# CMM

## MECÁNICA - MEDIO CONTINUO

Profesor: Claudio García Herrera

Departamento de Ingeniería Mecánica
Universidad de Santiago de Chile

# Índice

# Índice

# Introducción

- Suposiciones (hipótesis) básicas:
  - Problemas isotérmicos.
  - Análisis estático (o estáticamente equivalente).
  - Material elástico lineal (linealidad material).
  - Pequeños desplazamientos (giros) y deformaciones (linealidad geométrica).
  - Comportamiento isótropo del material.
- Medio continuo
  - Sólidos eásticos 3D, 2D (tensión plana, deformación plana, axilsimetría) y 1D no polares ($\sigma$ es simétrico).

# Índice

# Medio Continuo : Sólido Elástico 3D ( $\Omega$)

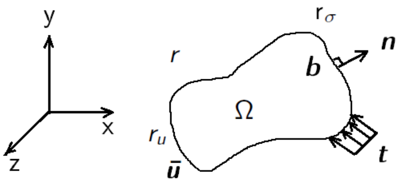



Figure: Sistema de coordenadas cartesiano.

Donde:

- $r$: Contorno de $\Omega$.
- $r = r_{\boldsymbol{u}} \cup r_\sigma$.
- $\phi = r_{\boldsymbol{u}} \cap r_\sigma$.
- $r_{\boldsymbol{u}}$: Contorno donde se aplican restricciones en el campo de desplazamientos $\bar{\boldsymbol{u}}$.
- $r_\sigma$: Contorno donde se aplican cargas por unidad de superficie $\boldsymbol{t}$.

Vector desplazamiento prescrito ($\bar{\boldsymbol{u}}$)

Vector de tracciones ($\boldsymbol{t}$)
(Fuerzas por unidad de área)

Vector de fuerzas de cuerpo ($\boldsymbol{b}$)
(Fuerzas por unidad de masa)
($\rho\boldsymbol{b}$: Fuerzas por unidad de volumen)

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

Vector desplazamiento($\boldsymbol{u}$)

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Tensor de Tensiones ($\boldsymbol{\sigma}$)
($2^{do}$ Orden)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma xy & \sigma_{xz} \\ & \sigma yy & \sigma_{yz} \\ sim. & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Tensor de Deformaciones ($\boldsymbol{\varepsilon}$)
($2^{do}$ Orden)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ sim. & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Ecuaciones de Equilibrio (en $\Omega$)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho b_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho b_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho b_z = 0$$

Relaciones cinemáticas (en $\Omega$)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Condiciones de Contorno esenciales
(en $r_u$)
(Dirichlet)

$$u = \bar{u}$$
$$v = \bar{v}$$
$$w = \bar{w}$$

Condiciones de contorno naturales
(en $r_\sigma$)
(Neumann)

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} + n_y + \sigma_{xz} n_z = t_x$$
$$\sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} + n_y + \sigma_{yz} n_z = t_y$$
$$\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} + n_y + \sigma_{zz} n_z = t_z$$

# Relaciones constitutivas (en $\Omega$):

$$\sigma_{xx} = c_{xxxx}\varepsilon_{xx} + c_{xxyy}\varepsilon_{yy} + c_{xxzz}\varepsilon_{zz} + c_{xxxy}\varepsilon_{xy} + c_{xxxz}\varepsilon_{xz} + c_{xxyz}\varepsilon_{yz}$$

$$\sigma_{xy} = c_{xyxx}\varepsilon_{xx} + c_{xyyy}\varepsilon_{yy} + c_{xyzz}\varepsilon_{zz} + c_{xyxy}\varepsilon_{xy} + c_{xyxz}\varepsilon_{xz} + c_{xyyz}\varepsilon_{yz}$$

$$\sigma_{xz} = c_{xzxx}\varepsilon_{xx} + c_{xzyy}\varepsilon_{yy} + c_{xzzz}\varepsilon_{zz} + c_{xzxy}\varepsilon_{xy} + c_{xzxz}\varepsilon_{xz} + c_{xzyz}\varepsilon_{yz}$$

$$\sigma_{yy} = c_{yyxx}\varepsilon_{xx} + c_{yyyy}\varepsilon_{yy} + c_{yyzz}\varepsilon_{zz} + c_{yyxy}\varepsilon_{xy} + c_{yyxz}\varepsilon_{xz} + c_{yyyz}\varepsilon_{yz}$$

$$\sigma_{yz} = c_{yzxx}\varepsilon_{xx} + c_{yzyy}\varepsilon_{yy} + c_{yzzz}\varepsilon_{zz} + c_{yzxy}\varepsilon_{xy} + c_{yzxz}\varepsilon_{xz} + c_{yzyz}\varepsilon_{yz}$$

$$\sigma_{zz} = c_{zzxx}\varepsilon_{xx} + c_{zzyy}\varepsilon_{yy} + c_{zzzz}\varepsilon_{zz} + c_{zzxy}\varepsilon_{xy} + c_{zzxz}\varepsilon_{xz} + c_{zzyz}\varepsilon_{yz}$$

## Notas

- Para el caso de sólidos no polares, la ecuación de equilibrio de momentos se satisface idénticamente si se considera que $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico.
- $\varepsilon$ (Simétrico por definición) es el tensor de deformaciones infinitesimales.
- Las configuraciones inicial y deformada se $\Omega$ prácticamente coinciden ya que se adopta la hipótesis de linealidad geométrica ( se excluye el problema de contacto).
- Incógnitas: 6 $(\sigma)$+3 $(\boldsymbol{u})$+ 6 $(\varepsilon)$= 15.
- Ecuaciones: 3 (EQ.) + 6 (Rel. Cin.)+ 6(Rel. Const.)=15.
- EL PROBLEMA ESTÁ BIEN PLANTEADO SI SE CUMPLE EL N° DE ECUACIONES E INCÓGNITAS.
- Coeficientes $c_{ijkl}$: Componentes del tensor constitutivo elástico $\boldsymbol{C}$ ($4^{to}$ Orden).
- El sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales puede resolverse por medio del método de elementos finitos (MEF).
- Las relaciones constitutivas mostradas se justificarán más adelante.

# Notación indicial

Ecuaciones de equilibrio

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0_i$$

o

$$\nabla_j \sigma_{ji} + \rho b_i = 0_i$$

(Como $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ; $\nabla_j \sigma_{ji} = \sigma_{ij} \nabla_j$)

Condiciones de contorno:

$$u_i = \bar{u}_i$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i$$

Relaciones cinemáticas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j\right) \\ &(\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}) \end{aligned}$$

Relaciones Constitutivas:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

# Notación Tensorial (Compacta)

Ecuaciones de equilibrio

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Relaciones cinemáticas:

$$\varepsilon = \boldsymbol{\nabla}^s \times \boldsymbol{u}$$

Condiciones de contorno:

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}$$

Relaciones Constitutivas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \varepsilon$$

# Transformación de las componentes de tensores

(De un sistema de coordenadas cartesiano $\boldsymbol{x}$ a otro $\boldsymbol{x}^*$)

Transformación de vectores:

$$\boldsymbol{t}^* = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{n}^* = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n}$$

$\boldsymbol{T}$: Tensor de transformación ($2^{do}$ Orden) sus componentes son los cosenos directores de los ángulos entre los ejes de los sistemas $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}^*$.

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos(x^*, x) & \cos(x^*, y) & \cos(x^*, z) \\ \cos(y^*, x) & \cos(y^*, y) & \cos(y^*, z) \\ \cos(z^*, x) & \cos(z^*, y) & \cos(z^*, z) \end{bmatrix} \qquad T_{ij} = \cos(x^*_{ij}, x_i)$$

Propiedad de $\boldsymbol{T}$: Tensor ortogonal.

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^T \quad o \quad \boldsymbol{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}^T = 1$$

$$T^{-1}_{ij} = T_{ji} \qquad T_{ik} T_{jk} = \delta_{ij}$$

$$(\boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{T} = \mathbf{1})$$

Forma sencilla de obtener la transformación de tensores de $2^{do}$ orden ($\boldsymbol{\sigma} y \varepsilon$):

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{t}^* y \boldsymbol{n} = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{n}^*$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{n}^* = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{t}^*$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{n}^* = \boldsymbol{t}^*, \quad con \quad \boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{T}^T$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{n}^* = \boldsymbol{t}^*$$

Finalmente:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{T}^T \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{T}$$

Análogamente:

$$\varepsilon^* = \boldsymbol{T} \cdot \varepsilon \cdot \boldsymbol{T}^T \Rightarrow \varepsilon = \boldsymbol{T}^T \cdot \varepsilon^* \cdot \boldsymbol{T}$$

Repetición del cálculo anterior usando notación indicial:

$$\sigma_{ij} n_j = t_i$$

$$t_i = t_{ki} t_k^* \quad y \quad n_j = T_{lj} n_l^*$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} T_{lj} n_l^* = T_{ki} t_k^*$$

Multiplicando ambos miembros por $T_{mi}$:

$$\sigma_{ij} T_{lj} n_l^* T_{mi} = T_{ki} T_{mi} t_k^* \quad con \quad g_{km} = T_{ki} T_{mi}$$

$$T_{mi} \sigma_{ij} T_{lj} n_l^* = t_m^* \quad con \quad \sigma_{ml}^* = T_{mi} \sigma_{ij} T_{lj}$$

$$(\sigma_{ml}^* n_l^* = t_m^*)$$

$$\sigma_{ml}^* = T_{mi} \sigma_{ij} T_{lj}$$

Intercambiando índices:

$$\begin{pmatrix} m \to i \\ l \to j \\ i \to k \\ j \to l \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij}^* = T_{ik} \sigma_{kl} T_{jl}$$

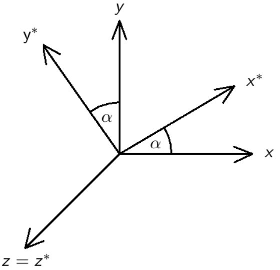
De Manera análoga, la expresión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{T}$$

Es Equivalente a:

$$\sigma_{ij} = T_{ki} \sigma_{kl}^* T_{lj}$$

# Caso Particular de transformación




$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{T}^T \qquad \varepsilon^* = \boldsymbol{T} \cdot \varepsilon \cdot \boldsymbol{T}^T$$

$$\begin{aligned}
\sigma^*_{xx} &= \cos^2(\alpha)\sigma_{xx} + \sin^2(\alpha)\sigma_{yy} + 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)\sigma_{xy} \\
\sigma^*_{yy} &= \sin^2(\alpha)\sigma_{xx} + \cos^2(\alpha)\sigma_{yy} - 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)\sigma_{xy} \\
\sigma^*_{xy} &= -\cos(\alpha)\sin(\alpha)\sigma_{xx} + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\sigma_{yy} + \left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right)\sigma_{xy} \\
\sigma^*_{zz} &= \sigma_{zz} \\
\sigma_{xz} &= \cos(\alpha)\sigma_{xz} + \sin(\alpha)\sigma_{yz} \\
\sigma_{yz} &= -\sin(\alpha)\sigma_{xz} + \cos(\alpha)\sigma_{yz}
\end{aligned}$$

Idem para $\varepsilon^*$

Lo mismo puede plantearse para transformaciones tales que: $x = x^*$ y $y = y^*$. Estas constantes son útiles para determinar las constantes elásticas.

Forma sencilla de obtener la transformación del tensor $\boldsymbol{C}$ ($4^{to}$ Orden) usando notación indicial:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ij} = T_{mi}\sigma^*_{mn}T_{nj} \quad y \quad \varepsilon_{kl} = T_{ok}\varepsilon^*_{op}T_{pl}$$

$$\Rightarrow T_{mi}\sigma^*_{mn}T_{nj} = C_{ijkl}T_{ok}\varepsilon^*_{op}T_{pl}$$

Multiplicando cambos miembros por $T_{qi}$ y $T_{rj}$

$$\underbrace{T_{mi}T_{qi}}_{g_{mq}}\sigma^*_{mn}\underbrace{T_{nj}T_{rj}}_{g_{nr}} = T_{qi}T_{rj}C_{ijkl}T_{ok}T_{pl}\varepsilon^*_{op}$$

$$\sigma^*_{qr} = \underbrace{T_{qi}T_{rj}C_{ijkl}T_{ok}T_{pl}}_{C^*_{qrop}}\varepsilon^*_{op} \quad (\sigma^*_{qr} = C^*_{qrop}\varepsilon^*_{op})$$

$$C^*_{qrop} = T_{qi}T_{rj}C_{ijkl}T_{ok}T_{pl} \quad (\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}:\boldsymbol{T}^T\times\boldsymbol{T}^T)$$

Análogamente:

$$C_{qrop} = T_{qi}T_{rj}C^*_{ijkl}T_{ok}T_{pl} \quad (\boldsymbol{C} = \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C}^*:\boldsymbol{T}^T\times\boldsymbol{T}^T)$$

# Ley de Hooke generalizada para sólidos elásticos

$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \rightarrow$ En principio, $\boldsymbol{C}$ tiene $3^4 = 81$ componentes debido a que tanto $\boldsymbol{\sigma}$ como $\varepsilon$ son tensores simétricos, se tiene que:

$C_{ijkl} = C_{jikl}$ y $C_{ijlk} = C_{ijlk} \rightarrow \boldsymbol{C}$ tiene $6^2 = 36$ componentes (Componentes de $\boldsymbol{\sigma}$ y $\varepsilon$: 6).

Por comodidad, la relación $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \varepsilon$ puede escribiese matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Donde: $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \;\; ; \;\; \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} \;\; ; \;\; \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$

Definición alternativa de sólido elástico (Green, 1839).

Existe una función de energía de deformación (o potencial elástico) $W$ tal que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \qquad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

(Esta definición se basa en el segundo principio de la termodinámica).

Se supone, además, que $W$ es una forma cuadrática de $\boldsymbol{\varepsilon}$ (esta suposición es razonable para pequeñas deformaciones):

$$\begin{aligned} W = \; & c_0 + c_1\varepsilon_{xx} + c_2\varepsilon_{yy} + c_3\gamma_{xy} + c_4\varepsilon_{zz} + c_5\gamma_{xz} + c_6\gamma_{yz} + \\ & +\tfrac{1}{2}c_{11}\varepsilon_{xx}^2 + c_{12}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{xx}\gamma_{xy} + c_{14}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + c_{15}\varepsilon_{xx}\gamma_{xz} + c_{16}\varepsilon_{xx}\gamma_{yz} + \\ & +\tfrac{1}{2}c_{22}\varepsilon_{yy}^2 + c_{23}\varepsilon_{yy}\gamma_{xy} + c_{24}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + c_{25}\varepsilon_{yy}\gamma_{xz} + c_{26}\varepsilon_{yy}\gamma_{yz} + \\ & +\tfrac{1}{2}c_{33}\gamma_{xy}^2 + c_{34}\gamma_{xy}\varepsilon_{zz} + c_{35}\gamma_{xy}\gamma_{xz} + c_{36}\gamma_{xy}\gamma_{yz} + \\ & +\tfrac{1}{2}c_{44}\varepsilon_{zz}^2 + c_{45}\varepsilon_{zz}\gamma_{xz} + c_{46}\varepsilon_{zz}\gamma_{yz} + \\ & +\tfrac{1}{2}c_{55}\gamma_{xz}^2 + c_{56}\gamma_{xz}\gamma_{yz} + \\ & +\tfrac{1}{2}c_{66}\gamma_{yz}^2 \end{aligned}$$

(El término $\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}$ ya está presente; Idem con los otros términos).
(Más adelante se demuestra que las constantes que aparecen en la expresión son las mismas de la ecuación $\sigma = C\varepsilon$).

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ sim & & & & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Material anisótropo

$\boldsymbol{C}$ Tiene 21 componentes (o constantes elásticas independientes a obtener de ensayos experimentales).
Esta relación es invertible:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$$

(Es común definir las constantes elásticas de $\boldsymbol{C}^{-1}$ y obtener $\boldsymbol{C}$ por inversión)

(Notación matricial)
Esta relación constitutiva corresponde a un material anisótropo.

Energía de deformación: $W = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} =$ Notación matricial.

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}$$

Se requiere que $W$ sea nula en un estado indeformado $\Longrightarrow c_0 = 0$.

Cálculo de $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{xx}} = c_1 + c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{13}\gamma_{xy} + c_{14}\varepsilon_{zz} + c_{15}\gamma_{xz} + c_{16}\gamma_{yz}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{yy}} = c_2 + c_{12}\varepsilon_{xx} + c_{22}\varepsilon_{yy} + c_{23}\gamma_{xy} + c_{24}\varepsilon_{zz} + c_{25}\gamma_{xz} + c_{26}\gamma_{yz}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} = c_3 + c_{13}\varepsilon_{xx} + c_{23}\varepsilon_{yy} + c_{33}\gamma_{xy} + c_{34}\varepsilon_{zz} + c_{35}\gamma_{xz} + c_{36}\gamma_{yz}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{zz}} = c_4 + c_{14}\varepsilon_{xx} + c_{24}\varepsilon_{yy} + c_{34}\gamma_{xy} + c_{44}\varepsilon_{zz} + c_{45}\gamma_{xz} + c_{46}\gamma_{yz}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xz}} = c_5 + c_{15}\varepsilon_{xx} + c_{25}\varepsilon_{yy} + c_{35}\gamma_{xy} + c_{45}\varepsilon_{zz} + c_{55}\gamma_{xz} + c_{56}\gamma_{yz}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} = c_6 + c_{16}\varepsilon_{xx} + c_{26}\varepsilon_{yy} + c_{36}\gamma_{xy} + c_{46}\varepsilon_{zz} + c_{56}\gamma_{xz} + c_{66}\gamma_{yz}$$

Se requiere también que $\boldsymbol{\sigma}$ sea nulo en un estado indeformado

$$\Longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$$

Relación constitutiva para un material ortótropo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & c_{14} & 0 & 0 \\ & c_{22} & 0 & c_{24} & 0 & 0 \\ & & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & sim & & & c_{55} & 0 \\ & & & & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ $\boldsymbol{C}$ tiene 9 constantes elásticas independientes.

Un material de estas características presenta tres planos ortogonales de simetría.

- Los esfuerzos normales ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ y $\sigma_{zz}$) están acoplados entre sí pero desacoplados de los esfuerzos de corte ($\sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ y $\sigma_{yz}$).
- Los esfuerzos de corte están desacoplados entre sí.

Para un material ortótropo, $\boldsymbol{C}^{-1}$ se define como:

$$\Longrightarrow \boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_y & 0 & -\nu_{xz}/E_z & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_x & 1/E_y & 0 & -\nu_{yz}/E_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_x & -\nu_{zy}/E_y & 0 & 1/E_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{C}^{-1}$ es simétrica $\Longrightarrow \nu_{xy}/E_y = \nu_{yx}/E_x \;\;,\;\; \nu_{xz}/E_z = \nu_{zx}/E_x \;\; y \;\; \nu_{yz}/E_z = \nu_{zy}/E_y$

Constantes elásticas:

- Módulos de elasticidad: $E_x$ , $E_y$ y $E_z$.
- Coeficientes de Poisson: $\nu_{xy}$ , $\nu_{xz}$ , $\nu_{yx}$ , $\nu_{yz}$ , $\nu_{zx}$ y $\nu_{zy}$.
- Módulos de corte: $G_{xy}$ , $G_{xz}$ y $G_{yz}$.
- Total= 12 constantes.

Nota: Recordar que solo 9 constantes son independientes:

$$\begin{pmatrix} E_x, E_y, E_z \\ \nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz} \\ G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{Ctes. Adoptadas como independientes.}$$

Obtención de las constantes elásticas a partir del ensayo de tracción (En tres direcciones).

-Ensayo donde sólo $\sigma_{xx}$ es distinto de cero:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_x} \Longrightarrow E_x = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}}, \ \ Esdecir, midiendo\ \sigma_{xx}\ y\ \varepsilon_{xx}\ se\ obtiene\ E_x.$$

- Ensayo donde sólo $\sigma_{yy}$ es distinto de cero:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E_y} \Longrightarrow E_y = \frac{\sigma_{yy}}{\varepsilon_{yy}}$$

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu_{xy}}{E_y}\sigma_{yy} \Longrightarrow \nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{yy}}$$

-Ensayo donde sólo $\sigma_{zz}$ es distinto de cero:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E_z} \Longrightarrow E_z = \frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}}$$

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu_{xz}}{E_z}\sigma_{zz} \Longrightarrow \nu_{xz} = -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu_{yz}}{E_z}\sigma_{zz} \Longrightarrow \nu_{yz} = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}}$$

Notas:

Si bien $(\nu_{yx}, \nu_{zx})$ y $\nu_{zy}$ se pueden obtener del primer y segundo ensayo respectivamente, dichas constantes deben satisfacer las condiciones de simetría de $\boldsymbol{C}$.

Para un material ortrópo se tiene que:

$$
\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{E_y E_z \triangle} - \frac{\nu_{yz}^2}{E_z^2 \triangle} & \frac{\nu_{xy}}{E_y E_z \triangle} + \frac{\nu_{xz}\nu_{yz}}{E_z^2 \triangle} & 0 & \frac{\nu_{xz}}{E_y E_z \triangle} + \frac{\nu_{xy}\nu_{yz}}{E_y E_z \triangle} & 0 & 0 \\
 & \frac{1}{E_x E_z \triangle} - \frac{\nu_{xz}^2}{E_z^2 \triangle} & 0 & \frac{\nu_{yz}}{E_x E_z \triangle} + \frac{\nu_{xy}\nu_{xz}}{E_y E_z \triangle} & 0 & 0 \\
 & & G_{xy} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \frac{1}{E_x E_y \triangle} - \frac{\nu_{xy}^2}{E_y^2 \triangle} & 0 & 0 \\
 & & & & G_{xz} & 0 \\
Sim. & & & & & G_{yz}
\end{bmatrix}
$$

$$
\triangle = \frac{1}{E_x E_y E_z} - \frac{\nu_{xy}^2}{E_y^2 E_z} - \frac{\nu_{xz}^2}{E_y E_z^2} - \frac{\nu_{yz}^2}{E_x E_z^2} - \frac{2\nu_{xy}\nu_{xz}\nu_{yz}}{E_y E_z^2}
$$

## Suposición de estabilidad material:

La función de energía de deformación debe ser definida positiva. Es decir, para cualquier $\varepsilon \neq \mathbf{0}$ $W = \frac{1}{2}\varepsilon^T \boldsymbol{C}\varepsilon > 0$. (Sólo para $\varepsilon = \mathbf{0}$ $\;W = 0$) (También se puede decir que $W$ es definida no negativa o semi definida positiva)

(Esta suposición, que también se basa en el segundo principio de la termodinámica, es necesaria para probar la unicidad de la solución del problema de equilibrio elástico).

En otras palabras, esta suposición establece que en el estado indeformado ( estado de equilibrio termodinámico establece que, según la experiencia, no se deforma espontáneamente) $W$ es la mínima (=0 en nuestro caso) tal que en cualquier estado deformado próximo $W$ debe ser positiva. Así, la matriz $\boldsymbol{C}$ debe ser definida positiva (se excluye el caso trivial $\boldsymbol{C} = \mathbf{0}$).

$\Longrightarrow$ Es decir, Todos los valores propios de $\boldsymbol{C}$ deben ser positivos (o, de manera equivalente, se debe cumplir que: ***a*)** traza de C positiva, ***b*)** Menores de $\boldsymbol{C}$ positivos, y ***c*)** Determinante de $\boldsymbol{C}$ positivo).

Algunas condiciones de estabilidad material para un material ortótropo ( Menores de $\boldsymbol{C}^{-1}$ positivos).

$$E_y > \nu_{xy}^2, E_z > \nu_{xz}^2 E_x y E_z > \nu_{yz}^2 E_y$$

Con:

$$E_x > 0\ ,\ E_y > 0\ ,\ E_z > 0\ ,\ G_{xy} > 0\ ,\ G_{xz} > 0\ y\ G_{yz} > 0.$$

(una estimación más precisa de estas condiciones es compleja)

## Relación constitutiva para un material isótropo:

En este caso, las constantes elásticas son independientes de la orientación de los ejes del sistema de coordenadas (No hay direcciones preferenciales en el material, es decir, las constantes elásticas deben ser las mismas, en un punto dado, para cualquier elección de sistema de coordenadas).

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{C}$ es un tensor isótropo ( Sus componentes no cambian para cualquier transformación del sistema de coordenadas cartesiano).

Si $\boldsymbol{C}$ es isótropo, $\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C}$ y puede demostrarse que $\boldsymbol{C}$ depende únicamente de dos constantes elásticas independientes ( A partir de $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^*$, la demostración es compleja).

Demostración ( A partir de la transformación de $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$):

En el sistema de coordenadas $\boldsymbol{x}$: $\sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{14}\varepsilon_{zz}$ **(*A*)**

En el sistema de coordenadas $\boldsymbol{x}^*$: $\sigma^*_{xx} = c^*_{11}\varepsilon^*_{xx} + c^*_{12}\varepsilon^*_{yy} + c^*_{14}\varepsilon^*_{zz}$ **(*B*)**

Si $\boldsymbol{C}$ es isótropo: $c^*_{12} = c_{12}$, $c^*_{22} = c_{22}$ y $c^*_{24} = c_{24}$

si $\boldsymbol{x}^*$ es el sistema de coordenadas con $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $z = z^*$ ; $\sigma^*_{yy} = \sigma_{xx}$, $\varepsilon^*_{xx} = \varepsilon_{yy}$, $\varepsilon^*_{yy} = \varepsilon_{xx}$ y $\varepsilon^*_{zz} = \varepsilon_{zz}$

Restando **(*A*)** $-$ **(*B*)**: $0 = (c_{11} - c_{22})\varepsilon_{xx} + (c_{14} - c_{24})\varepsilon_{zz}$

Para valores arbitrarios de $\varepsilon_{xx}$ y $\varepsilon_{zz} \Longrightarrow c_{11} = c_{22}$ y $c_{14} = c_{24}$

Nota:

Para un material isótropo, la matriz $\boldsymbol{C}$ es simétrica independientemente de la suposición de la existencia de $W$ (Esto se demuestra incluyendo $c^*_{21}$, en **(*B*)**, etc.)

Análogamente:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= c_{55}\gamma_{xz} \quad &\boldsymbol{(C)} \\ \sigma_{yz} &= c_{66}\gamma_{yz} \quad &\boldsymbol{(D)} \end{aligned}$$

Siendo $c_{66}^* = c_{66}$, $\sigma_{yz}^* = -\sigma_{xz}$ y $\gamma_{yz}^* = -\gamma_{xz}$

Sumando $\boldsymbol{(C)} + \boldsymbol{(D)}$ : $0 = (c_{55} - c_{66})\gamma_{xz} \implies c_{55} = c_{66}$

Repitiendo el análisis para el sistema de coordenadas $\boldsymbol{x}^*$ con $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $x = x^*$: $c_{22} = c_{44}$, $c_{12} = c_{14}$ y $c_{33} = c_{55}$.

Por lo tanto, hasta ahora se tiene que: $c_{11} = c_{22} = c_{44}$ , $c_{12} = c_{14} = c_{24} = \lambda$ y $c_{33} = c_{55} = c_{55} = \mu$, $\lambda$ y $\mu$ coeficientes de Lamé.

Por último, repitiendo el análisis para el sistema de coordenadas $\boldsymbol{x}^*$ con $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y $z = z^*$:

$\sigma_{xx}^* = \frac{1}{2}\sigma_{xx} + \frac{1}{2}\sigma_{yy} + \sigma_{xy} \implies$

$c_{11}^*\varepsilon_{xx}^* + c_{12}^*\varepsilon_{yy}^* + c_{14}\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2}(c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{14}\varepsilon_{zz}) + \frac{1}{2}(c_{12}\varepsilon_{xx} + c_{22}\varepsilon_{yy} + c_{24}\varepsilon_{zz}) + c_{33}\gamma_{xy}$

Pero: $c_{11}^* = c_{11}$ , $c_{12}^* = c_{12}$ , $c_{14}^* = c_{14}$ , $\varepsilon_{xx}^* = \frac{1}{2}\varepsilon_{xx} + \frac{1}{2}\varepsilon_{yy} + \frac{1}{2}\gamma_{xy}$ ,

$\varepsilon_{yy}^* = \frac{1}{2}\varepsilon_{xx} + \frac{1}{2}\varepsilon_{yy} - \frac{1}{2}\gamma_{xy}$ $y$ $\varepsilon_{zz}^* = \varepsilon_{zz}$

(Recordar que: $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$)

$\implies \frac{c_{11}}{2}\varepsilon_{xx} + \frac{c_{11}}{2}\varepsilon_{yy} + c_{11}\gamma_{xy} + \frac{c_{12}}{2}\varepsilon_{xx} + \frac{c_{12}}{2}\varepsilon_{yy} - c_{12}\gamma_{xy} + c_{14}\varepsilon_{zz} =$

$= \frac{c_{11}}{2}\varepsilon_{xx} + \frac{c_{12}}{2}\varepsilon_{yy} + c_{14}\varepsilon_{zz} + \frac{c_{12}}{2}\varepsilon_{xx} + \frac{c_{22}}{2}\varepsilon_{yy} + \frac{c_{24}}{2}\varepsilon_{zz} + c_{33}\gamma_{xy}$

$\implies (\frac{c_{11}}{2} - \frac{c_{12}}{2} - c_{33})\gamma_{xy} = 0 \implies c_{11} = c_{12} + 2c_{33}$ o $c_{11} = c_{22} = c_{44} = \lambda + 2\mu$

Material Isótropo

$$
\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ & & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & \mathit{sim.} & & & & \mu \end{bmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow \boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} & 0 & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} & 0 & 0 \\ & \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} & 0 & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{\mu} & 0 \\ \mathit{sim.} & & & & & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix}
$$

Definición alternativa ("Clásica") $\boldsymbol{C}^{-1}$:

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & 0 & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{G} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{E} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ sim. & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$

### Parámetros

- E: Módulo de Young (o elasticidad).
- $\nu$: Coeficiente de Poisson.
- G: Módulo de corte.

Como $\boldsymbol{C}^{-1}$ debe depender de dos constantes elásticas (por ejemplo, EY) G debe ser función de esas constantes.

Obtención de las constantes elásticas a partir del ensayo de tracción.

(Ensayo donde sólo $\sigma_{xx}$ es distinto de cero).

$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \Longrightarrow E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}}$, Es decir midiendo $\sigma_{xx}$ y $\varepsilon_{xx}$ se obtiene $E$.

$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} \Longrightarrow \nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}$, Es decir midiendo $\varepsilon_{yy}$ y $\varepsilon_{xx}$ se obtiene $\nu$.

Verificación: $\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} \Longrightarrow \nu = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}}$ por ser material isótropo.

Demostración que $G = G(E, \nu)$:

De las expresiones de $\boldsymbol{C}^{-1}$ se tiene que:

$\frac{1}{E} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} \rightarrow$ **(A)**

y

$-\frac{\nu}{E} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \rightarrow$ **(B)**

$\Longrightarrow$ (Dividiendo $\frac{\textbf{(B)}}{\textbf{(A)}}$) $2\nu = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \Longrightarrow \mu = \frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$ **(C)**

$\Longrightarrow$ (Reemplazando **(C)** en **(A)**) $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ **(D)**

$\Longrightarrow$ (Reemplazando **(D)** en **(C)**) $\mu = \frac{E}{(2(1+\nu)} = G$

Material Isótropo

$$
\boldsymbol{C}^{-1} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}
1 & -\nu & 0 & \nu & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & -\nu & 0 & 0 \\
 & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\
sim. & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}\begin{bmatrix}
1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 \\
 & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\
sim & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}
\end{bmatrix}
$$

2 Constantes elásticas independientes

De las expresiones $C(\lambda, \mu)$ y $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C\varepsilon}$, se tiene que:

$$\sigma_{ij} = \left[\underbrace{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})}_{C_{ijkl}}\right]\varepsilon_{kl} \implies \sigma_{ij} = \lambda|_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{(A)}$$

Si $i = j \implies \sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ii} \implies \varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{(w\lambda+2\mu)} \quad \text{(B)}$

Reemplazando (B) en (A) y despejando:

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{-\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}}_{-\frac{\nu}{E}}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \underbrace{\frac{1}{2\mu}}_{\frac{1+\nu}{E}}\sigma_{ij} \implies \varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}$$

Definición de presión: $p = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$

Definición de deformación volumétrica: $\varepsilon_v = \varepsilon_{ii}$

Definición de tensores desviadores (De $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$):

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\varepsilon_v * \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \\ \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_v\delta_{ij} \end{matrix}$$

Se puede demostrar que: $\varepsilon = \triangle\Omega$

$\Longrightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{'} + p\delta_{ij} = \sigma_{ij}^{'} + \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ y $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{'} + \frac{1}{3}\varepsilon_v\delta_{ij} = \varepsilon_{ij}^{'} + \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$

Reemplazando estas expresiones en (A) teniendo en cuanta (B),

$\sigma_{ij}^{'} = 2\underbrace{\mu}_{G:ModulodeCorte}\varepsilon_{ij}^{'}$ y $\qquad p = (\underbrace{\lambda + \frac{2}{3}\mu}_{K:Modulovolumetrico})\varepsilon_v$

(Ley constitutiva desviadora) (Ley constitutiva volumétrica)

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , $K = \frac{E}{3(1-2\nu}$ , $K - \frac{2}{3}G = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

$\Longrightarrow \sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}^{'} + K\varepsilon_v\delta_{ij} \Longrightarrow$ Los comportamientos cortante y volumétrico pueden desacoplarse.

$$\Longrightarrow \sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + (K - \tfrac{2}{3}G)\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (C) \Longrightarrow \sigma_{ij} = \underbrace{\left[G(\delta_{ik}\delta_{jl}) + (K - \frac{2}{3}G)\delta_{ij}\delta_{kl}\right]}_{C_{ijkl}=(C_{ijkl}^{'}+C_{ijkl}^{p})}\varepsilon_{kl}$$

Energía de deformación: $W = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}$

$$W = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}^{'} + \tfrac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij})(2G\varepsilon_{ij}^{'} + K\varepsilon_{ll}\delta_{ij}) = G\varepsilon_{ij}^{'}\varepsilon_{ij}^{'} + \tfrac{1}{2}K\varepsilon_{ll}\varepsilon_{ij}^{'}\delta_{ij} + \tfrac{1}{3}G\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\varepsilon_{ij}^{'} + \tfrac{1}{6}K\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll}\delta_{ij}\delta_{ij}$$

El producto de un tensor desviador por el tensor unidad es cero:

$$\varepsilon_{ij}^{'}\delta_{ij} = (\varepsilon_{ij} - \tfrac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij})\delta_{ij} = \varepsilon_{ii} - \tfrac{1}{3}\varepsilon_{kk}\underbrace{\delta_{ij}\delta_{ij}}_{3} = 0$$

$\Longrightarrow W = G\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \frac{1}{2}K(\varepsilon_{kk})^2$ (Usando (C), $W = G\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\lambda\varepsilon^2_{kk}$ con $\lambda = K - \frac{2}{3}G$

Condiciones necesarias y suficientes para que $W$ sea una función definida positiva:
$G > 0$ y $K > 0$.

$\Longrightarrow E > 0$ y $-1 < \nu < \frac{1}{2}$.

Notas:

-Se han encontrado materiales con $\nu < 0$

-FALTA

$$\sigma_{ij} = \underbrace{[G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}}_{C'_{ijkl}} + \underbrace{K\delta_{ij}\delta_{kl}]}_{C^p_{ijkl}}\varepsilon_{kl}$$

Componentes desviadora y volumétrica de $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}' + \boldsymbol{C}^p$$

En materiales "Cúbicos" (cristales), se tiene que:

$$c_{11} = c_{22} = c_{44}$$

$$c_{12} = c_{14} = c_{24}$$

$$c_{33} = c_{55} = c_{66}$$

$\Longrightarrow$ 3 constantes elásticas independientes.

Es un material que se comporta de igual manera según tres ejes ortogonales pero no es isótropo, es decir, no se comporta de igual manera para el sistema de coordenadas $\boldsymbol{x}^*$ con $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ( En otros palabras, no se cumple la relación de isotropía $c_{11} = c_{12} + 2c_{33}$).

Relación constitutiva para un material con isotropía transversal (o anisotropía normal).

El material presenta comportamiento isótropo en un plano si el plano de isotropía es el $x - y$

$$
\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & 0 & -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & 0 & ) \\
 & \frac{1}{E_x} & & -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 \\
 & & \frac{2(1+\nu_{xy})}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\
sim. & & & & & \frac{1}{G_{xz}}
\end{bmatrix}
$$

5 Constantes elásticas independientes:

$$
E_x \ , \ E_z \ , \ \nu_{xy} \ , \ \nu_{xz} \ , \ G_{xz}
$$

# CMM
## MECÁNICA - MEDIO CONTINUO

Profesor: Claudio García Herrera

Departamento de Ingeniería Mecánica
Universidad de Santiago de Chile