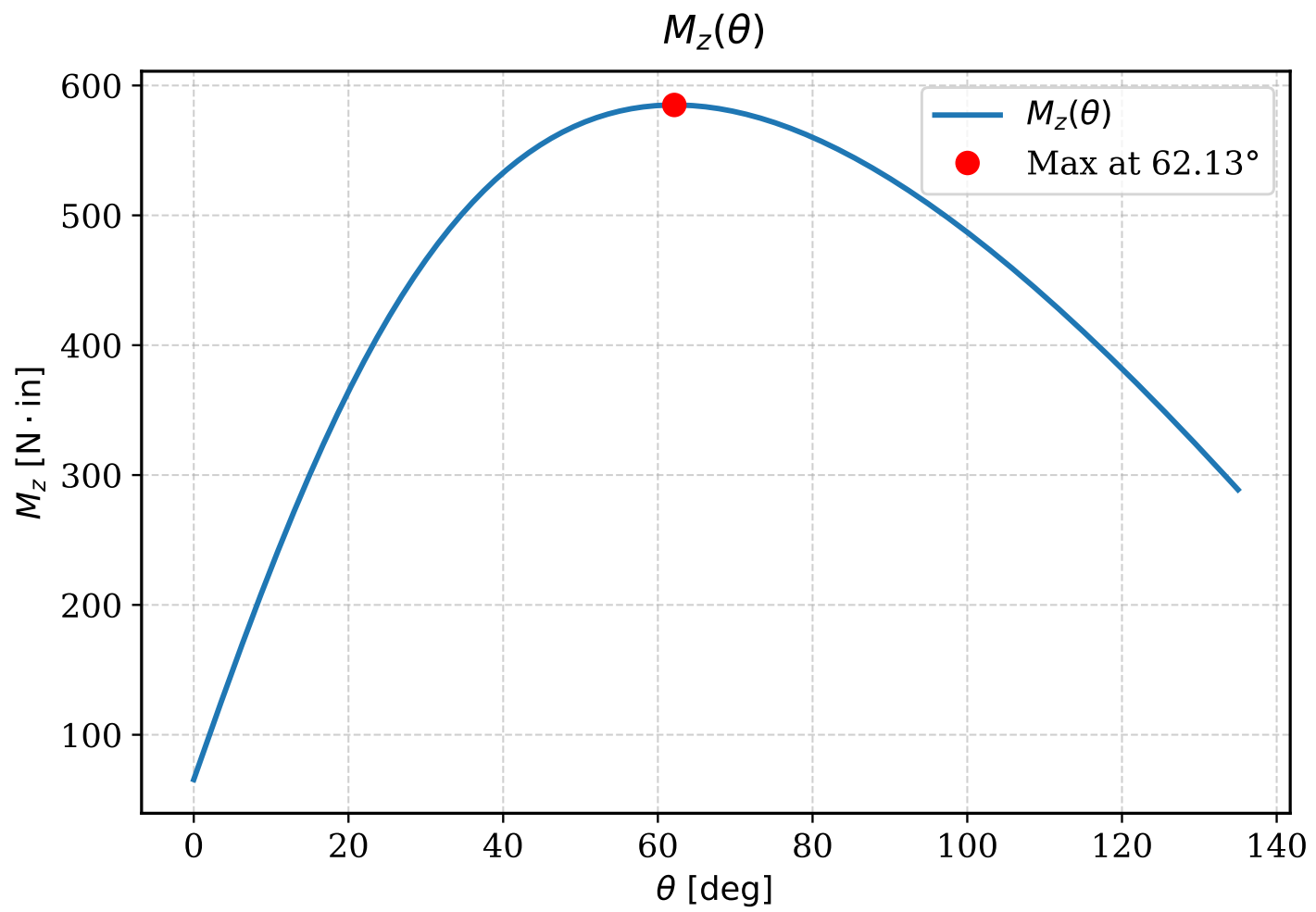


Figura 6: Gráfica y valor máximo del momento.

## Problema 3

### P3.1.

#### Caso (i)

Para el mecanismo se identifican los siguientes parámetros:

$$n = 10, \quad P_I = 12$$

Aplicando el criterio de Grübler para mecanismos planos:

$$\text{GDL} = 3(n - 1) - 2P_I$$

$$\text{GDL} = 3(10 - 1) - 2(12) = 27 - 24 = 3$$

#### Caso (ii)

Para este mecanismo se tiene:

$$n = 10, \quad P_I = 12$$

Por lo tanto, el número de grados de libertad es:

$$\text{GDL} = 3$$

#### Caso (iii)

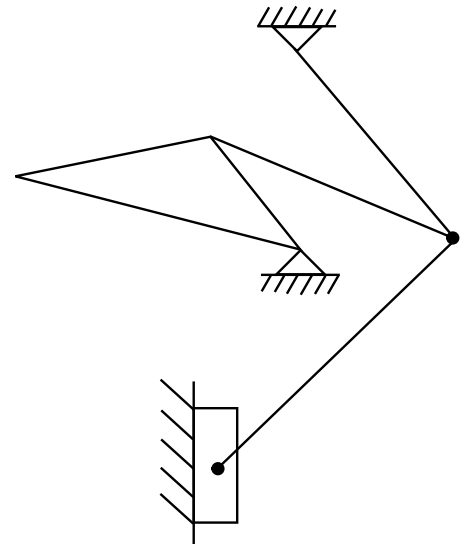
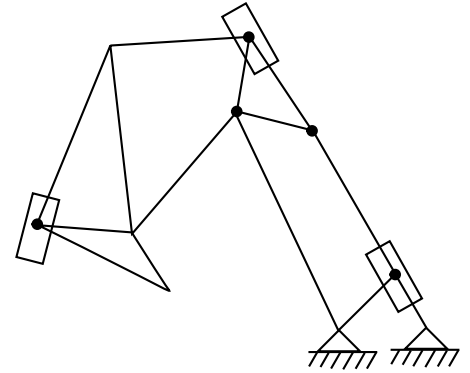
Para este mecanismo se tiene:

$$n = 6, \quad P_I = 7$$

Aplicando el criterio de Grübler:

$$\text{GDL} = 3(n - 1) - 2P_I$$

$$\text{GDL} = 3(6 - 1) - 2(7) = 15 - 14 = 1$$



### P3.2 y P3.3.

Para obtener los grados de libertad (GDL) del mecanismo, se deben contabilizar los eslabones y los pares cinemáticos.

- Cantidad de eslabones:  $n = 6$
- Pares cinemáticos de primer tipo:  $P_I = 7$
- Pares cinemáticos de segundo tipo:  $P_{II} = 0$

Utilizando la ecuación de Grübler para mecanismos planos:

$$\text{GDL} = 3(n - 1) - 2P_I - P_{II} \quad (5)$$

Reemplazando los valores:

$$\text{GDL} = 3(6 - 1) - 2 \cdot 7 = 1 \quad (6)$$

## Definición de coordenadas

Se definen las siguientes coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ B_x \\ B_y \\ C_x \\ C_y \\ D_x \\ D_y \\ E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (7)$$

Las coordenadas conocidas se agrupan en el vector:

$$\mathbf{q}_i = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ B_x \\ B_y \\ D_x \\ D_y \\ E_y \end{pmatrix} \quad (8)$$

Mientras que las coordenadas desconocidas corresponden a:

$$\mathbf{q}_d = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ E_x \end{pmatrix} \quad (9)$$

## Restricciones geométricas

Por lo tanto, las restricciones deben imponerse sobre el vector  $\mathbf{q}_d$ , requiriéndose un total de tres ecuaciones de restricción, asociadas a la distancia constante entre pares de puntos.

$$\phi_1 : (C_x - B_x)^2 + (C_y - B_y)^2 - L_{BC}^2 = 0 \quad (10)$$

$$\phi_2 : (D_x - C_x)^2 + (D_y - C_y)^2 - L_{ED}^2 = 0 \quad (11)$$

$$\phi_3 : (E_x - C_x)^2 + (E_y - C_y)^2 - L_{CE}^2 = 0 \quad (12)$$

## Cálculo del Jacobiano

Se define el Jacobiano del sistema de restricciones como:



$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial C_x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial C_y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial E_x} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial C_x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial C_y} & \frac{\partial \phi_2}{\partial E_x} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial C_x} & \frac{\partial \phi_3}{\partial C_y} & \frac{\partial \phi_3}{\partial E_x} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Por lo tanto, el Jacobiano explícito resulta:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2(C_x - B_x) & 2(C_y - B_y) & 0 \\ -2(D_x - C_x) & -2(D_y - C_y) & 0 \\ -2(E_x - C_x) & -2(E_y - C_y) & 2(E_x - C_x) \end{bmatrix} \quad (14)$$

## Condición inicial

Para iniciar el proceso iterativo, se considera una posición inicial aproximada del mecanismo, definida a partir de las siguientes coordenadas conocidas:

$$\mathbf{q}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5'' \\ 2.5980'' \\ 5.3'' \\ 3.2'' \\ 4'' \end{Bmatrix} \quad (15)$$

El vector de coordenadas desconocidas iniciales se define como:

$$\mathbf{q}_{d0} = \begin{Bmatrix} 5'' \\ 5'' \\ 10'' \end{Bmatrix} \quad (16)$$

## Cálculo de la posición del punto B

Para el punto  $B$  se tiene inicialmente:

$$B_x^0 = 0 \quad (17)$$

$$B_y^0 = 3'' \quad (18)$$

Luego, considerando una rotación de  $30^\circ$ , se obtiene:

$$B_x^t = 0 - 3'' \sin(30^\circ) = -1.5'' \quad (19)$$

$$B_y^t = 3'' + (3'' \cos(30^\circ) - 3'') = 2.59808'' \quad (20)$$

## Iteración del método de Newton–Raphson

Finalmente, la actualización de las coordenadas desconocidas se realiza mediante:

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_{d0} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}_0) \phi(\mathbf{q}_{d0}) \quad (21)$$

Obteniéndose como resultado:

$$\mathbf{q}_1 = \begin{Bmatrix} 2.5293'' \\ 6.68822'' \\ 14.7927'' \end{Bmatrix} \quad (22)$$

## Iteraciones posteriores

Luego de la primera iteración, se obtienen las siguientes aproximaciones para el vector de coordenadas desconocidas.

Segunda iteración:

$$\mathbf{q}_2 = \begin{Bmatrix} 2.63545'' \\ 5.48901'' \\ 12.8848'' \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Tercera iteración:

$$\mathbf{q}_3 = \begin{Bmatrix} 2.66085'' \\ 5.20198'' \\ 12.6955'' \end{Bmatrix} \quad (24)$$