Diseño Computarizado

Laboratorio - Método de la rigidez

Claudio García Herrera
Matías Inostroza Inostroza

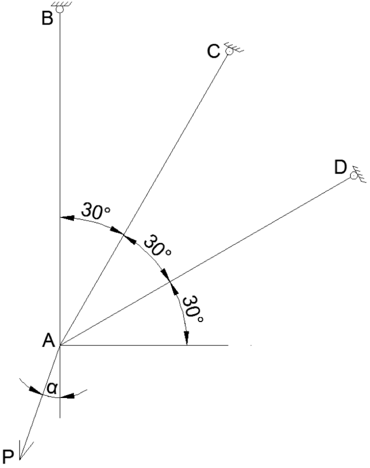
Universidad de Santiago de Chile (USACH)
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica
Av. Bdo. O'Higgins 3363 - Santiago - CHILE
Correo: matias.inostroza.i@usach.cl claudio.garcia@usach.cl
Laboratorio de biomecánica y biomateriales

Método de la rigidez

Problema 1

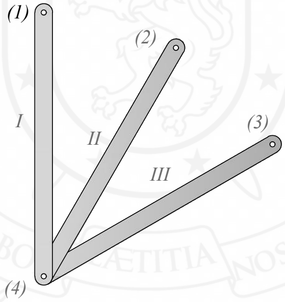
La estructura de la Figura 1 soporta una carga de magnitud P=1000 N. Las longitudes de todas las barras son iguales y están hechas del mismo material. El área de la sección de la barra es de $100mm^2$ y su largo es de $0.5m$. Además, están fabricadas de acero A36:

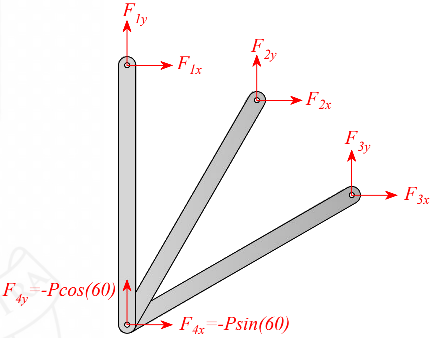
- Desplazamiento vertical y horizontal del punto de aplicación de la fuerza, si esta se aplica a un ángulo $\alpha = 60^o$.
- Reacciones en los pasadores

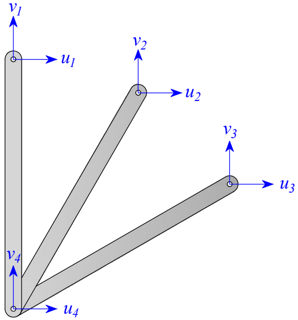


Método de la rigidez

Identificación de nodos y elementos







Matriz de rigidez barra I

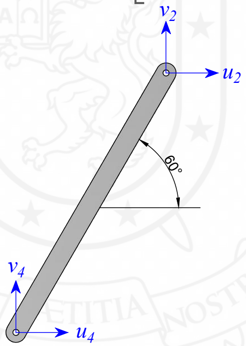
$$K_1^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \cos^2(90) & \cos(90)\sin(90) & -\cos^2(90) & -\cos(90)\sin(90) \\ & \sin^2(90) & -\cos(90)\sin(90) & -\sin^2(90) \\ & & \cos^2(90) & \cos(90)\sin(90) \\ & sim. & & \sin^2(90) \end{bmatrix}$$

$$K_1^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_4^I \\ V_4^I \\ U_1^I \\ V_1^I \end{bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez barra II

$$K_2^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \cos^2(60) & \cos(60)\sin(60) & -\cos^2(60) & -\cos(60)\sin(60) \\ & \sin^2(60) & -\cos(60)\sin(60) & -\sin^2(60) \\ & & \cos^2(60) & \cos(60)\sin(60) \\ & sim. & & \sin^2(60) \end{bmatrix}$$

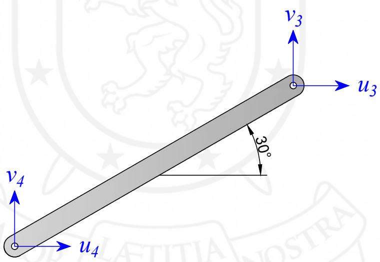


$$K_2^e = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_4^{II} \\ V_4^{II} \\ U_2^{II} \\ V_2^{II} \end{bmatrix} = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez barra III

$$K_3^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \cos^2(30) & \cos(30)\sin(30) & -\cos^2(30) & -\cos(30)\sin(30) \\ & \sin^2(30) & -\cos(30)\sin(30) & -\sin^2(30) \\ & & \cos^2(30) & \cos(30)\sin(30) \\ & sim. & & \sin^2(30) \end{bmatrix}$$



$$K_3^e = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & -1 \\ -3 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_4^{III} \\ V_4^{III} \\ U_3^{III} \\ V_3^{III} \end{bmatrix} = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & -1 \\ -3 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Ensamblaje de la matriz global: K_1^e

$$
K_1^e = \frac{EA}{4L}\begin{array}{cc}
\begin{matrix} u_4 & v_4 & u_1 & v_1 \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_4 \\ v_4 \\ u_1 \\ v_1 \end{matrix}
\end{array}
$$

$$
K_2^e = \frac{EA}{4L}\begin{array}{cc}
\begin{matrix} u_4 & v_4 & u_2 & v_2 \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}
\end{array}
$$

$$
K_3^e = \frac{EA}{4L}\begin{array}{cc}
\begin{matrix} u_4 & v_4 & u_3 & v_3 \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & -1 \\ -3 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_4 \\ v_4 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix}
\end{array}
$$

$$
K_g = \frac{EA}{4L}\begin{array}{cc}
\begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4
\end{bmatrix} & \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix}
\end{array}
$$

Ensamblaje de la matriz global: K_2^e

$$K_1^e = \frac{EA}{4L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_4 & v_4 & u_1 & v_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_4 \\ v_4 \\ u_1 \\ v_1 \end{array}$$

$$K_2^e = \frac{EA}{4L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_4 & v_4 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{array}$$

$$K_3^e = \frac{EA}{4L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_4 & v_4 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & -1 \\ -3 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_4 \\ v_4 \\ u_3 \\ v_3 \end{array}$$

$$K_g = \frac{EA}{4L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -4 & -\sqrt{3} & -3 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 4+3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}$$

Ensamblaje de la matriz global: K_3^e

$$K_1^e = \frac{EA}{4L}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_4 & v_4 & u_1 & v_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_4 \\ v_4 \\ u_1 \\ v_1 \end{array}$$

$$K_2^e = \frac{EA}{4L}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_4 & v_4 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{array}$$

$$K_3^e = \frac{EA}{4L}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_4 & v_4 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & -1 \\ -3 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_4 \\ v_4 \\ u_3 \\ v_3 \end{array}$$

$$K_g = \frac{EA}{4L}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 1+3 & \sqrt{3}+\sqrt{3} \\ 0 & -4 & -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3}+\sqrt{3} & 4+3+1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}$$

Matriz global ensamblada

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

$$
K_g = \frac{EA}{4L}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\
0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\
0 & 0 & \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & -1 \\
0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 4 & 2\sqrt{3} \\
0 & -4 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & -1 & 2\sqrt{3} & 8
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}
$$

Método de la rigidez

$$\frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 4 & 2\sqrt{3} \\ 0 & -4 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & -1 & 2\sqrt{3} & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix}$$

GDL ordenados

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
USACH

$$\frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ 0 & -4 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \\ -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 \\ -3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix}$$

Ordenamiento de tipo:

$$\begin{bmatrix} [K_{aa}] & [K_{ab}] \\ [K_{ba}] & [K_{bb}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \end{bmatrix}$$

GDL ordenados

$$
\frac{EA}{4L}
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 4 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 8 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} \\ 0 & -4 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \\ -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 \\ -3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -P\sin(60) \\ -P\cos(60) \\ F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix}
$$

Resultados

$$\frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 4 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P\sin(60) \\ -P\cos(60) \end{bmatrix}$$

$$u_4 = -0.024mm$$
$$v_4 = 0.0047mm$$

Ya que todos los desplazamientos de las fuerzas desconocidas son 0, entonces:

$$\frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \\ -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 \\ -3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_{1x} = 0 \\ F_{1y} = -200 \\ F_{2x} = 173.2 \\ F_{2y} = 300 \\ F_{3x} = 692.8 \\ F_{3y} = 400 \end{bmatrix} N$$

Diseño Computarizado

Laboratorio - Método de la rigidez

Claudio García Herrera
Matías Inostroza Inostroza

Universidad de Santiago de Chile (USACH)
Facultad de Ingeniería - Departamento de Ingeniería Mecánica
Av. Bdo. O'Higgins 3363 - Santiago - CHILE
Correo: matias.inostroza.i@usach.cl claudio.garcia@usach.cl
Laboratorio de biomecánica y biomateriales