APLICACIONES COMPUTACIONALES

INGENIERÍA EJECUCIÓN MECÁNICA

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

REGLA DE CRAMER

Esta regla establece que cada incógnita de un sistema de ecuaciones lineales algebraicas puede expresarse como una fracción de dos determinantes.

Por ejemplo, para un sistema de 3x3, dado por [A]{x} = {b}, *x1* se calcula como:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}$$

Donde el numerador se obtiene al reemplazar la columna de la incógnita en cuestión xi por las constantes {b1, b2, ..., bn} en *la columna de los* coeficientes {a1i, a2i, …ani}*; y el denominador D* es el determinante de la matriz de coeficientes [A].

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3
\end{array}\right]
$$

$$\Downarrow$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\
 & a'_{22} & a'_{23} & c'_2 \\
 & & a''_{33} & c''_3
\end{array}\right]
$$

Eliminación hacia adelante

$$\Downarrow$$

$$x_3 = c''_3 / a''_{33}$$

$$x_2 = (c'_2 - a'_{23}x_3) / a'_{22}$$

$$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11}$$

Sustitución hacia atrás

El método de eliminación de Gauss consta de dos fases:

1) Eliminación hacia adelante.
2) Sustitución hacia atrás.

Los superíndices indican el número de veces que se han modificado los coeficientes y constantes.

La eliminación hacia adelante se realiza mediante operaciones de filas.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
ELIMINACIÓN GAUSSIANA

```
DOFOR k = 1, n − 1
   DOFOR i = k + 1, n
      factor = a_i,k / a_k,k
      DOFOR j = 1, n
         a_i,j = a_i,j − factor · a_k,j
      END DO
      b_i = b_i − factor · b_k
   END DO
END DO
```

Seudocódigo:

ELIMINACIÓN HACIA ADELANTE

```
x_n = b_n / a_n,n
  DOFOR i = n − 1, 1, −1
    sum = b_i
    DOFOR j = i + 1, n
      sum = sum - a_i,j · x_j
    END DO
    x_i = sum / a_i,i
  END DO
```

Seudocódigo:

SUSTITUCIÓN HACIA ATRÁS

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

El tiempo de ejecución de eliminación gaussiana depende de la cantidad de operaciones con punto flotante (o FLOP) usadas en el algoritmo. Multiplicaciones y divisiones usan más tiempo que sumas y restas.

N	Multiplicaciones/Divisiones $(n^3+3n^2-n)/3$	Sumas / restas $(2n^3+3n^2-5n)/6$
3	17	11
10	430	375
50	44150	42875
100	343300	338250

Conforme el sistema se vuelve más grande, el tiempo de cálculo aumenta enormemente. La cantidad de FLOP aumenta casi tres órdenes de magnitud por cada orden de aumento de la dimensión.

FLOP(s): Floating Point Operation (per second)

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
ELIMINACIÓN GAUSSIANA

UdeSantiago de Chile

Ocurren problemas cuando un elemento pivote es cero, ya que el paso de normalización origina una división entre cero.

También cuando el elemento pivote es cercano a cero, debido a que si la magnitud del elemento pivote es pequeña comparada con los otros elementos, entonces se pueden introducir errores de redondeo.

Por lo tanto, antes de normalizar cada renglón, resulta conveniente determinar el coeficiente más grande disponible en la columna debajo del elemento pivote.

Los renglones se pueden intercambiar de manera que el elemento más grande sea el elemento pivote; esto se conoce como pivoteo parcial.

```
p = k
big = |a_k,k|
DOFOR ii = k+1, n
  dummy = |a_ii,k|
  IF (dummy > big)
    big = dummy
    p = ii
  END IF
END DO
IF (p ≠ k)
  DOFOR jj = k, n
    dummy = a_p,jj
    a_p,jj = a_k,jj
    a_k,jj = dummy
  END DO
  dummy = b_p
  b_p = b_k
  b_k = dummy
END IF
```

Seudocódigo para implementar el pivoteo parcial.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Al procedimiento, donde tanto en las columnas como en los renglones (o filas) se busca el elemento más grande y luego se intercambian, se le conoce como pivoteo completo, el cual se usa en muy raras ocasiones debido a que al intercambiar columnas se cambia el orden de las incógnitas (x) y, en consecuencia, se agrega complejidad significativa y usualmente injustificada al programa de computadora.

```
p = k
big = |a_k,k|
DOFOR ii = k+1, n
  dummy = |a_ii,k|
  IF (dummy > big)
     big = dummy
     p = ii
  END IF
END DO
IF (p ≠ k)
  DOFOR jj = k, n
     dummy = a_p,jj
     a_p,jj = a_k,jj
     a_k,jj = dummy
  END DO
  dummy = b_p
  b_p = b_k
  b_k = dummy
END IF
```

Seudocódigo para implementar el pivoteo parcial.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Seudocódigo para la eliminación de Gauss con pivoteo parcial.

- Las ecuaciones no están escaladas, pero los valores escalados de los elementos se usan para determinar si se debe usar el pivoteo.

- El término diagonal se vigila durante la fase del pivoteo para detectar ocurrencias de valores cercanos a cero y con esto indicar si el sistema es singular.

```
SUB Gauss (a, b, n, x, tol, er)
  DIMENSION s (n)
  er = 0
  DOFOR i = 1, n
    s_i = ABS(a_i,1)
    DOFOR j = 2, n
      IF ABS(a_i,j)>s_i THEN s_i = ABS(a_i,j)
    END DO
  END DO
  CALL Eliminate(a, s, n, b, tol, er)
  IF er ≠ −1 THEN
     CALL Substitute(a, n, b, x)
  END IF
END Gauss

SUB Eliminate (a, s, n, b, tol, er)
  DOFOR k = 1, n − 1
    CALL Pivot (a, b, s, n, k)
    IF ABS (a_k,k/s_k) < tol THEN
      er = −1
      EXIT DO
    END IF
    DOFOR i = k + 1, n
      factor = a_i,k/a_k,k
      DOFOR j = k + 1, n
        a_i,j = a_i,j − factor*a_k,j
      END DO
      b_i = b_i - factor * b_k
    END DO
  END DO
  IF ABS(a_k,k/s_k) < tol THEN er = −1
END Eliminate

SUB Pivot (a, b, s, n, k)
  p = k
  big = ABS(a_k,k/s_k)
  DOFOR ii = k + 1, n
    dummy = ABS(a_ii,k/s_ii)
    IF dummy > big THEN
      big = dummy
      p = ii
    END IF
  END DO
  IF p ≠ k THEN
     DOFOR jj = k, n
      dummy = a_p,jj
      a_p,jj = a_k,jj
      a_k,jj = dummy
     END DO
     dummy = b_p
     b_p = b_k
     b_k = dummy
     dummy = s_p
     s_p = s_k
     s_k = dummy
  END IF
END pivot

SUB Substitute (a, n, b, x)
  x_n = b_n/a_n,n
  DOFOR i = n − 1, 1, −1
    sum = 0
    DOFOR j = i + 1, n
     sum = sum + a_i,j * x_j
    END DO
    x_i = (b_i − sum) / a_i,i
  END DO
END Substitute
```

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

UdeSantiago de Chile

Seudocódigo para la eliminación de Gauss con pivoteo parcial.

- Si devuelve un valor de er = –1, se ha detectado una matriz singular y el cálculo debe terminar.

- El usuario da a un parámetro tol un número pequeño para detectar ocurrencias cercanas a cero.

```
SUB Gauss (a, b, n, x, tol, er)
  DIMENSION s (n)
  er = 0
  DOFOR i = 1, n
    s_i = ABS(a_i,1)
    DOFOR j = 2, n
      IF ABS(a_i,j)>s_i THEN s_i = ABS(a_i,j)
    END DO
  END DO
  CALL Eliminate(a, s, n, b, tol, er)
  IF er ≠ –1 THEN
     CALL Substitute(a, n, b, x)
  END IF
END Gauss

SUB Eliminate (a, s, n, b, tol, er)
  DOFOR k = 1, n – 1
    CALL Pivot (a, b, s, n, k)
    IF ABS (a_k,k/s_k) < tol THEN
      er = –1
      EXIT DO
    END IF
    DOFOR i = k + 1, n
      factor = a_i,k/a_k,k
      DOFOR j = k + 1, n
        a_i,j = a_i,j – factor*a_k,j
      END DO
      b_i = b_i - factor * b_k
    END DO
  END DO
  IF ABS(a_k,k/s_k) < tol THEN er = –1
END Eliminate
```

```
SUB Pivot (a, b, s, n, k)
  p = k
  big = ABS(a_k,k/s_k)
  DOFOR ii = k + 1, n
    dummy = ABS(a_ii,k/s_ii)
    IF dummy > big THEN
      big = dummy
      p = ii
    END IF
  END DO
  IF p ≠ k THEN
     DOFOR jj = k, n
      dummy = a_p,jj
      a_p,jj = a_k,jj
      a_k,jj = dummy
     END DO
     dummy = b_p
     b_p = b_k
     b_k = dummy
     dummy = s_p
     s_p = s_k
     s_k = dummy
  END IF
END pivot

SUB Substitute (a, n, b, x)
  x_n = b_n/a_n,n
  DOFOR i = n – 1, 1, –1
    sum = 0
    DOFOR j = i + 1, n
     sum = sum + a_i,j * x_j
    END DO
    x_i = (b_i – sum) / a_i,i
  END DO
END Substitute
```

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & c_2^{(n)} \\ 0 & 0 & 1 & c_3^{(n)} \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad\quad &= c_1^{(n)} \\ x_2 \quad\quad &= c_2^{(n)} \\ x_3 &= c_3^{(n)} \end{aligned}$$

El método de Gauss-Jordan es una variación de la eliminación de Gauss.

A) Cuando una incógnita se elimina en el método de Gauss-Jordan, ésta es eliminada de todas las otras ecuaciones, no sólo de las subsecuentes.

B) Todos los renglones se normalizan al dividirlos entre su elemento pivote.

C) De esta forma, el paso de eliminación genera una matriz identidad en vez de una triangular.

D)= En consecuencia, no es necesario usar la sustitución hacia atrás para obtener la solución.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

El siguiente diagrama de flujo representa el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0333333 & -0.066667 & 2.61667 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0333333 & -0.066667 & 2.61667 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 & -19.5617 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 & 70.6150 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0333333 & -0.066667 & 2.61667 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 & 70.6150 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0680629 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & 0 & 10.01200 & 70.0843 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0680629 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & 0 & 1 & 7.00003 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3.00000 \\ 0 & 1 & 0 & -2.50001 \\ 0 & 0 & 1 & 7.00003 \end{bmatrix}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
DESCOMPOSICIÓN [L][U]

UdeSantiago de Chile

Motivación

Aunque la eliminación Gauss representa una forma satisfactoria para resolver sistemas lineales, resulta ineficiente cuando deben resolverse ecuaciones con los mismos coeficientes [*A*], pero con diferentes constantes del lado derecho (*b*).

Los métodos de descomposición [L][U] separan el tiempo usado en las eliminaciones para la matriz [A] de las manipulaciones en el lado derecho {B}.
Una vez que [A] se ha "descompuesto en [L] y [U]", los múltiples vectores del lado derecho {B} se pueden evaluar de manera eficiente.

http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/lu.html

http://crd-legacy.lbl.gov/~xiaoye/SuperLU/

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
DESCOMPOSICIÓN [L][U]

Descripción

Reordenemos el sistema tal que:

$$[A]\{X\}-\{B\}=0$$

Supongamos que la ecuación anterior se puede escribir como un sistema triangular superior de la forma:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \qquad [U]\{X\}-\{D\}=0$$

OBS: Mediante eliminación de Gauss se obtiene la matriz triangular superior [U].

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
DESCOMPOSICIÓN [L][U]

Supongamos ahora que existe una matriz diagonal inferior con números 1 en la diagonal de la forma:

$$[L]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

OBS: Los elementos de la matriz [L] son los factores que multiplican el elemento pivote en el proceso de eliminación de Gauss.

que tiene la siguiente propiedad:

$$[L]\{[U]\{X\}-\{D\}\}=[A]\{X\}-\{B\}$$

Por tanto, podemos concluir que:

$$[L][U]=[A]$$

$$[L]\{D\}=\{B\}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
DESCOMPOSICIÓN [L][U]

Procedimiento

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
DESCOMPOSICIÓN [L][U]

Problema: Obtenga la matriz [U] de la descomposición [L][U] = [A] para la siguiente matriz:

$$[A]=\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

De la eliminación de hacia adelante se obtiene la siguiente matriz triangular superior:

$$[U] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix}$$

Los factores empleados para obtener la matriz triangular superior están dados por:

$$f_{21} = \frac{0.1}{3} = 0.03333333$$

$$f_{31} = \frac{0.3}{3} = 0.1000000$$

$$f_{32} = \frac{-0.19}{7.00333} = -0.0271300$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
DESCOMPOSICIÓN [L][U]

Los factores empleados para obtener la matriz triangular superior se pueden colocar en una matriz triangular inferior de la forma:

$$[L]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la descomposición [L][U] es

$$[A]=[L][U]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix}$$