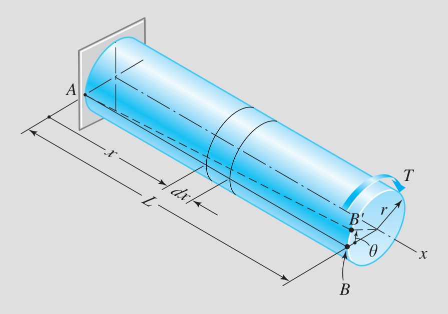
C15153
Resistencia de Materiales
Torsión

Roberto Ortega, PhD

Se analizarán los efectos que produce una carga de torsión sobre un elemento largo y recto como un eje o tubo de sección transversal circular.

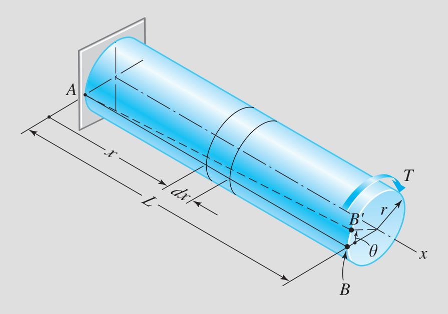


Consideremos un elemento macizo de sección circular empotrado en un extremo A sometido a un momento torsor T en el extremo libre B.

Tras aplicar la carga la linea recta AB se deforma en una hélice AB' y se produce un ángulo de rotación θ en el extremo libre.

Las cargas de torsión actúan en planos perpendiculares al eje y los esfuerzos producidos no superan el límite de proporcionalidad.

Se analizarán los efectos que produce una carga de torsión sobre un elemento largo y recto como un eje o tubo de sección transversal circular.

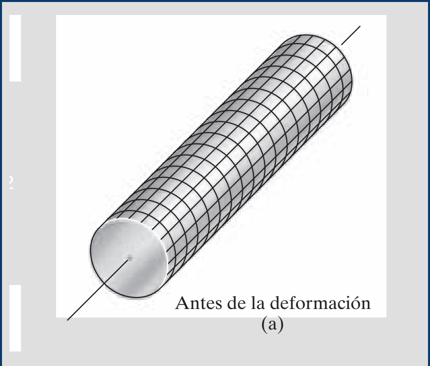


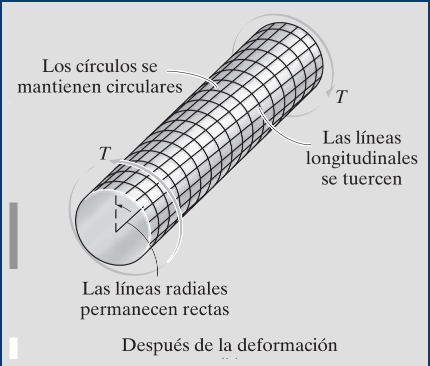
Durante la deformación:

- Las secciones circulares se mantienen circulares.
- Las secciones transversales a lo largo del eje permanecen planas.
- Las líneas radiales se conservan rectas durante la deformación.
- Si el ángulo de giro es pequeño, la longitud del eje y su radio se mantendrán sin cambio.

Las cargas de torsión actúan en planos perpendiculares al eje y los esfuerzos producidos no superan el límite de proporcionalidad.

Las siguientes figuras muestra esquemáticamente la situación del eje antes y después de la deformación.





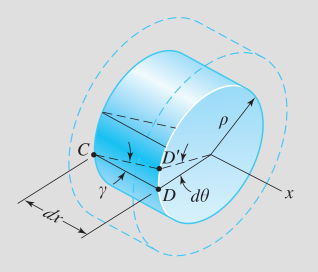
UdeSantiago de Chile

Para analizar la deformación al interior del eje consideremos una longitud infinitesimal dx del eje, como muestra la figura. Eliminemos también algunas capas y dejemos el cilindro de radio ρ.

Puesto que las secciones están separadas una distancia infinitesimal, la diferencia entre sus rotaciones $d\theta$ es también infinitesimal.

Debido a la rotación $d\theta$ que sufre la linea recta CD, el punto D se desplaza hasta una nueva posición D'.

Observando la distorsión del elemento con lineas segmentadas es fácil reconocer que el ángulo γ es la deformación por corte del elemento.



$$DD' = \rho\, d\theta = \gamma\, dx$$

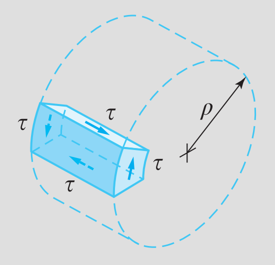
$$\gamma = \rho \frac{d\theta}{dx}$$

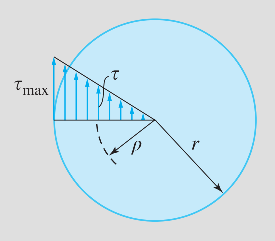
Aplicando la Ley de Hooke (relación lineal entre la tensión y la deformación) se obtiene el esfuerzo cortante:

$$\tau = G\,\gamma = G\frac{d\theta}{dx}\rho$$

Obsérvese que el término $G\frac{d\theta}{dx}$ no depende de la distancia ρ, por tanto el esfuerzo de corte varía linealmente con la distancia radial ρ medida desde el eje longitudinal.

La variación del esfuerzo cortante que actúa en la sección transversal muestra que el esfuerzo máximo τ_{max} se produce en la superficie externa del eje.



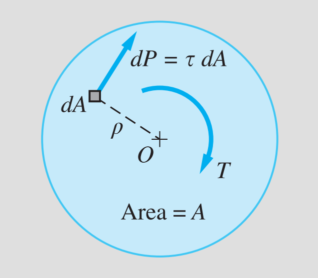


La fuerza de cortante actuando en el área está dada por:

$$dP = \tau\, dA = G\frac{d\theta}{dx}\rho\, dA$$

y el momento alrededor del centro O se obtiene como:

$$\rho\, dP = G\frac{d\theta}{dx}\rho^2\, dA$$

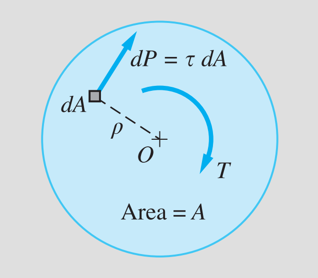


Sumando las contribuciones de todos los elementos diferenciales del area A se obtiene:

$$\int_A \rho\, dP = G\frac{d\theta}{dx}\int_A \rho^2\, dA = T$$

Puesto que $J = \int_A \rho^2\, dA$ es el momento polar de inercia de la sección transversal, se puede escribir que

$$G\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{J} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{T\,\rho}{J}$$



El ángulo θ obtenido en el extremo libre del eje está dado entonces por:

$$\theta = \int_0^L d\theta = \int_0^L \frac{T}{JG} dx$$

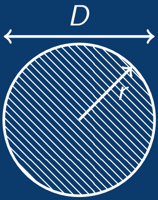
Considerando que la sección transversal no varía a lo largo de la longitud (no depende de x):

$$\theta = \frac{T\,L}{J\,G}$$

El cortante máximo se obtiene reemplazando ρ por el radio del eje:

$$\tau_{max} = \frac{T\, r}{J}$$

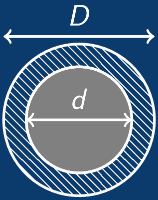
Sección maciza



$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$
$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\tau_{max} = \frac{2\,T}{\pi\, r^3} = \frac{16\,T}{\pi\, d^3}$$

Sección hueca



$$J = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{2}$$
$$J = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$$

$$\tau_{max} = \frac{2\,T\,R}{\pi\,(R^4 - r^4)} = \frac{16\,T\,D}{\pi\,(D^4 - d^4)}$$

La potencia $\mathscr{P}$ transmitida por un par constante T que gira con velocidad angular constante ω está dada por:

$$\mathscr{P} = \omega\, T$$

donde ω se mide en radianes por unida de tiempo.

Si el eje gira a una frecuencia f (revoluciones por unidad de tiempo) y $\omega = 2\pi f$, se tiene:

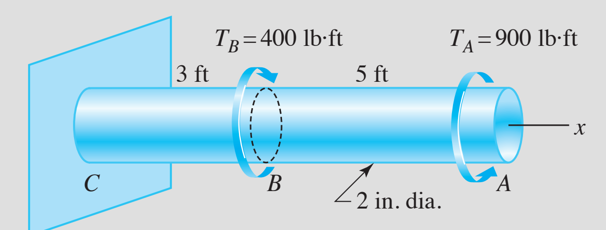
$$\mathscr{P} = 2\pi f\ T$$

El momento torsor transmitido puede expresarse como:

$$T = \frac{\mathscr{P}}{2\pi f}$$

La figura muestra un eje circular macizo de 2 in de diámetro que se encuentra empotrado en el extremo C y está sujeto a las cargas $T_A = 900\,\text{lb·ft}$ y $T_B = 400\,\text{lb·ft}$

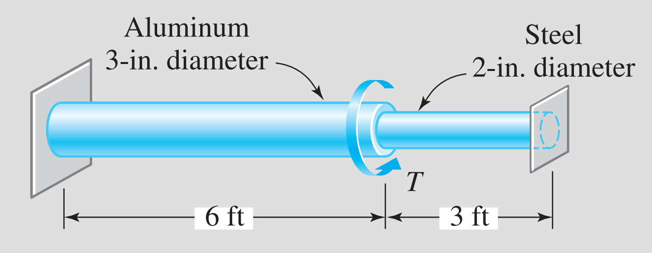
1. Determine el esfuerzo máximo de corte en los segmentos AB y BC del eje.
2. Calcule el ángulo de rotación en el extremo libre A. Use $G = 12 \times 10^6$ psi para el acero.



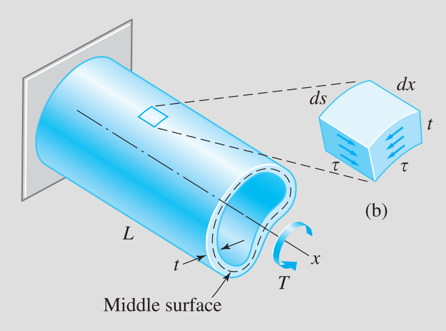
(a)

La figura muestra un eje formado por dos segmentos con secciones circulares macizas de 2 in y 3 in de diámetro. El eje se encuentra empotrado en ambos extremos y está sometido a un torque $T = 10\,\text{kip}\cdot\text{in}$.

1. Determine el esfuerzo máximo de corte en cada segmento del eje. Use $G = 12 \times 10^6$ psi para el acero y $G = 4 \times 10^6$ psi para el aluminio.



Consideremos un tubo de pared delgada ($\frac{R}{t} > 10$) sometido a un torque T, como muestra la figura. La sección es constante al lo largo del tubo pero el espesor t podría variar a largo de la sección.

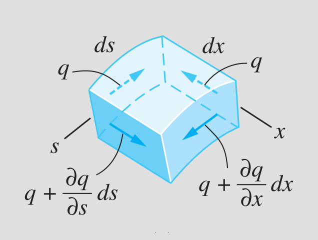


Si el espesor t es pequeño comparado con las dimensiones de la sección, el esfuerzo cortante τ inducido por la torsión puede considerarse constante a través del espesor de la pared del tubo y tangente a la superficie media.

La superficie que se encuentra entre la superficie exterior e interior del tubo se denomina superficie media.

Podemos definir el flujo de cortante, como la fuerza de cortante por unidad de longitud como:

$$q = \tau\, t$$



Los términos $\partial q/\partial x\, dx$ y $\partial q/\partial s\, ds$ representan los cambios sobre las distancias dx y ds.

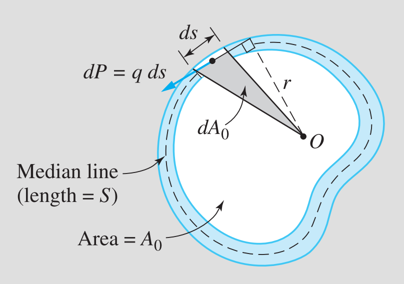
Se puede demostrar que el flujo es constante a través del tubo. Supongamos que q varía en función de la dirección longitudinal x y la dirección circunferencial s. La fuerza actuando en cada cara estaría dada por:

$$\left(q + \frac{\partial q}{\partial s} ds\right) dx - q\, dx = 0, \tag{1}$$

$$\left(q + \frac{\partial q}{\partial x} dx\right) ds - q\, ds = 0, \tag{2}$$

lo que conduce a $\partial q/\partial s = \partial q/\partial x = 0$.

La fuerza de cortante actuando en una longitud infinitesimal ds de la superficie media es $dP = q\,ds$. El momento que produce esta fuerza alrededor del punto O es $r\,dP = q\,ds\,r$.



Por equilibrio, la suma de todos los momentos debe ser igual al torque aplicado

$$T = \int_S q\,r\,ds = q\int_S r\,ds$$

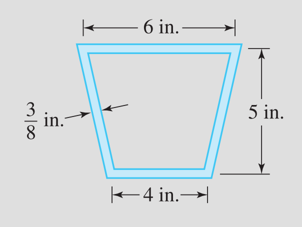
De la figura podemos deducir que $r\,ds = 2\,dA_0$, por tanto $\int_S r\,ds = 2A_0$.

Puesto que $\int_S r\,ds = 2A_0$, donde A_0 es el área encerrada por la linea media, se obtiene:

$$T = 2A_0 q \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{T}{2A_0 t}$$

Considere un tubo de sección transversal como se muestra en la figura y con espesor constante de $t = \frac{3}{8}$ in.

1. Si el tubo está sometido a un torque $T = 67{,}5\,\text{klb}\cdot\text{in}$, calcule el esfuerzo de corte máximo en la sección. Desprecie la concentración de esfuerzos en las esquinas.

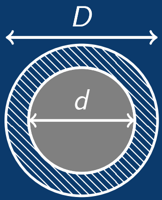


Torsión
Ejemplo

Considere un tubo hueco sometido a un torque T.

1. Determine cuando las siguientes expresiones para calcular el esfuerzo cortante en la sección son equivalentes o similares. En otras palabra, cuando se puede considerar como tubo de pared delgada.

Sección hueca

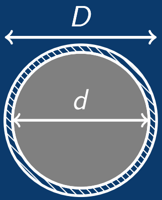


$$J = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2}$$

$$J = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

$$\tau = \frac{T\,\rho}{J}$$

Tubo de pared delgada



$$t = \frac{D - d}{2}$$

$$\tau = \frac{T}{2A_0 t}$$

- A. Pytel y J. Kiusalaas, *Mechanics of Materials*. Second Edition, 2010.
- A. Pytel y F.L.Singer, *Resistencia de Materiales*. Cuarta Edición, 2009.
- R. C. Hibbeler, *Mecánica de Materiales*. Octava Edición, 2011.

C15153
Resistencia de Materiales
Torsión

Roberto Ortega, PhD