SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots\cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}
$$

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

Métodos Exactos

Métodos Aproximados

Métodos Exactos
Sistemas fáciles de resolver

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$(i=1,2,3,\dots,n)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

Sustitución progresiva

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right) \Big/ a_{ii}$$

$(i=1,2,3,\dots,n)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ b_n \end{Bmatrix}$$

Sustitución regresiva

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{i-1} a_{ij} x_j \right) \Big/ a_{ii}$$

$(i=n,n-1,\dots\dots,1)$

Descomposición LDU

$$[A]\{x\}=\{b\} \qquad sea \qquad [A]=[L][U]$$

$$[L]=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad [U]=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[A]\{x\}=\{b\} \quad \Rightarrow \quad [L][U]\{x\}=\{b\}$$

$$sea \quad \{z\}=[U]\{x\} \quad \Rightarrow \quad [L]\{z\}=\{b\}$$

$[L]\{z\}=\{b\}$ Sustitución progresiva

$[U]\{x\}=\{z\}$ Sustitución regresiva

¿Cómo descomponer A en LU?

$$[A]=[L][U]$$

$$[L]=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad [U]=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

La descomposición no es única y valores para u_{ii} o l_{ii} deben ser especificados, para nuestro caso se puede tomar u_{ii} =1.0 ó l_{ii} = 1.0 al multiplicar ambas matrices tenemos:

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{n} l_{is} u_{sj} = \sum_{s=1}^{\min(i,j)} l_{is} u_{sj}$$

donde nos hemos valido del hecho de que $l_{is}=0$ para $s>i$ y $u_{sj}=0$ para $s>j$.

$$[A]=[L][U]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Si L triangular inferior y l_{ii} =1 Doolittle Si U triangular superior y u_{ii} =1 Crout

Tomemos u_{ii} =1

$$a_{11} = l_{11}u_{11} \Rightarrow l_{11} = \frac{a_{11}}{u_{11}}$$

$$a_{21} = l_{21}u_{11} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$

$$a_{31} = l_{31}u_{11} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$

$$\vdots$$

$$a_{n1} = l_{n1}u_{11} \Rightarrow l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{11}}$$

$$a_{12} = l_{11}u_{12} \Rightarrow u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$$

$$a_{22} = l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} \Rightarrow l_{22} = \frac{a_{22} - l_{21}u_{12}}{u_{22}}$$

$$a_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}}$$

$$\vdots$$

$$a_{n2} = l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} \Rightarrow l_{n2} = \frac{a_{n2} - l_{n1}u_{12}}{u_{22}}$$

• • •

Eliminación Gaussiana

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \\ B_n \end{Bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{Bmatrix}$$

Multiplicando la primera fila por 12/6 y restamos a la segunda, después multiplicamos la primera fila por 3/6 y la resto a la tercera fila y finalmente multiplico la primera fila por -6/6 y la restamos a la cuarta fila se tiene

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{Bmatrix}$$

Multiplicando la segunda fila por -12/-4 y restamos a la tercera, finalmente multiplicamos la segunda fila por 2/-4 y la resto a la cuarta fila

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{Bmatrix}$$

Multiplicando la tercera fila por 4/2 y restamos a la última fila

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

Haciendo una sustitución Regresiva se tiene

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Gauss-Jordan

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots\cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} b_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix}
$$

Prosiguiendo con el ejemplo anterior partiendo de:

$$
\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{Bmatrix}
$$

Multiplicando la última fila por 4/-3 y restamos a la primera fila, seguido multiplicamos la última fila por 2/-3 y restamos a la segunda fila y finalmente la última fila se multiplica por -5/-3 se tiene

$$
\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \\ -3 \end{Bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

Multiplicando la tercera fila por 2/2 y restamos a la primera fila, seguido multiplicamos la tercera fila por 2/2 y restamos a la segunda fila se tiene

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 12 \\ -4 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 12 \\ -4 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

Multiplicando la segunda fila por -2/-4 y restamos a la primera fila, se tiene

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 12 \\ -4 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

Despejando se tiene

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Principales problemas

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Donde ε es un número pequeño pero distinto de cero

Aplicando eliminación Gaussiana

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2-\varepsilon^{-1} \end{Bmatrix} \qquad x_2 = \frac{2-\varepsilon^{-1}}{1-\varepsilon^{-1}} \qquad x_1 = (1-x_2)\varepsilon^{-1}$$

Si ε es muy pequeño tenemos que al evaluarla computacionalmente

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Cuando la solución real es

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{1-\varepsilon} \\ \dfrac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

METODOS ITERATIVOS

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots\cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^i &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{i-1} - a_{13}x_3^{i-1} - \cdots\cdots - a_{1n}x_n^{i-1}\right] \\
x_2^i &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{i-1} - a_{23}x_3^{i-1} - \cdots\cdots - a_{2n}x_n^{i-1}\right] \\
x_3^i &= \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{i-1} - a_{32}x_2^{i-1} - \cdots\cdots - a_{3n}x_n^{i-1}\right] \\
&\vdots \\
x_n^i &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{i-1} - a_{n2}x_2^{i-1} - \cdots\cdots - a_{(n-1)n}x_{n-1}^{i-1}\right]
\end{aligned}
$$

El vector x_j^i $\quad j-\text{esimavariable} \quad i-\text{esimaiteración}$
puede tomar valores arbitrarios, si tomamos como vector inicial el vector nulo estamos en presencia del método de Jacobi

Convergencia Local

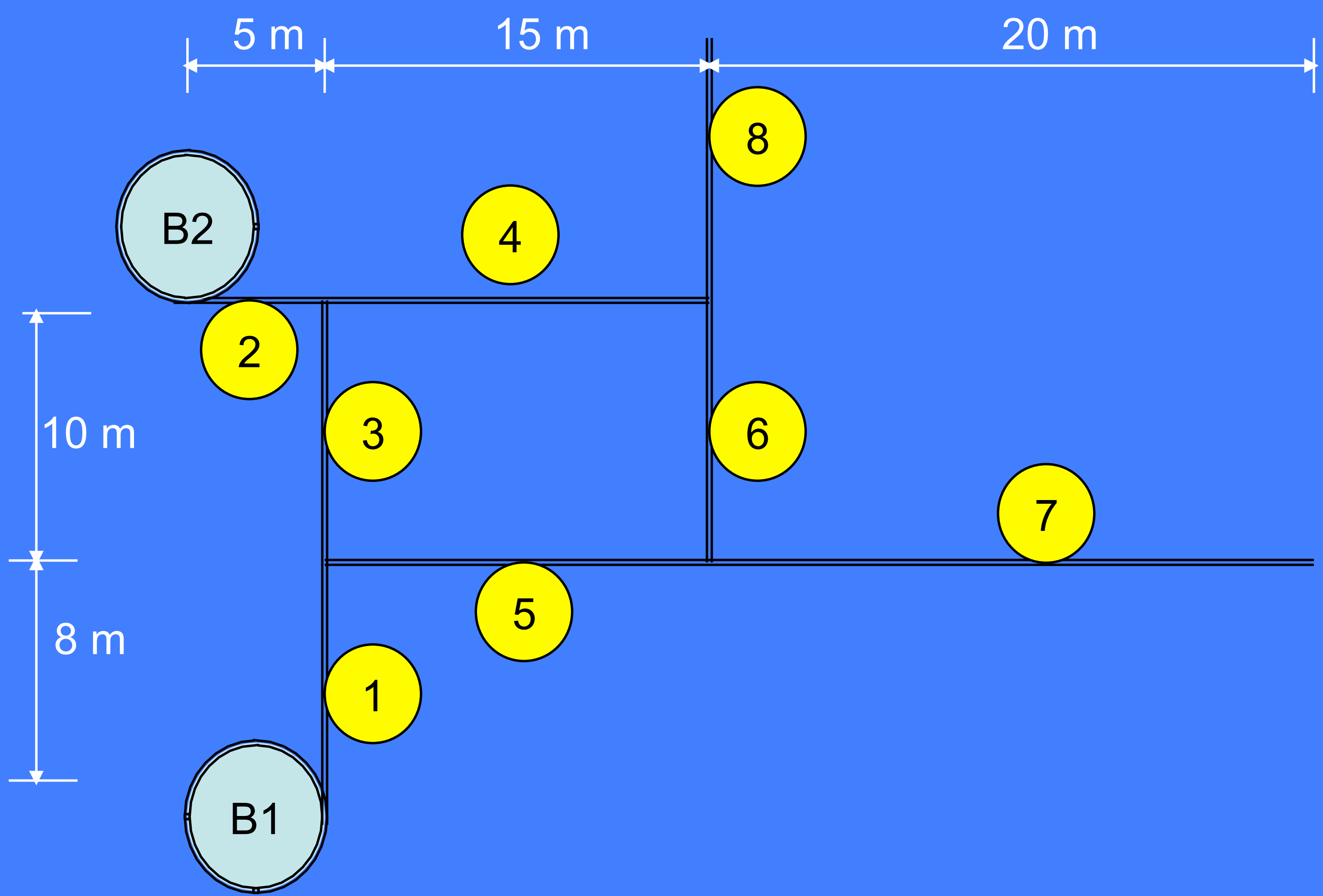
$$\left| x_j^i - x_j^{i-1} \right| \leq \varepsilon$$

Convergencia Global

$$\left\| x_j^i - x_j^{i-1} \right\| \leq \varepsilon$$

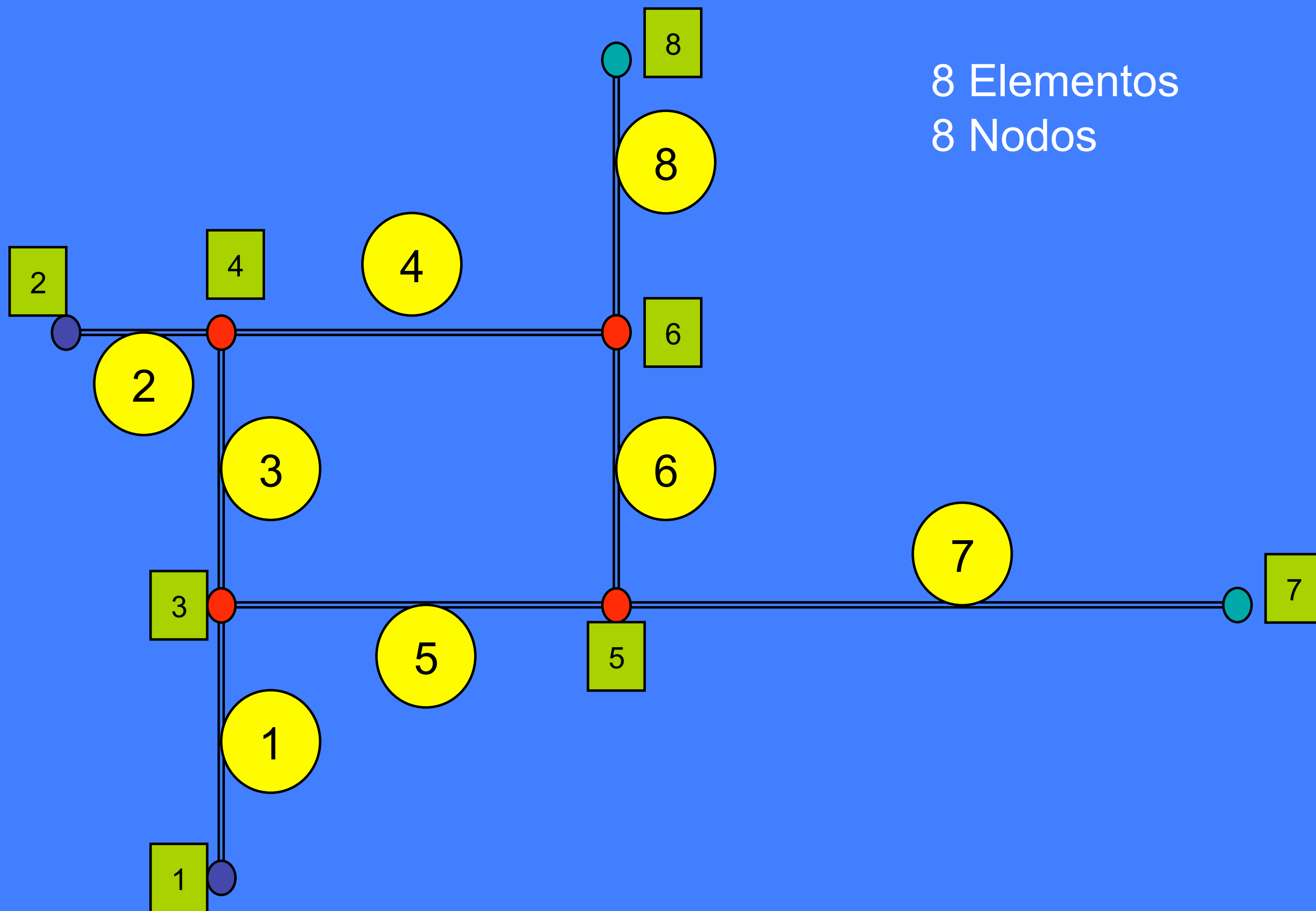
Ejemplo:

Se tiene una red de tuberías interconectadas como muestra la figura. Determine el flujo de salida en la tubería 7 y en la 8, el caudal de entrada en la tubería 1 es de 5 m^3/s y en la tubería 2 un caudal de 10 m^3/s. Todas las tuberías tienen igual diámetro de 500 mm



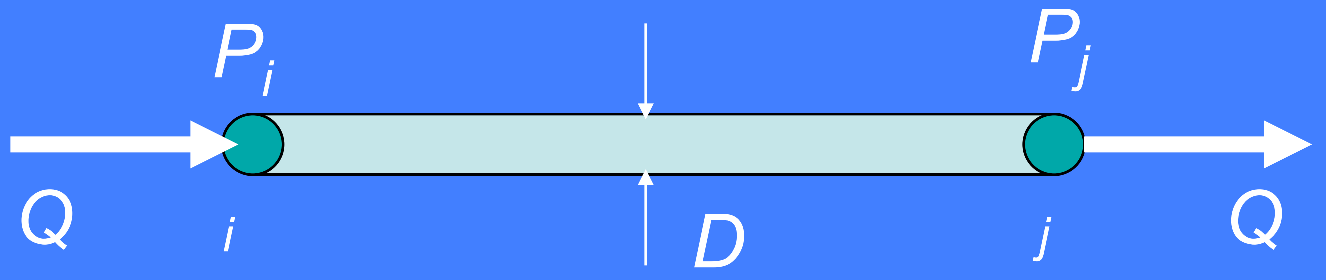
Solución

8 Elementos
8 Nodos



$$Q_q = C_q(P_i - P_j)$$

$$C_q = \frac{\pi D^4}{128 L\mu}$$



$$Q_1 = C_1(P_1 - P_3) \qquad Q_2 = C_2(P_2 - P_4)$$

$$Q_3 = C_3(P_3 - P_4) \qquad Q_4 = C_4(P_4 - P_6)$$

$$Q_5 = C_5(P_3 - P_5) \qquad Q_6 = C_6(P_5 - P_6)$$

$$Q_7 = C_7(P_5 - P_7) \qquad Q_8 = C_8(P_6 - P_8)$$

Se aplica ecuaciones de continuidad en cada nodo:

$$Q_1 - Q_{entrada1} = 0$$
$$Q_2 - Q_{entrada2} = 0$$
$$Q_1 - Q_3 - Q_5 = 0$$
$$Q_2 + Q_3 - Q_4 = 0$$
$$Q_5 - Q_6 - Q_7 = 0$$
$$Q_4 + Q_6 - Q_8 = 0$$
$$Q_7 - Q_{salida1} = 0$$
$$Q_8 - Q_{salida2} = 0$$

$$Q_{entrada1} = C_1(P_1 - P_3)$$
$$Q_{entrada2} = C_2(P_2 - P_4)$$
$$0 = C_1(P_1 - P_3) - C_3(P_3 - P_4) - C_5(P_3 - P_5)$$
$$0 = C_2(P_2 - P_4) + C_3(P_3 - P_4) - C_4(P_4 - P_6)$$
$$0 = C_5(P_3 - P_5) - C_6(P_5 - P_6) - C_7(P_5 - P_7)$$
$$0 = C_4(P_4 - P_6) + C_6(P_5 - P_6) - C_8(P_6 - P_8)$$
$$Q_{salida1} = C_7(P_5 - P_7)$$
$$Q_{salida2} = C_8(P_6 - P_8)$$

$$
\begin{Bmatrix} Q_{entrada1} \\ Q_{entrada2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_{salida1} \\ Q_{salida2} \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
C_1 & 0 & -C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & C_2 & 0 & -C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-C_1 & 0 & C_1 + C_3 + C_5 & -C_3 & -C_5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -C_2 & -C_3 & C_2 + C_3 + C_4 & 0 & -C_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -C_5 & 0 & C_5 + C_6 + C_7 & -C_6 & -C_7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -C_4 & -C_6 & C_4 + C_6 + C_8 & 0 & -C_8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -C_7 & 0 & C_7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_8 & 0 & C_8
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{Bmatrix}
$$

Observe que Q_1 y Q_2 es conocido pues son datos de entrada, como las tuberías son todas del mismo diámetro los coeficientes C_q solo dependen de la longitud, si consideramos agua, la viscosidad es de 0.001 Pa.s

Observe además que el sistema de ecuaciones posee incógnitas en el vector lado derecho, en este caso los caudales de salida.

Demostraremos a continuación que es posible resolver este sistema de cauciones sin problema.

Es posible escribir cualquier sistema de ecuaciones lineales de la forma siguiente

$$\begin{bmatrix} [K_{\alpha\alpha}] & [K_{\alpha\beta}] \\ [K_{\beta\alpha}] & [K_{\beta\beta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x_\alpha\} \\ \{x_\beta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{b_\alpha\} \\ \{b_\beta\} \end{Bmatrix}$$

$\{x_\alpha\}$	**Incógnitas**
$\{x_\beta\}$	**datos**
$\{b_\alpha\}$	**datos**
$\{b_\beta\}$	**Incógnitas**

Ejemplo se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \\ 9 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ 3 \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ s \\ 6 \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ s \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ \{3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \end{Bmatrix} \\ \{s\} \end{Bmatrix}$$

$$[K_{\alpha\alpha}]\{x_\alpha\} + [K_{\alpha\beta}]\{x_\beta\} = \{b_\alpha\} \qquad [K_{\alpha\alpha}]\{x_\alpha\} = \{b_\alpha\} - [K_{\alpha\beta}]\{x_\beta\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \{3\} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \end{Bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \{3\}$$

$$\{x_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}]^{-1}\left\{\{b_\alpha\} - [K_{\alpha\beta}]\{x_\beta\}\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \{3\} \right\} = \begin{Bmatrix} -1.692 \\ 0.230 \end{Bmatrix}$$

$$\{b_\beta\} = [K_{\beta\alpha}]\{x_\alpha\} + [K_{\beta\beta}]\{x_\beta\}$$

$$\{s\} = [3 \quad 8] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \{3\} \right\} + [2]\{3\} = 2.769$$

Volvemos al problema de las tuberías:

$$
\begin{Bmatrix} Q_{entrada1} \\ Q_{entrada2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_{salida1} \\ Q_{salida2} \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
C_1 & 0 & -C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & C_2 & 0 & -C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-C_1 & 0 & C_1+C_3+C_5 & -C_3 & -C_5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -C_2 & -C_3 & C_2+C_3+C_4 & 0 & -C_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -C_5 & 0 & C_5+C_6+C_7 & -C_6 & -C_7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -C_4 & -C_6 & C_4+C_6+C_8 & 0 & -C_8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -C_7 & 0 & C_7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_8 & 0 & C_8
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{Bmatrix}
$$

C1=0,25566406

C2=0,30679688

C3=0,15339844

C4=0,10226563

C5=0,10226563

C6=0,15339844

C7=0,07669922

C8=0,15339844

$$
\begin{Bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_{salida1} \\ Q_{salida2} \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
0.2556 & 0 & -0.2556 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.3068 & 0 & -0.3068 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.2556 & 0 & 0.5113 & -0.1534 & -0.1023 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.3068 & -0.1534 & 0.5624 & 0 & -0.1023 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.1023 & 0 & 0.3324 & -0.1534 & -0.0767 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.1023 & -0.1534 & 0.4090 & 0 & -0.1534 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.0767 & 0 & 0.0767 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1534 & 0 & 0.1534
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

P1	**187,5**
P2	**149,3**
P3	**148,4**
P4	**133,0**
P5	**73,8**
P6	**60,9**

Q7	**=**	**5,65789474**
Q8	**=**	**9,34210526**