Problemas en 2 dimensiones

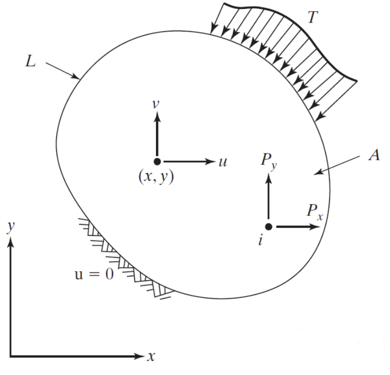
Modelación con elementos finitos

Cristian Catrilef Pozo
Claudio Garcia Herrera

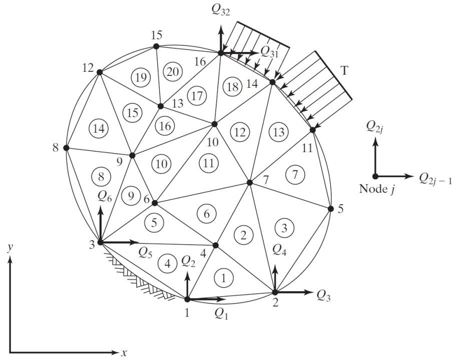
Universidad de Santiago de Chile (USACH)
Laboratorio de Biomateriales y Biomecánica
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica

Introducción

La formulación de un elemento finito en dos dimensiones permite resolver problemas con geometrías complejas mediante una discretización del sólido.



(a) Problema 2D.



(b) Discretización con elementos finitos

Modelación con elementos finitos

En un problema de dos dimensiones un nodo puede desplazarse en x e y, donde cada nodo tiene asociado 2 grados de libertad. Se definen los desplazamientos nodales como

$\mathbf{Q} = [Q_1 \; Q_2 \; \cdots \; Q_N]^T$

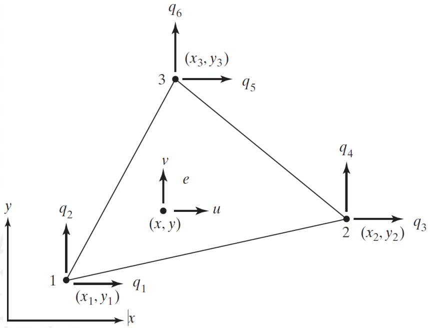


Figura 2: Elemento Triangular.

Campo de desplazamientos

Debido a un análisis lineal, propone un plano que permite obtener la magnitud del desplazamiento para v e u para cualquier punto del elemento.

$$u(x, y) = a_{11} + a_{12}x + a_{13}y$$

$$v(x, y) = a_{21} + a_{22}x + a_{23}y$$

Como se conocen los desplazamientos en cada nodo es posible determinar las constantes a_{ij}.

$$u(x_i, y_i) = a_{11} + a_{12}x_i + a_{13}y_i$$

$$v(x_i, y_i) = a_{21} + a_{22}x_i + a_{23}y_i$$

Formulación de Interpolación Lineal

Desplazamiento U

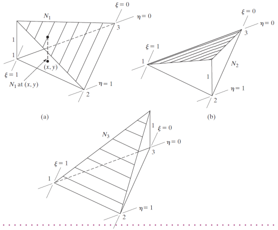
$$U = \frac{1}{2A}\Big\{ u_i\left[(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y\right]$$
$$+u_j\left[(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y\right]$$
$$+u_k\left[(x_i y_j - y_i x_j) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y\right]\Big\}$$

Desplazamiento V

$$V = \frac{1}{2A}\Big\{ v_i\left[(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y\right]$$
$$+v_j\left[(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y\right]$$
$$+v_k\left[(x_i y_j - y_i x_j) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y\right]\Big\}$$

Definiciones geométricas

$$x_{kj} = x_k - x_j, \quad x_{ik} = x_i - x_k, \quad x_{ji} = x_j - x_i$$
$$y_{jk} = y_j - y_k, \quad y_{ki} = y_k - y_i, \quad y_{ij} = y_i - y_j$$
$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$
$$a_j = x_k y_i - x_i y_k$$
$$a_k = x_i y_j - y_i x_j$$



Matriz de forma y desplazamientos

Se presenta la matriz de forma N

$$N = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} a_i + y_{jk}x + x_{kj}y & 0 & a_j + y_{ki}x + x_{ik}y & 0 & a_k + y_{ij}x + x_{ji}y & 0 \\ 0 & a_i + y_{jk}x + x_{kj}y & 0 & a_j + y_{ki}x + x_{ik}y & 0 & a_k + y_{ij}x + x_{ji}y \end{bmatrix}$$

Entonces, el desplazamiento en el plano se expresa como:

$$\underline{U}_{xy} = N\,u^e$$

Formulación de Deformaciones

Deformación lineal unitaria

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Deformación angular unitaria

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Formulación de Deformaciones

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

USACH

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2A}\left(u_i\, y_{jk} + u_j\, y_{ki} + u_k\, y_{ij}\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2A}\left(v_i\, x_{kj} + v_j\, x_{ik} + v_k\, x_{ji}\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2A}\left(u_i\, x_{kj} + u_j\, x_{ik} + u_k\, x_{ji} + v_i\, y_{kj} + v_j\, y_{ik} + v_k\, y_{ji}\right)$$

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = Bu^e$$

Relación constitutiva

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)\,, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)\,, \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

es decir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Trabajo externo e interno

Trabajo de las fuerzas externas:

$$W_e = \frac{1}{2}P_i u_i + \frac{1}{2}Q_i v_i + \frac{1}{2}P_j u_j + \frac{1}{2}Q_j v_j + \frac{1}{2}P_k u_k + \frac{1}{2}Q_k v_k$$

$$W_e = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}^e)^T \boldsymbol{P}^e$$

Trabajo interno acumulado (por unidad de volumen):

$$W_i' = \frac{1}{2}\varepsilon_x \sigma_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y \sigma_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\tau_{xy}$$

$$W_i' = \frac{1}{2}\varepsilon^T \boldsymbol{\sigma}$$

Conservación de la energía:

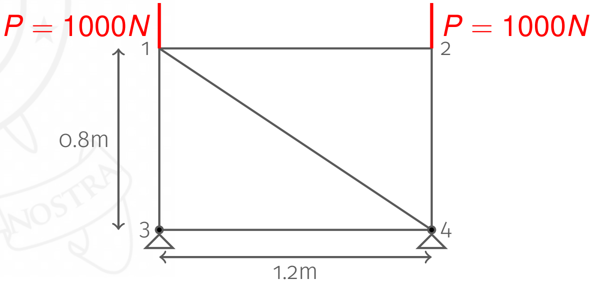
$$W_e = W_i$$

Ejemplo 1

Determine los desplazamientos de los puntos 1 y 2 del medio isótropo mostrado en la figura. Considere un estado de deformación plana.

Datos:

- $E = 210$ GPa
- $\nu = 0.15$



Problemas en 2 dimensiones

Modelación con elementos finitos

Cristian Catrilef Pozo
Claudio Garcia Herrera

Universidad de Santiago de Chile (USACH)
Laboratorio de Biomateriales y Biomecánica
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica