

# ECUACIONES DIFERENCIALES

Se llamará ecuación diferencial a aquella ecuación que contiene una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o mas variables independientes.

Muchos problemas en ingeniería mecánica son modelados mediante una formulación diferencial, a saber:

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Dinámica de partículas y cuerpos rígidos

$$C = \frac{d^2 T}{dx^2}$$

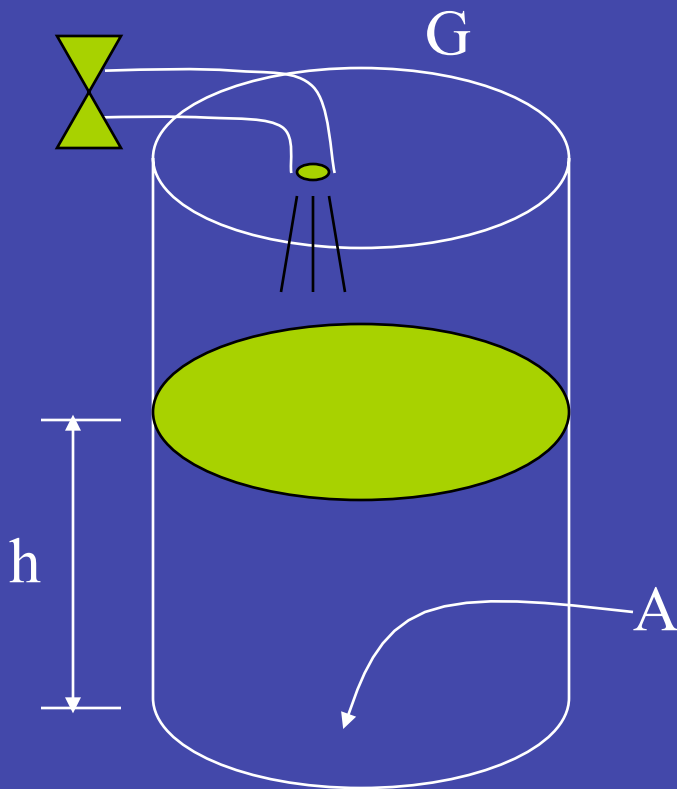
Conducción de calor

$$Q = c \frac{d^2 u}{dt^2}$$

Distribución de velocidad en un ducto

Ejemplo:

Se desea conocer cómo varía la altura  $h$  del nivel en un tanque cilíndrico de área seccional  $A$ , cuando se llena de un líquido de densidad  $\rho$  kg/m<sup>3</sup> a razón de  $G$  l/min.



Acumulación = Entrada - Salida

Salida = 0

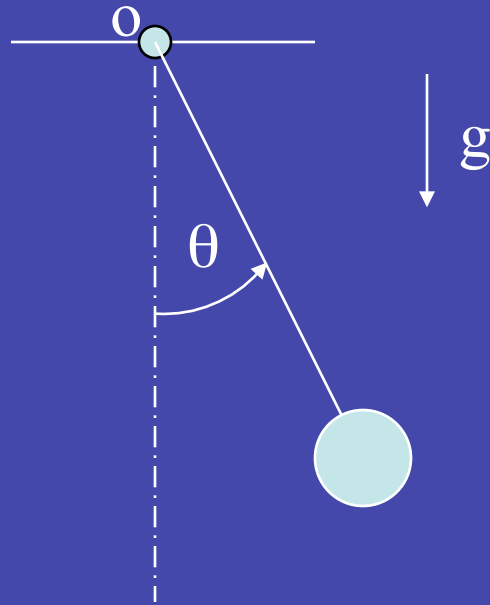
$$\frac{d(V\rho)}{dt} = G\rho$$

Continuidad

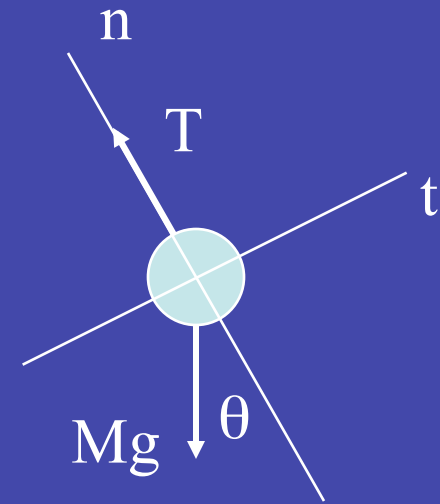
$$V = Ah$$

$$A \frac{dh}{dt} = G$$

Ejemplo:  
Movimiento péndulo pequeñas oscilaciones



$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= M\vec{a} \\ \sum F_n &= Ma_n & a_n &= l\dot{\theta}^2 \\ \sum F_t &= Ma_t & a_t &= l\ddot{\theta} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} T - Mg \cos\theta &= Ml\dot{\theta}^2 \\ - Mg \sin\theta &= Ml\ddot{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{l}{g} \sin\theta &= 0 \\ \theta \rightarrow 0 \Rightarrow \sin\theta &\approx \theta \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{l}{g} \theta = 0$$

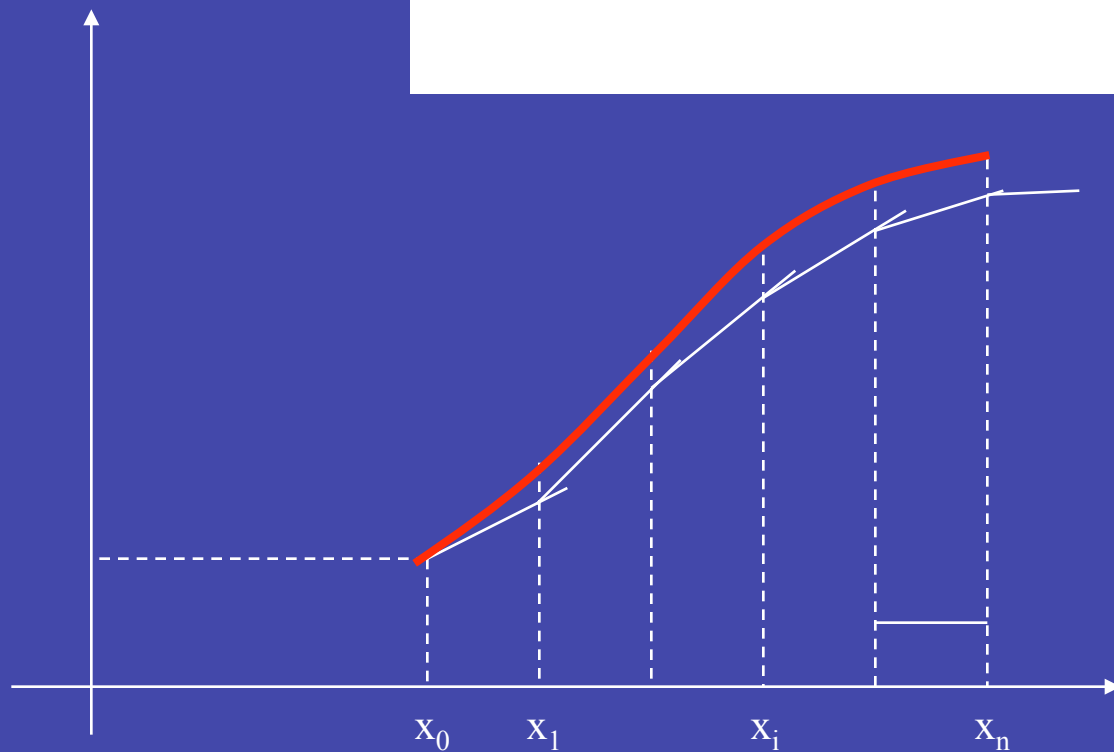
## Método de Euler

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \approx f(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad h = x_i - x_{i-1}$$

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$



## Runge-Kutta de 4° orden

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

Ejemplo:

Llenado de recipiente cilíndrico con abertura de válvula variable

$$A \frac{dH}{dt} = G$$

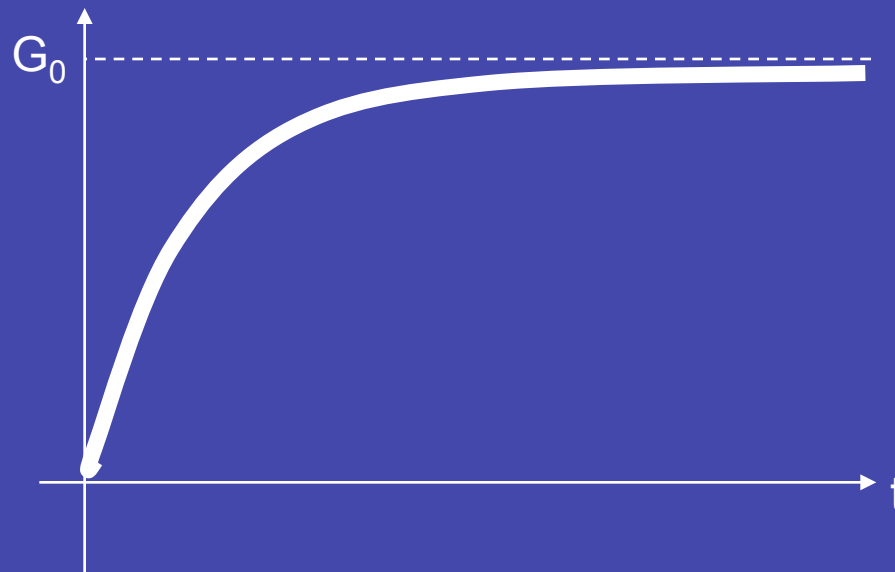
$$G = G_0(1 - e^{-t})$$

$$A = 1.0 \text{ m}^2 \quad G_0 = 1.0 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{G_0(1 - e^{-t})}{A}$$

$$\frac{dH}{dt} = 1 - e^{-t}$$

Condición inicial  $H(t_0) = H_0$   
 $H(0) = 0$



Solución:

Euler:

$$H_n = H_{n-1} + h(1 - e^{-t_{n-1}})$$

Solución en Excel

Microsoft Excel - EcuacionesDiferenciales

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?

Escriba una pregunta

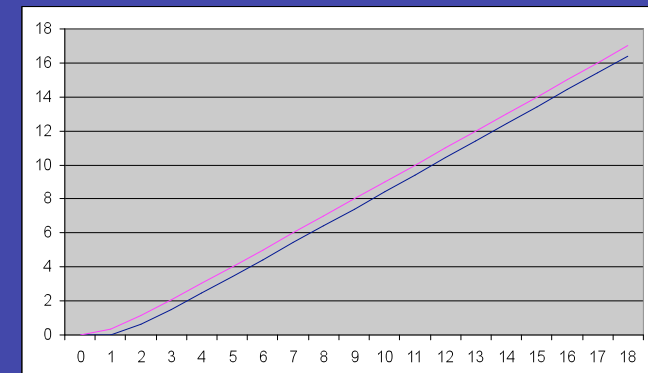
Arial 10

J5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$H_n = H_{n-1} + h(1 - e^{-t_{n-1}})$								
2									
3									
4	Paso Tiempo	1		Tiempo Inicial	0		Tiempo final	5	
5									
6	Tiempo	Altura EULER		K1	K2	K3	K4	RUNGE KUTTA	
7	0	0		0	0,39346934	0,39346934	0,63212056	0	
8	1	0		0,632120559	0,77686984	0,77686984	0,86466472	0,36766632	
9	2	0,632120559		0,864664717	0,917915	0,917915	0,95021293	1,135043759	
10	3	1,496785276		0,950212932	0,96980262	0,96980262	0,98168436	2,049466701	
11	4	2,446998207		0,981684361	0,988891	0,988891	0,99326205	3,017984661	
12	5	3,428682568		0,993262053	0,99591323	0,99591323	0,99752125	4,006403066	
13	6	4,421944621		0,997521248	0,99849656	0,99849656	0,99908812	5,002142435	
14	7	5,419465869		0,999088118	0,99944692	0,99944692	0,99966454	6,000575037	
15	8	6,418553987		0,999664537	0,99979653	0,99979653	0,99987659	6,999998423	
16	9	7,418218525		0,99987659	0,99992515	0,99992515	0,9999546	7,999786299	
17	10	8,418095115		0,9999546	0,99997246	0,99997246	0,9999833	8,999708263	
18	11	9,418049715		0,999983298	0,99998987	0,99998987	0,99999386	9,999679555	
19	12	10,41803301		0,999993856	0,99999627	0,99999627	0,99999774	10,99966899	
20	13	11,41802687		0,99999774	0,99999863	0,99999863	0,99999917	11,99966511	
21	14	12,41802461		0,999999168	0,9999995	0,9999995	0,99999969	12,99966368	
22	15	13,41802378		0,999999694	0,99999981	0,99999981	0,99999989	13,99966315	
23	16	14,41802347		0,999999887	0,99999993	0,99999993	0,99999996	14,99966296	
24	17	15,41802336		0,999999959	0,99999997	0,99999997	0,99999998	15,99966289	
25	18	16,41802332		0,999999985	0,99999999	0,99999999	0,99999999	16,99966286	

Hoja1 / Hoja2 / Hoja3 /

Inicio Microsoft Excel - Ecu... Microsoft Office P... Bandeja de entrada ... ES 12:13



## Ejemplo ecuaciones de 2º Orden

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{l}{g}\theta = 0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \phi$$

$$\frac{d\phi}{dt} + \frac{l}{g}\theta = 0$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{l}{g}\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = F(\theta, \phi, t) \quad \rightarrow F(\theta, \phi, t) = \phi$$

$$\frac{d\phi}{dt} = G(\theta, \phi, t) \quad \rightarrow G(\theta, \phi, t) = -\frac{l}{g}\theta$$

Solución Euler:

$$l = 1.0 \text{ m}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\theta_n = \theta_{n-1} + hF(t_{n-1}, \theta_{n-1}, \phi_{n-1}) = \theta_{n-1} + h\phi_{n-1}$$

$$\phi_n = \phi_{n-1} + hG(t_{n-1}, \theta_{n-1}, \phi_{n-1}) = \phi_{n-1} - h\frac{l}{g}\theta_n$$

[Solucion](#)

