DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA
MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

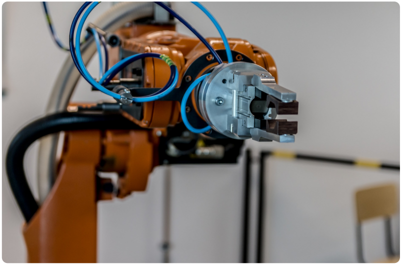
Diseño Computarizado
Mecanismos

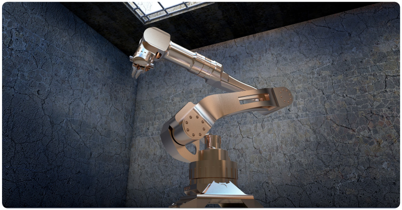
Claudio García Herrera, Matías Inostroza

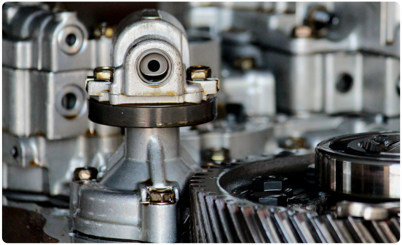
Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica
Av. Bdo. O'Higgins 3363 - Santiago - Chile
e-mail: claudio.garcia@usach.cl

Ingeniería Civil Mecánica
April 22, 2025

Introducción





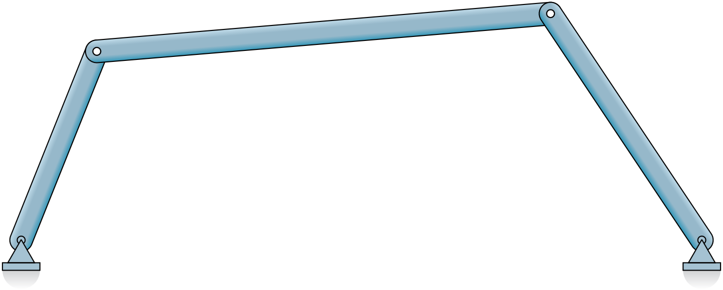


Definiciones

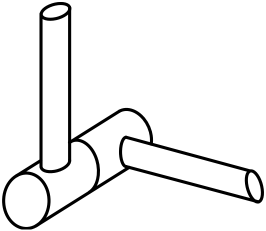
¿Que es un mecanismo?

Es un conjunto de elementos unidos entre sí, cuya función es transmitir movimiento y fuerzas.

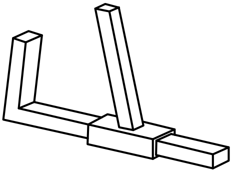
Los elementos unidos pueden ser desde dos, con uniones imperfectas, que permiten algún tipo de movimiento entre ellos. Estas uniones imperfectas, se llaman uniones cinemáticas.



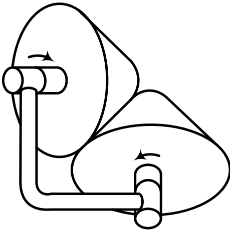
Uniones



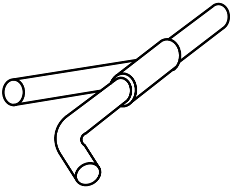
Revolución
(1 GDL)



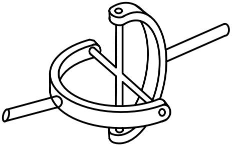
Prismática
(1 GDL)



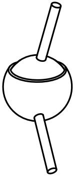
Engranaje
(1 GDL)



Cilíndrica
(2 GDL)

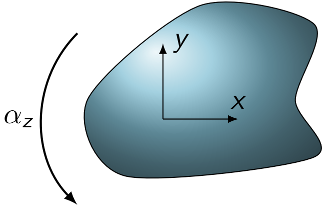


Cardánica
(2 GDL)



Esférica
(3 GDL)

Ecuación de Grübler



Grados de libertad

Un cuerpo rígido contenido en un plano tiene tres grados de libertad, a saber, posiciones x, y y ángulo α_z.

Los Grados De Libertad de un mecanismo de n eslabones, sin considerar uniones, serán:

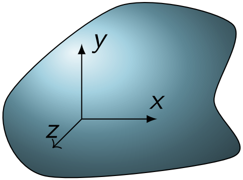
$$GDL = 3(n-1)$$

A esta ecuación se le deben quitar los grados de libertad que restringe cada unión:

$$GDL = 3(n-1) - 2P_I - P_{II}$$

Donde P_I representa la cantidad de uniones que permiten solo un grado de libertad, P_{II} representa la cantidad de uniones que permiten dos grados de libertad.

Ecuación de Grübler



Grados de libertad

Un cuerpo rígido contenido en el espacio tiene seis grados de libertad, a saber, posiciones x, y, z y ángulos α_x, α_y, α_z.

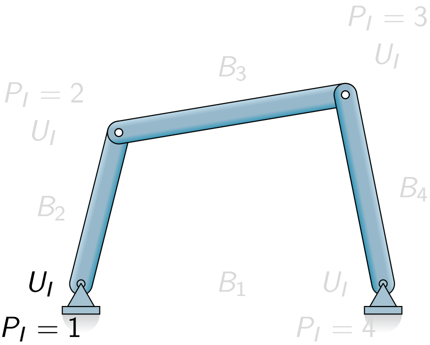
Los Grados De Libertad de un mecanismo de n eslabones, sin considerar uniones, serán:

$$GDL = 6(n-1)$$

A esta ecuación se le deben quitar los grados de libertad que restringe cada unión:

$$GDL = 6(n-1) - 5P_I - 4P_{II} - 3P_{III}$$

Ejemplo ecuación de Grübler

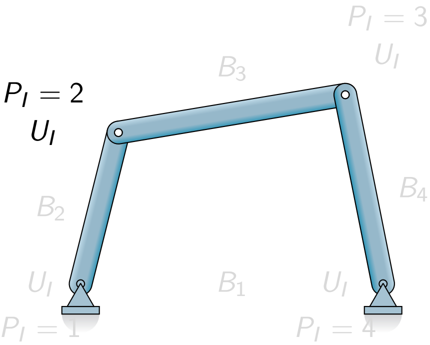


$$GDL = 3(n-1) - 2P_I - P_{II}$$

$$GDL = 3(4-1) - 2 \cdot 4 - 0$$

$$GDL = 9 - 8 - 0 = 1$$

Ejemplo ecuación de Grübler

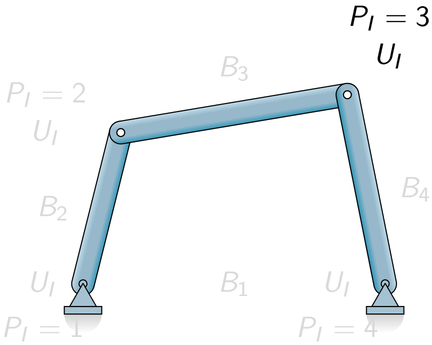


$$GDL = 3(n-1) - 2P_I - P_{II}$$

$$GDL = 3(4-1) - 2 \cdot 4 - 0$$

$$GDL = 9 - 8 - 0 = 1$$

Ejemplo ecuación de Grübler

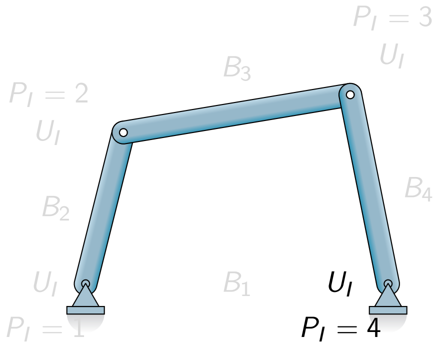


$$GDL = 3(n-1) - 2P_I - P_{II}$$

$$GDL = 3(4-1) - 2 \cdot 4 - 0$$

$$GDL = 9 - 8 - 0 = 1$$

Ejemplo ecuación de Grübler

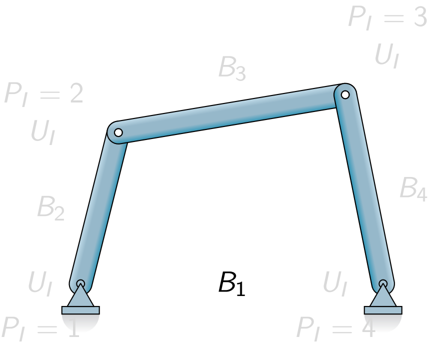


$$GDL = 3(n-1) - 2P_I - P_{II}$$

$$GDL = 3(4-1) - 2 \cdot 4 - 0$$

$$GDL = 9 - 8 - 0 = 1$$

Ejemplo ecuación de Grübler

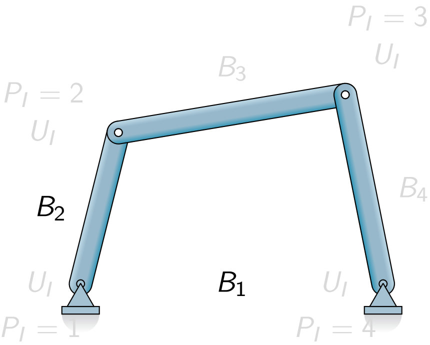


$$GDL = 3(n-1) - 2P_I - P_{II}$$

$$GDL = 3(4-1) - 2 \cdot 4 - 0$$

$$GDL = 9 - 8 - 0 = 1$$

Ejemplo ecuación de Grübler

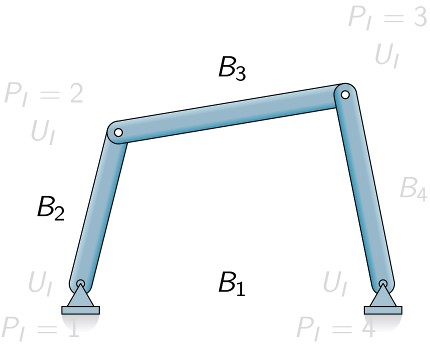


$$GDL = 3(n-1) - 2P_I - P_{II}$$

$$GDL = 3(4-1) - 2 \cdot 4 - 0$$

$$GDL = 9 - 8 - 0 = 1$$

Ejemplo ecuación de Grübler

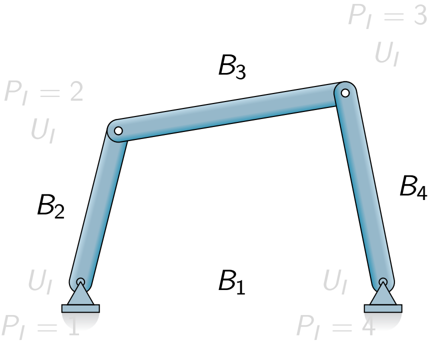


$$GDL = 3(n-1) - 2P_I - P_{II}$$

$$GDL = 3(4-1) - 2 \cdot 4 - 0$$

$$GDL = 9 - 8 - 0 = 1$$

Ejemplo ecuación de Grübler

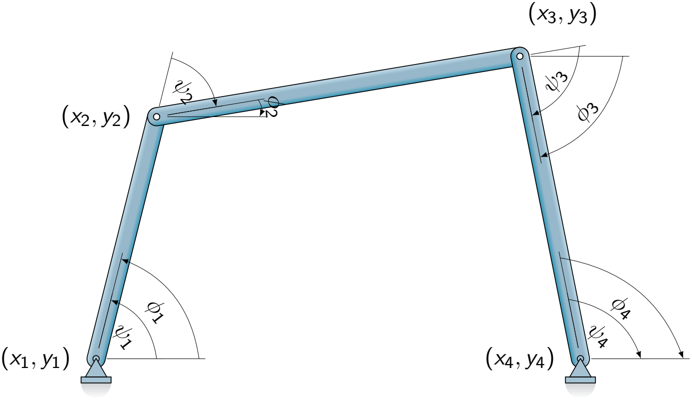


$$GDL = 3(n-1) - 2P_I - P_{II}$$

$$GDL = 3(4-1) - 2 \cdot 4 - 0$$

$$GDL = 9 - 8 - 0 = 1$$

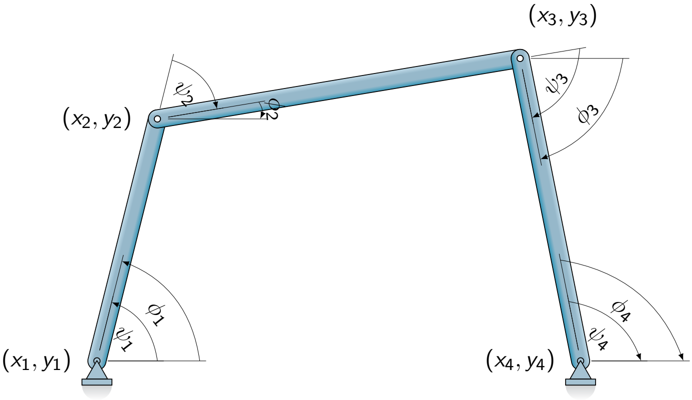
Coordenadas independientes y dependientes



Definciones

- Coordenadas independientes: Coinciden con el número de GDL. Cantidad mínima de coordenadas para representar la cinemática.
- Coordenadas dependientes: Cinemática del mecanismo con cantidad mayor al número de GDL Del sistema

Coordenadas independientes y dependientes



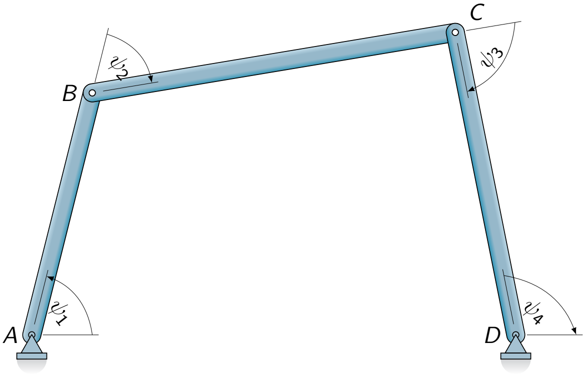
Defინciones coordenadas dependientes

Dependencia de variables a través de restricciones:

$$\text{Restricciones} = \text{Coords dep - GDL} \tag{1}$$

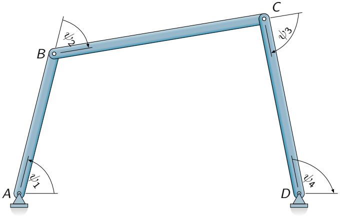
Tipos de coordenadas

- **Coordenadas relativas**: Posición de cada elemento relativo al anterior. Uso de coordenadas correspondientes a GDLs permitidos por la articulación de unión.
- Coordenadas de punto de referencia
- Coordenadas naturales



Tipos de coordenadas

- **Coordenadas relativas**
- Coordenadas de punto de referencia
- Coordenadas naturales



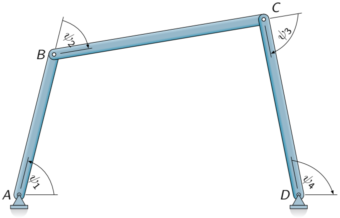
$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$$

$$L_1 \cos(\psi_1) + L_2 \cos(\psi_1 + \psi_2) + L_3 \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) - \overline{AD} = 0 \qquad (2)$$

$$L_1 \sin(\psi_1) + L_2 \sin(\psi_1 + \psi_2) + L_3 \sin(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) = 0 \qquad (3)$$

Tipos de coordenadas

- **Coordenadas relativas**
- Coordenadas de punto de referencia
- Coordenadas naturales



Ventajas

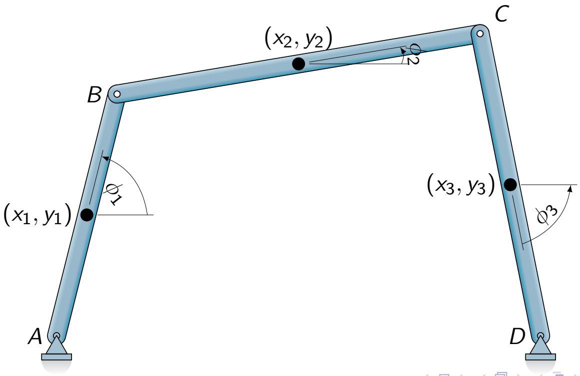
- Número reducido de coordenadas → Buena eficiencia numérica
- Adecuadas para configuraciones de cadena abierta
- Consideración del grado de libertad correspondiente a cada articulación

Desventajas

- Formulación puede ser más complicada por dependencia de la posición del elemento anterior
- Conduce a matrices complejas y caras de evaluar
- Requiere de un trabajo de preprocesamiento y postprocesamiento

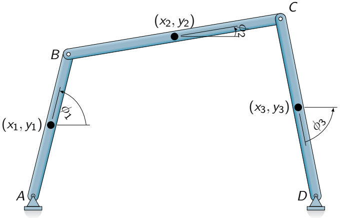
Tipos de coordenadas

- Coordenadas relativas
- **Coordenadas de punto de referencia**: Posición absoluta se define por tres coordenadas o parámetros. Es necesario un punto dentro del elemento, generalmente, el centro de gravedad.
- Coordenadas naturales



Tipos de coordenadas

- Coordenadas relativas
- **Coordenadas de punto de referencia**
- Coordenadas naturales



$$(x_1 - x_A) - \frac{L_1}{2}\cos(\phi_1) = 0 \tag{1}$$

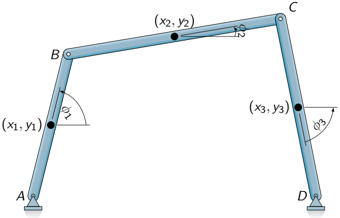
$$(y_1 - y_A) - \frac{L_1}{2}\sin(\phi_1) = 0 \tag{2}$$

$$(x_2 - x_1) - \frac{L_1}{2}\cos(\phi_1) - \frac{L_2}{2}\cos(\phi_2) = 0 \tag{3}$$

$$(y_2 - y_1) - \frac{L_1}{2}\sin(\phi_1) - \frac{L_2}{2}\sin(\phi_2) = 0 \tag{4}$$

Tipos de coordenadas

- Coordenadas relativas
- **Coordenadas de punto de referencia**
- Coordenadas naturales



$$(x_3 - x_2) - \frac{L_2}{2}\cos(\phi_2) - \frac{L_3}{2}\cos(\phi_3) = 0 \tag{5}$$

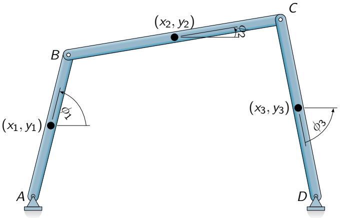
$$(y_3 - y_2) - \frac{L_2}{2}\sin(\phi_2) - \frac{L_3}{2}\sin(\phi_3) = 0 \tag{6}$$

$$(x_3 - x_D) - \frac{L_3}{2}\cos(\phi_3) = 0 \tag{7}$$

$$(y_3 - y_D) - \frac{L_3}{2}\sin(\phi_3) = 0 \tag{8}$$

Tipos de coordenadas

- Coordenadas relativas
- **Coordenadas de punto de referencia**
- Coordenadas naturales



Ventajas

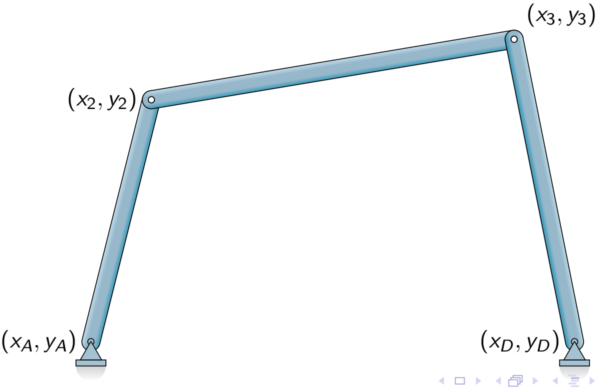
- Posición del elemento se determina directamente. Formulación es menos complicada
- Matrices dispersas $\rightarrow$ Formulación más eficiente

Desventajas

- Gran número de ecuaciones y coordenadas.
- Dificultad para adaptarse a topologías particulares.

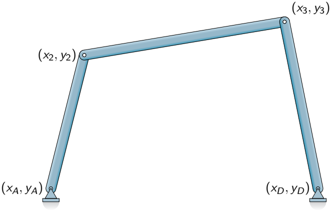
Tipos de coordenadas

- Coordenadas relativas
- Coordenadas de punto de referencia
- **Coordenadas naturales** : Coordenadas espaciales de las juntas. Posición y orientación angular determinadas por coordenadas cartesianas de estos puntos



Tipos de coordenadas

- Coordenadas relativas
- Coordenadas de punto de referencia
- **Coordenadas naturales**

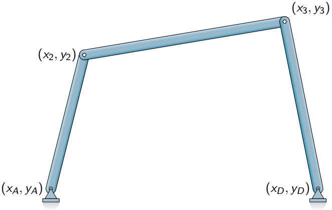


Consideraciones para puntos básicos

- Cada elemento debe tener al menos dos puntos básicos
- Debe haber un punto básico en cada junta
- Cada articulación prismática une dos cuerpos, ya sea en los extremos o dentro del segmento del elementos.
- Se pueden escoger otros puntos importantes, y sus coordenadas pasan a ser del conjunto de variables desconocidas.

Tipos de coordenadas

- Coordenadas relativas
- Coordenadas de punto de referencia
- **Coordenadas naturales**

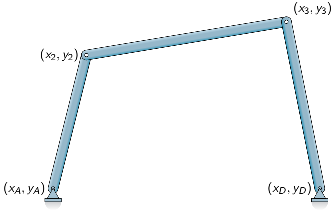


Restricciones tienen dos origenes

- Condición de sólido rígido
- Restricción de alguna condición cinemática

Tipos de coordenadas

- Coordenadas relativas
- Coordenadas de punto de referencia
- **Coordenadas naturales**

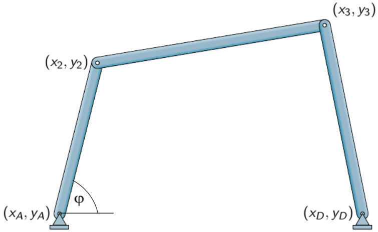


Ventajas

- Fácil implementación desde el punto de vista de programación
- Ecuaciones y matriz jacobiana son muy fáciles de evaluar.

Tipos de coordenadas

- Coordenadas relativas
- Coordenadas de punto de referencia
- Coordenadas naturales
- **Coordenadas mixtas**

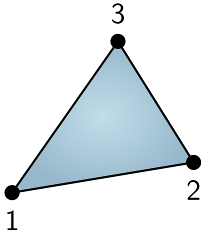


Características

- Empleo de coordenadas relativas de ángulos y distancias más coordenadas naturales
- Muy útil cuando la causa del movimiento es por la revolución de un motor

Tipos de coordenadas

- Coordenadas relativas
- Coordenadas de punto de referencia
- **Coordenadas naturales**



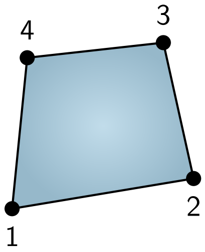
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{1-2}^2 = 0 \quad (1)$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - L_{2-3}^2 = 0 \quad (2)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - L_{1-3}^2 = 0 \quad (3)$$

Tipos de coordenadas

- Coordenadas relativas
- Coordenadas de punto de referencia
- **Coordenadas naturales** (Javier García de Jalón)



$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{1-2}^2 = 0 \quad (1)$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - L_{2-3}^2 = 0 \quad (2)$$

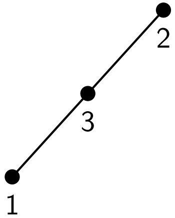
$$(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 - L_{3-4}^2 = 0 \quad (3)$$

$$(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 - L_{1-4}^2 = 0 \quad (4)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - L_{1-3}^2 = 0 \quad (5)$$

Tipos de coordenadas

- Coordenadas relativas
- Coordenadas de punto de referencia
- **Coordenadas naturales**



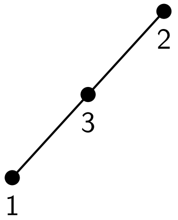
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{1-2}^2 = 0 \tag{1}$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - L_{1-3}^2 = 0 \tag{2}$$

$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = 0 \tag{3}$$

Tipos de coordenadas

- Coordenadas relativas
- Coordenadas de punto de referencia
- **Coordenadas naturales**



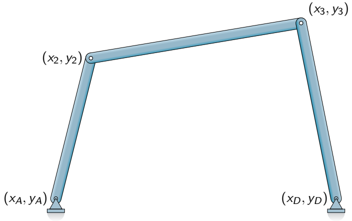
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{1-2}^2 = 0 \tag{1}$$

$$(x_2 - x_1) - C(x_3 - x_1) = 0 \tag{2}$$

$$(y_2 - y_1) - C(y_3 - y_1) = 0 \tag{3}$$

Donde $C = \frac{L_{ij}}{L_{ik}}$

Ejemplo calculo de mecanismos por cord. naturales



Primero se define que x_2 es la variable independiente, las variables dependientes son tres (y_2, x_3 y y_4). Luego se calculan las ecuaciones de restricción.

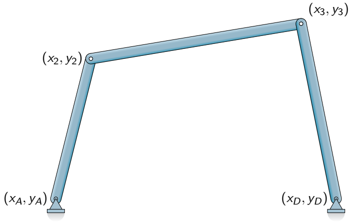
$$(x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2 - L_1^2 = 0 \tag{1}$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - L_2^2 = 0 \tag{2}$$

$$(x_D - x_3)^2 + (y_D - y_3)^2 - L_3^2 = 0 \tag{3}$$

Se escriben en forma de vector $\mathbf{\Phi}$

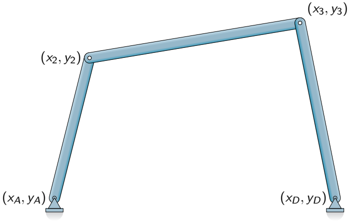
Ejemplo calculo de mecanismos por cord. naturales



$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2 - L_1^2 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - L_2^2 \\ (x_D - x_3)^2 + (y_D - y_3)^2 - L_3^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Se define el vector de incognitas $\mathbf{q}$

Ejemplo calculo de mecanismos por cord. naturales



$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente calculamos el jacobiano ($\mathbf{\Phi_q}$) de las ecuaciones de restricción.

Ejemplo calculo de mecanismos por cord. naturales

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2 - L_1^2 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - L_2^2 \\ (x_D - x_3)^2 + (y_D - y_3)^2 - L_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi_q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(y_2 - y_A) & 0 & 0 \\ -2(y_3 - y_2) & 2(x_3 - x_2) & 2(y_3 - y_2) \\ 0 & -2(x_D - x_3) & -2(y_D - y_3) \end{bmatrix}$$

Finalmente, al aplicar Newton-Rhapson

$$\mathbf{\Phi_q}(\mathbf{q_i})\, \mathbf{\Delta q} = -\mathbf{\Phi}(\mathbf{q_i})$$

Diseño Computarizado

Mecanismos

Claudio García Herrera, Matías Inostroza

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica
Av. Bdo. O'Higgins 3363 - Santiago - Chile
e-mail: claudio.garcia@usach.cl

Ingeniería Civil Mecánica
April 22, 2025