Unidad
Resistencia de Materiales

Curso
“Resistencia de Materiales Aplicada”

AÑO 2011

A P U N T E S

DIMEC

MÓDULO II: TORSIÓN

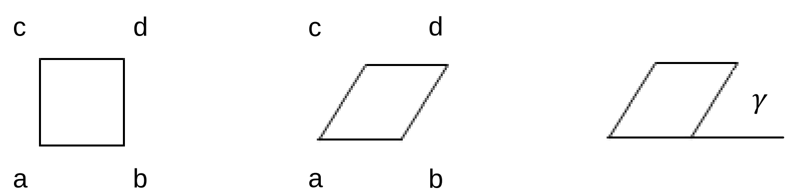
INTRODUCCION E HIPOTESIS FUNDAMENTALES

1. Hipótesis Fundamentales

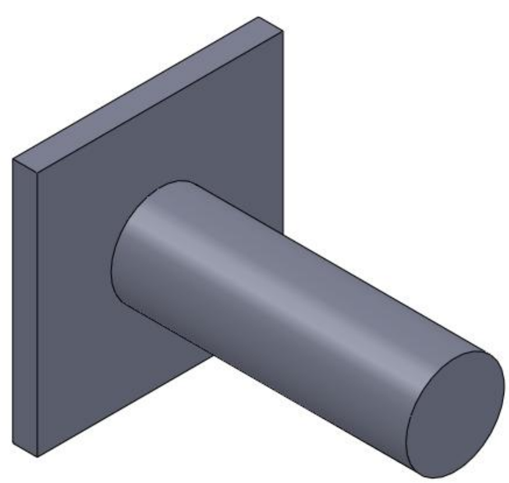
En el desarrollo de la teoría de Torsión, se aplica una serie de suposiciones que permite simplificar el problema en gran medida, logrando obtener soluciones analíticas simples, las hipótesis utilizadas se mencionan a continuación:

- Las secciones circulares permanecen circulares después de la torsión.
- Las secciones planas permanecen planas y no se alabean.
- El eje macizo se encuentra sometido a pares de torsión perpendiculares al eje.
- Los esfuerzos no sobrepasan el límite de proporcionalidad.
- En árboles circulares, el esfuerzo no se distribuye de forma uniforme en una sección.

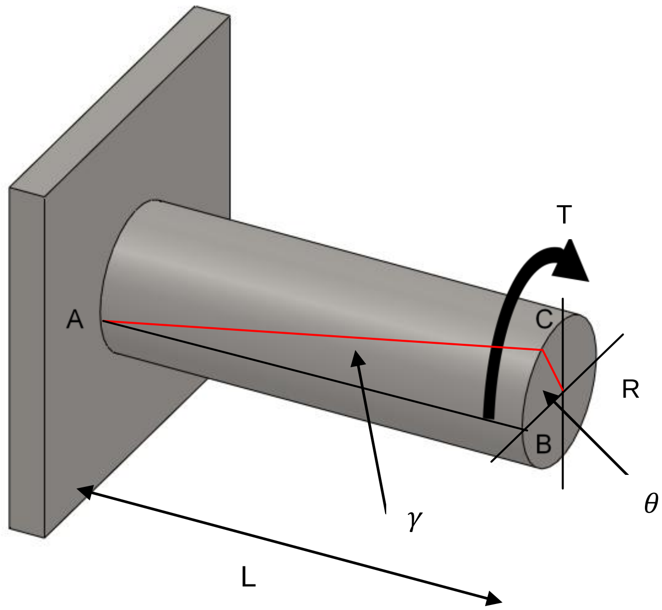
Cuando existe torsión sobre un elemento, provoca un cambio de forma, pero no de longitud. Este cambio de forma se cuantifica mediante el ángulo gama, o ángulo de distorsión.

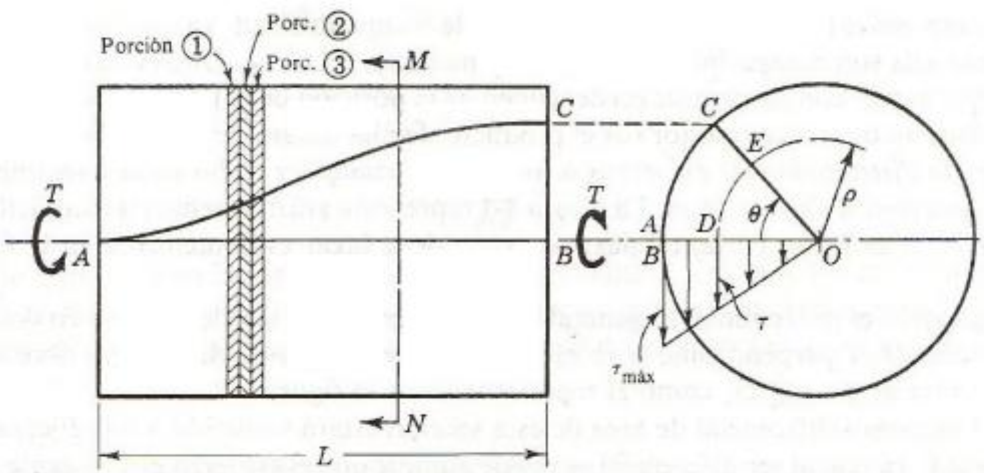


El ángulo de distorsión, depende del momento torsor aplicado, la geometría del eje circular (la longitud de la barra y el momento polar de inercia de la sección transversal de la misma) y del material del cual sea elaborado (módulo de rigidez cortante).



DEDUCCION DE LAS FORMULAS DE TORSION





Si se considera una fibra a una distancia ρ del eje del árbol, la fibra girará un ángulo θ, considerando las suposiciones fundamentales expuestas anteriormente, se produce una deformación tangencial DE.

$$\delta_s = DE = \rho\theta$$

Haciendo las mismas consideraciones, se puede obtener la distorsión γ.

$$\gamma = \frac{\delta_s}{L} = \frac{\rho\theta}{L}$$

A continuación se aplica la ley de Hooke, para esfuerzos cortantes.

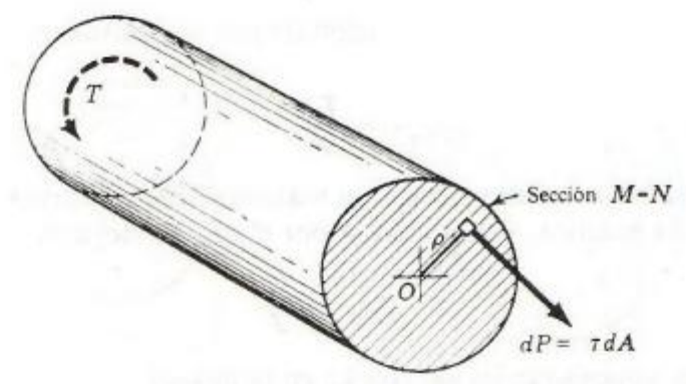
$$\tau = G\gamma = \left(\frac{G\theta}{L}\right)\rho$$

La expresión anterior se suele conocer como la ecuación de compatibilidad, ya que los esfuerzos expresados son compatibles con las deformaciones elásticas.

Un elemento diferencial de área de la sección MN, presenta una fuerza resistente dada por:

$$dP = \tau dA$$

Esta fuerza se opondrá al momento torsionante dado por T



Considerando equilibrio estático, se llega a la siguiente relación.

$$T = \int \rho dP = \int \rho(\tau dA)$$

Si se sustituye τ por el valor encontrado anteriormente, se llega a:

$$T = \frac{G\theta}{L}\int \rho^2\, dA$$

El momento polar de inercia se define como $\int \rho^2\, dA$, por lo que si se reemplaza en la ecuación anterior, se obtiene:

$$T = \frac{G\theta}{L}J$$

O de forma equivalente

$$\theta = \frac{TL}{GJ}$$

El esfuerzo cortante se logra obtener reemplazando el valor de Gθ/L en la ecuación hallada para la ley de Hooke.

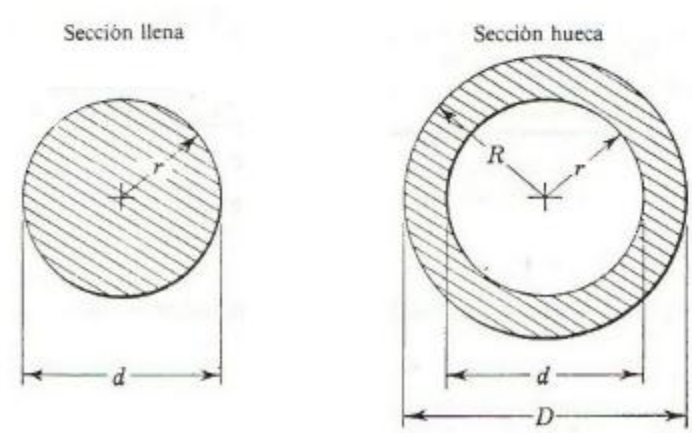
$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

El esfuerzo cortante máximo se obtiene cuando ρ, es decir el radio en el que se mide el esfuerzo, es igual al radio del eje.

$$\tau_{máx} = \frac{Tr}{J}$$

MOMENTO POLAR DE INERCIA

El momento de inercia de un área respecto al eje polar, momento polar de inercia J, es igual a la suma de los momentos de Inercia respecto a dos ejes perpendiculares entre sí, contenidos en el plano del área y que se intercepta en el eje polar.



Para la sección llena y la sección hueca, el momento de inercia se determina a través de las siguientes expresiones:

$$\text{Sección llena:} \qquad J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\text{Sección hueca:} \qquad J = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$$

TRANSMISION DE POTENCIA

En muchas aplicaciones los ejes se utilizan para transmitir potencia. La potencia transmitida se determina como el producto del par contante por la velocidad angular constante a la que gira el eje.

$$P = T\omega$$

La velocidad angular se mide en radianes en segundo. Si el eje gira a una frecuencia f, el par será:

$$P = T2\pi f$$

Por lo que el momento torsionante transmitido se puede expresar como:

$$T = \frac{P}{2\pi f}$$

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

1. Problema Nº1

Calcular el diámetro mínimo de un eje de acero que, sometido a un momento torsionante de 14 kN·m, no debe experimentar una deformación angular superior a 3º en una longitud de 6 m. ¿Cuál es entonces el esfuerzo cortante máximo que aparecerá en él? Usar G= 83 GN/m^2.

Solución:

De las fórmulas de torsión, se sabe que:

$$J = \frac{\pi}{32} d^4 \qquad y \qquad \theta = \frac{TL}{JG}$$

De la fórmula anterior dada para el momento polar de Inercia, es posible determinar el diámetro del eje. Reemplazando J de la fórmula del ángulo de torsión, se obtiene:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32TL}{\pi\theta G}} \rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{32(14 \cdot 10^3 N \cdot m)(6\,m)}{\pi\left(3\frac{\pi}{180}\right)\left(83 \cdot 10^9\,\frac{N}{m^2}\right)}} \rightarrow d = 0.118\,m$$

Para determinar el esfuerzo cortante máximo, se emplea la fórmula definida para corte por torsión, empleando el radio del eje.

$$\tau_{máx} = \frac{Tr}{J}$$

Reemplazando los datos del problema, se obtiene:

$$\tau_{máx} = \frac{Td}{2J} = \frac{(14 \cdot 10^3 N \cdot m)(0.118\,m)}{2\,\frac{\pi}{32}(0.118\,m)^4} = 43.4\,MPa$$

2. Problema Nº2

Un gran eje de transmisión para la hélice de un barco tiene que transmitir 4.5 MW a 3 rad/s sin que el esfuerzo cortante exceda de 50 MN/m^2 y sin que el ángulo de torsión sea superior a un grado en una longitud de 25 diámetros. Determinar el diámetro más apropiado si G= 83 GN/m^2.

Solución:

Se aplicara la fórmula para la potencia descrita en la revisión teórica.

$$T = \frac{P}{2\pi f}$$

Evaluando la fórmula para los datos disponibles, se obtiene el Par aplicado en la hélice.

$$T = \frac{4.5MW}{2\pi \cdot 3\,\frac{rad}{s}} = 0.238\ MN \cdot m$$

A partir de la fórmula de torsión, se determina el diámetro mínimo tal que el esfuerzo no supere el admisible.

$$\tau_{máx} = \frac{Tr}{J} \rightarrow \tau_{máx} = \frac{T}{\frac{\pi}{16}d^3} \rightarrow \frac{16T}{\pi d^3} \leq \tau_{máx}$$

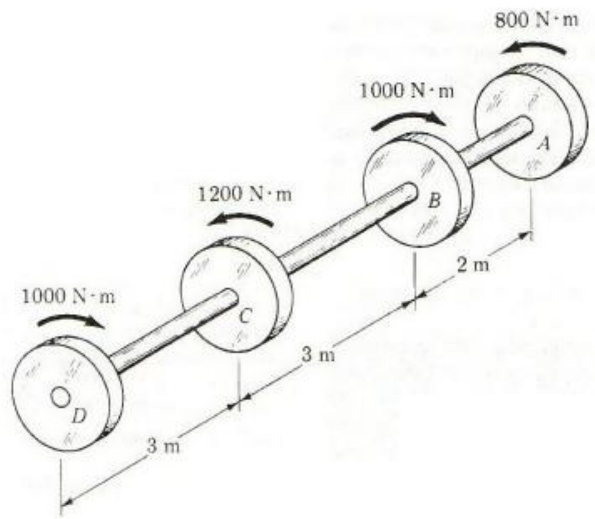
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16(0.238\ MN \cdot m)}{\pi \cdot 50 \cdot 10^3\ \frac{MN}{m^2}}} \rightarrow d \geq 0.289m$$

A continuación se determina el diámetro mínimo, tal que el ángulo de torsión no sobrepase el ángulo especificado.

$$\theta = \frac{32TL}{\pi d^4 G} \leq \frac{\pi}{180} \rightarrow \frac{32T \cdot 25d}{\pi d^4 G} \leq \frac{\pi}{180} \rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32T \cdot 180 \cdot 25}{\pi^2 G}} \rightarrow d \geq 0.347\ m$$

Por lo tanto se recomienda utilizar un diámetro superior a 347 mm.

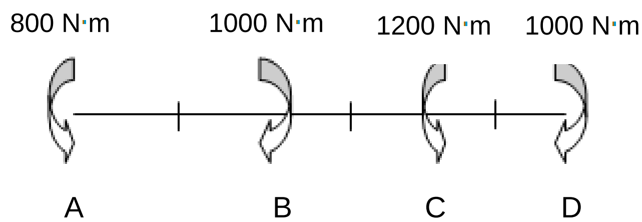
3. Problema Nº3

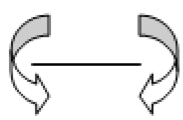


Un eje de acero de diámetro constante e igual a 60 mm está cargado mediante pares aplicados a engranes montados sobre él, según se muestra en la figura. Usando un módulo G= 83 GN/m^2, calcule el ángulo de torsión del engrane D con respecto al A.

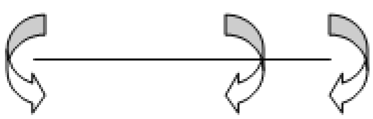
Solución:

Construyendo un DCL del eje.

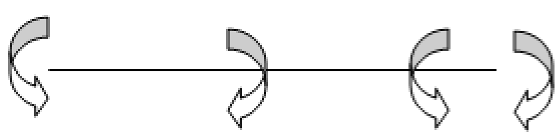




$$800 - T_1 = 0 \rightarrow T_1 = 800\ N \cdot m$$



$$800 - 1000 - T_2 = 0 \rightarrow T_2 = -200\ N \cdot m$$



$$800 - 1000 + 1200 - T_3 = 0 \rightarrow T_3 = 1000\ N \cdot m$$

$$\theta_{D/A} = \theta_{B/A} + \theta_{C/B} + \theta_{D/C} \rightarrow \theta_{D/A} = \frac{1}{JG}\left(T_{B/A}L_{B/A} + T_{C/B}L_{C/B} + T_{D/C}L_{D/C}\right)$$

$$\theta_{D/A} = \frac{1}{\frac{\pi}{32}(60 \cdot 10^{-3})^4 (83 \cdot 10^9)}(800 \cdot 2 - 200 \cdot 3 + 1000 \cdot 3) = 0.0379\ rad = 2.17°$$

4. Problema Nº4

Un eje de transmisión de acero consta de una parte hueca de 2 m de longitud y diámetros de 100 mm y 70 mm, y otra parte maciza de 70 mm de diámetro y 1.5 m de longitud. Determinar el máximo momento torsionante que puede soportar sin que el esfuerzo cortante sobrepase el valor de 70 MPa. Y que ángulo total de torsión no supere el valor de 2.5º en la longitud total de 3.5 m. Usar G= 83 GPa.

Solución:

En primer lugar se aplicara la condición de que el esfuerzo cortante no supere el admisible para ambos ejes, es decir, al de sección hueca y al de sección maciza.

Para la sección Hueca:

$$\tau_H = \frac{16TD}{\pi(D^4 - d^4)} = \frac{16T(0.1\ m)}{\pi((0.1\ m)^4 - (0.07\ m)^4)} \leq 70 \cdot 10^3\ \frac{kN}{m^2} \rightarrow T \leq 10.44\ kN \cdot m$$

Para la sección maciza:

$$\tau_M = \frac{16T}{\pi D^3} = \frac{16T}{\pi(0.07\ m)^3} \leq 70 \cdot 10^3\ \frac{kN}{m^2} \rightarrow T \leq 4.71\ kN \cdot m$$

A continuación se determinara el máximo momento considerando que el ángulo de torsión no supere los 2.5º

$$\theta = \sum \theta_i = \sum \frac{T_i L_i}{J_i G_i} = \frac{T}{G}\left(\frac{L_H}{J_H} + \frac{L_M}{J_M}\right)$$

$$\theta = \frac{T}{83 \cdot 10^9\ \frac{N}{m^2}} \left(\frac{2m}{\frac{\pi}{32}((0.1\ m)^4 - (0.07\ m)^4)} + \frac{1.5\ m}{\frac{\pi}{32}(0.07\ m)^4} \right) \leq 2.5\frac{\pi}{180} \rightarrow T \leq 4.004\ kN \cdot m$$

Luego, se tienen las siguientes restricciones para el momento torsionante máximo soportado en el eje:

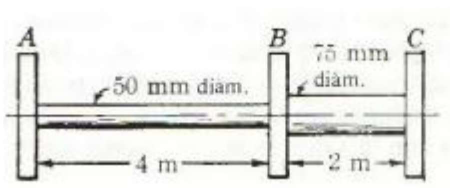
$$T \leq 10.44\ kN \cdot m$$

$$T \leq 4.71\ kN \cdot m$$

$$T \leq 4.004\ kN \cdot m$$

En virtud de los valores encontrados, se llega a la conclusión de que el momento máximo que puede soportar el eje, es 4 kN·m, de esta forma se cumplen con las restricciones impuestas.

5. **Problema Nº5**



El eje de la figura gira a 3 rad/s absorbiendo 30 kW en A y 15 kW en B de los 45 kW aplicados en C. Si G= 83 GPa, calcular el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de torsión de la rueda en A respecto de la rueda en C.

Solución:

En primera instancia se calcularan los momentos torsionantes, esto se hace despejando el par de la fórmula dada para la potencia, y se evalúa en la fórmula del momento torsionante.

$$T_B = \frac{P_{B/C}}{2\pi f} = \frac{15\ kW}{2\pi\left(3\ \frac{rad}{s}\right)} = 0.796\ kN \cdot m$$

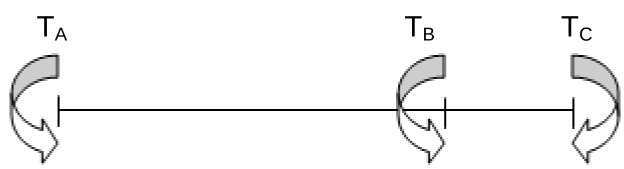
$$T_A = \frac{P_{A/B}}{2\pi f} = \frac{30kW}{2\pi\left(3\ \frac{rad}{s}\right)} = 1.592\ kN \cdot m$$

$$\tau_{B/C} = \frac{16T_B}{\pi {d_{BC}}^3} = \frac{16(0.796\ kN \cdot m)}{\pi(0.075\ m)^3} = 9.61\ MPa$$

$$\tau_{A/B} = \frac{16T_A}{\pi {d_{AB}}^3} = \frac{16(1.592\ kN \cdot m)}{\pi(0.05\ m)^3} = 64.86\ MPa$$

El esfuerzo cortante máximo que soporta el eje, ocurre en la sección AB, y tiene un valor de 64.86 MPa.

Para determinar el ángulo de torsión, en primera instancia se hace un diagrama de cuerpo libre del eje, y se determina el momento actuante en C, ya que este momento es el que se manifiesta sobre el eje en la sección BC.



$$T_C = T_A + T_B = 2.388\ kN \cdot m$$

$$\theta_{A/C} = \theta_{A/B} + \theta_{B/C} = \frac{T_A L_{A/B}}{J_{A/B} G} + \frac{T_C L_{B/C}}{J_{B/C} G}$$

$$\theta_{A/C} = \frac{1}{\frac{\pi}{32}\left(83 \cdot 10^9\ \frac{N}{m^2}\right)}\left(\frac{(1.592 \cdot 10^3\ N \cdot m)(4\ m)}{(0.05\ m)^4} + \frac{(2.388 \cdot 10^3\ N \cdot m)(2\ m)}{(0.075\ m)^4}\right) = 0.1436\ rad$$

Traspasando el resultado anterior a grados: $\theta_{A/C} = 0.1436\ rad \cdot \frac{180°}{\pi\ rad} = 8.23°$

6. Problema Nº6

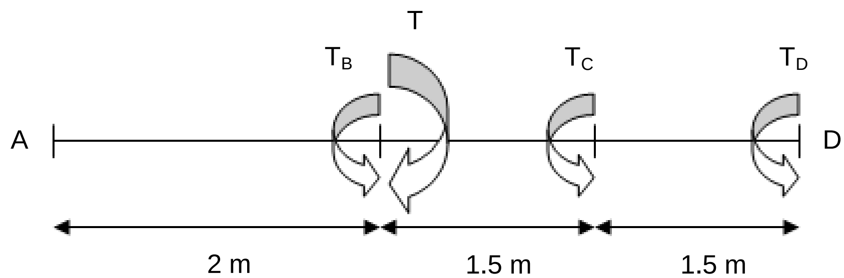
A un eje de acero de sección constante y 5 m de longitud que gira a 2 rad/s se le aplican 70 kW a través de un engrane situado a 2 m del extremo izquierdo, en donde se absorben 20 kW. En el extremo derecho se utilizan 30 kW y a 1.5 m de éste, los otros 20 kW.

A) Dimensionar el eje si el esfuerzo cortante no ha de exceder de 60 MPa.

B) Con el diámetro calculado en el ítem anterior, determinar el ángulo total de torsión de un extremo al otro.

Solución:

En primer lugar se construye un DCL con la simplificación de la situación enunciada en el problema.



A continuación se calculan los pares aplicados en el eje, esto a través de las condiciones de potencias absorbidas enunciadas.

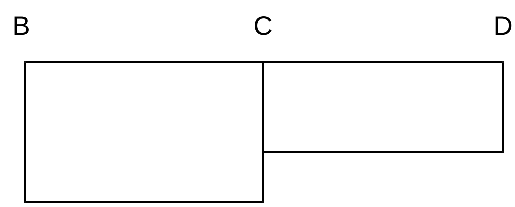
$$T_B = \frac{(20\ kW)}{2\pi\left(2\ \frac{rad}{s}\right)} = \frac{5}{\pi}\ kN \cdot m = T_C$$

$$T_D = \frac{(30\ kW)}{2\pi\left(2\ \frac{rad}{s}\right)} = \frac{7.5}{\pi}\ kN \cdot m$$

Del equilibrio se calcula T

$$T = T_B + T_C + T_D = \frac{17.5}{\pi}\ kN \cdot m$$

A) Para determinar que par actúa sobre cada sección, se construye el diagrama de momentos sobre el eje



$\frac{12.5}{\pi}\ kN \cdot m$ $\frac{7.5}{\pi}\ KN \cdot m$

Como se aprecia de la figura, el par mayor se aplica en la sección BC, por lo que a partir de esta sección se calculará el diámetro mínimo del eje.

$$\tau_{AB} = \frac{16T}{\pi d^3} \leq 60 \cdot 10^3 \ \frac{N}{m^2} \rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16\left(\frac{12.5}{\pi} \cdot 10^3 \ N \cdot m\right)}{\pi\left(60 \cdot 10^3 \ \frac{N}{m^2}\right)}} \rightarrow d \geq 0.0696 \ m = 69.64 \ mm$$

B) Como el diámetro mínimo es 69.64 mm, el ángulo total de torsión se calculará con un diámetro de 70 mm.

La sección AB no se considera, ya que sobre ella no actúa ningún par.

$$\theta_{D/A} = \theta_{D/C} + \theta_{C/B} = \sum \frac{TL}{JG}$$

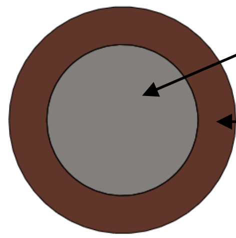
$$\theta_{D/A} = \frac{1}{JG}(T_{DC}L_{DC} + T_{CB}L_{CB}) = \frac{(1.5 \ m)}{\frac{\pi}{32}(0.07 \ m)^4 \left(83 \cdot 10^9 \ \frac{N}{m^2}\right)}\left(\left(\frac{12.5}{\pi} + \frac{7.5}{\pi}\right) \cdot 10^3 \ \frac{N}{m^2}\right) = 0.0488 \ rad$$

Expresando el resultado anterior en grados

$$\theta_{D/A} = 0.0488 \ rad \cdot \frac{180°}{\pi \ rad} = 2.8°$$

7. Problema Nº7

Un eje hueco de bronce de 75 mm de diámetro exterior y 50 mm interior tiene dentro un eje de acero de 50 mm de diámetro y de la misma longitud, estando ambos materiales firmemente unidos en los extremos del eje. Determinar el máximo esfuerzo en cada material cuando se somete el conjunto a un par torsor de 3 kN·m. Considerar G= 35 GPa para el bronce y G= 83 GPa para el acero.



Solución:

Como ambos ejes se encuentran unidos solidariamente, ambas presentaran el mismo ángulo de torsión.

$$\theta_{Br} = \theta_{Ac} \rightarrow \frac{T_{Br}L}{J_{Br}G_{Br}} = \frac{T_{Ac}L}{J_{Ac}G_{Ac}} \rightarrow \frac{T_{Br}}{\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)35} = \frac{T_{Ac}}{\frac{\pi}{32}d^4 83} \rightarrow T_{Br} = 1.7131\, T_{Ac} \qquad (1)$$

Además por equilibrio de pares se tiene:

$$T_{Br} + T_{Ac} = 3000\ N \cdot m \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2), se obtienen los pares aplicados a cada material.

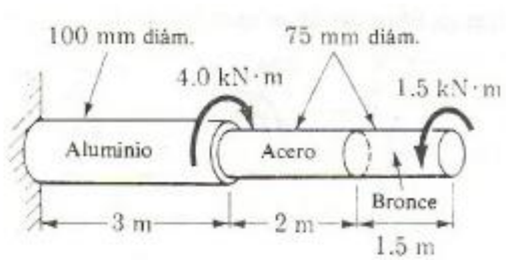
$$T_{Ac} = 1105.75\ N \cdot m \qquad T_{Br} = 1894.25\ N \cdot m$$

Luego:

$$\tau_{Br} = \frac{T_{Br}\frac{D}{2}}{J} = \frac{(1894.25\ N \cdot m)(0.0375\ m)}{\frac{\pi}{32}((0.075\ m)^4 - (0.05\ m)^4)} = 28.5\ MPa$$

$$\tau_{Ac} = \frac{T_{Br}\frac{d}{2}}{J} = \frac{(1105.75\ N \cdot m)(0.025\ m)}{\frac{\pi}{32}(0.05\ m)^4} = 45.1\ MPa$$

8. Problema Nº8



Un árbol compuesto está construido con tres materiales diferentes y sujeto a dos pares aplicados según se ilustra en la figura.

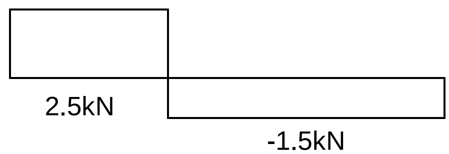
A) Calcule el máximo esfuerzo cortante desarrollado en cada material.

B) Calcular el ángulo de rotación del extremo libre del árbol.

Datos: G_{Al}= 28 GPa, G_{Ac}= 83 GPa, G_{Br}= 35 GPa.

Solución:

A) Construyendo el diagrama de momentos



A continuación se determina el esfuerzo cortante máximo para cada material.

$$\tau_{Al} = \frac{(2500\ N \cdot m)(0.05\ m)}{\frac{\pi}{32}(0.1\ m)^4} = 12.27\ MPa$$

$$\tau_{Ac} = \frac{(1500\ N \cdot m)(0.0375\ m)}{\frac{\pi}{32}(0.075\ m)^4} = 18.11\ MPa$$

$$\tau_{Br} = \frac{(1500\ N \cdot m)(0.0375\ m)}{\frac{\pi}{32}(0.075\ m)^4} = 18.11\ MPa$$

B) Calculando el ángulo de torsión por tramos:

$$\theta_{Al} = \frac{(2500\ N \cdot m)(3\ m)}{\frac{\pi}{32}(0.1\ m)^4\left(28 \cdot 10^9\ \frac{N}{m^2}\right)} = 0.0273\ rad$$

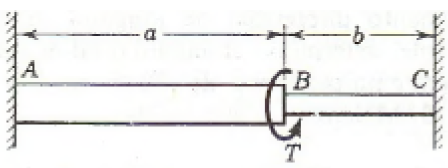
$$\theta_{Ac} = \frac{(-1500\ N \cdot m)(2\ m)}{\frac{\pi}{32}(0.075\ m)^4\left(83 \cdot 10^9\ \frac{N}{m^2}\right)} = -0.0116\ rad$$

$$\theta_{Br} = \frac{(-1500\ N \cdot m)(1.5\ m)}{\frac{\pi}{32}(0.075\ m)^4\left(35 \cdot 10^9\ \frac{N}{m^2}\right)} = -0.0207\ rad$$

Luego la torsión total del extremo libre con respecto al empotrado será:

$$\theta = \theta_{Al} + \theta_{Ac} + \theta_{Br} = -0.005\ rad = -0.286°$$

9. Problema Nº9



En el eje de la figura, firmemente empotrado en sus extremos, la porción AB tiene 75 mm de diámetro y es de bronce, con $\tau \leq 60\,MPa$ y $G = 35\,GPa$. La porción BC es de acero, de 50 mm de diámetro, $\tau \leq 80\,MPa$ y $G = 83\,GPa$. Si $a = 2\,m$ y $b = 1.5\,m$, determinar el par torsor máximo T que puede aplicarse en el punto B de unión de las dos partes.

Solución:

En primera instancia, se debe notar que el eje al ser solidario en la unión, y al estar empotrado en sus extremos, en el punto B se presentara el mismo ángulo de torsión para ambos materiales, por lo que se llega a la siguiente relación:

$$\theta_{B/A} = \theta_{B/C} \rightarrow \frac{T_{AB} \cdot 2}{\frac{\pi}{32} \cdot (0.075)^4 \cdot 35} = \frac{T_{BC} \cdot 1.5}{\frac{\pi}{32} \cdot (0.05)^4 \cdot 83} \rightarrow T_{AB} = 1.601\,T_{BC} \qquad (1)$$

A continuación se determina el par en la sección AB, a partir del esfuerzo de torsión máximo permisible en el bronce.

$$\tau_{AB} = \frac{16T_{AB}}{\pi {d_{AB}}^3} = 60\,MPa \rightarrow T_{AB} = \frac{\left(60 \cdot 10^6\,\frac{N}{m^2}\right)\pi(0.075\,m)^3}{16} = 4970.1\,N \cdot m$$

A partir de la relación (1), se determina el par en la sección BC

$$T_{BC} = \frac{4970.1\,N \cdot m}{1.601} = 3104.4\,N \cdot m$$

Con este par, se verifica que no se sobrepase el esfuerzo cortante del acero en la sección BC.

$$\tau_{BC} = \frac{16(3104.4\,N \cdot m)}{\pi(0.05\,m)^3} = 126.5\,MPa > 80\,MPa$$

Como el esfuerzo cortante en la sección BC supera al permisible, se llega a la conclusión que el par máximo presente en esta sección queda determinado por el par permisible en el acero, luego:

$$\tau_{BC} = \frac{16T_{BC}}{\pi {d_{BC}}^3} = 80\,MPa \rightarrow T_{BC} = \frac{\left(80 \cdot 10^6\,\frac{N}{m^2}\right)\pi(0.05\,m)^3}{16} = 1963.5\,N \cdot m$$

Utilizando la relación (1), se encuentra el par en la sección AB

$$T_{AB} = 1.601(1963.5\,N \cdot m) = 3143.6\,N \cdot m$$

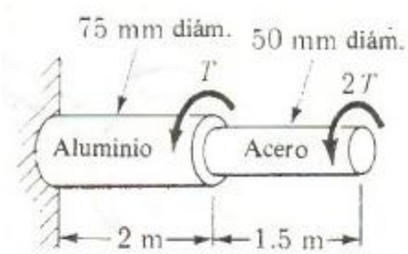
Con este par se verifica que no se supere el esfuerzo admisible cortante del bronce en la sección AB:

$$\tau_{AB} = \frac{16(3143.6\,N \cdot m)}{\pi(0.075\,m)^3} = 38\,MPa < 60\,MPa$$

Luego se calcula el par torsor máximo en B

$$T = T_{AB} + T_{BC} = 3143.6\,N \cdot m + 1963.5\,N \cdot m = 5107.1\,N \cdot m$$

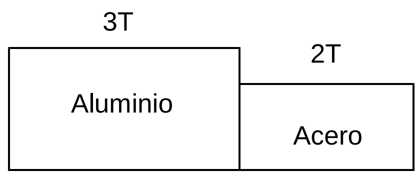
10. Problema Nº10



Un eje compuesto, que consta de un segmento de aluminio y uno de acero, está sometido a dos momentos de torsión como se muestra en la figura. Calcular el máximo valor admisible de T de acuerdo con las siguientes condiciones $\tau_{Ac} \leq 100MPa, \tau_{Al} \leq 70MPa$ y el ángulo de rotación del extremo libre, limitado a 12º. Usar $G_{Ac} = 83GPa$ y $G_{Al} = 28GPa$.

Solución:

Construyendo el diagrama de momento torsor sobre el eje, se tiene:



A continuación se calculará el valor de T de acuerdo a cada restricción impuesta.

- Restricción esfuerzo cortante máximo en el acero

$$\tau_{Ac} = \frac{2T(0.025\ m)}{\frac{\pi}{32}(0.05\ m)^4} \leq 100 \cdot 10^6\ \frac{N}{m^2} \rightarrow T \leq 1227.2\ N \cdot m$$

- Restricción esfuerzo cortante máximo en el aluminio

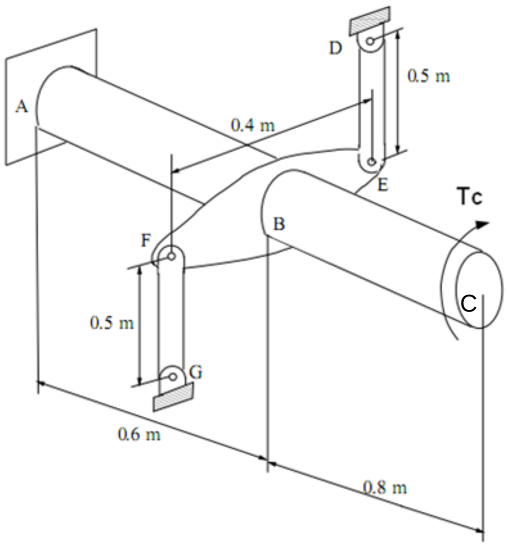
$$\tau_{Al} = \frac{3T(0.0375\ m)}{\frac{\pi}{32}(0.075\ m)^4} \leq 70 \cdot 10^6\ \frac{N}{m^2} \rightarrow T \leq 1932.2\ N \cdot m$$

- Restricción para el ángulo de rotación en el extremo libre

$$\theta = \frac{2T(1.5\ m)}{\frac{\pi}{32}(0.05\ m)^4\left(83 \cdot 10^9\ \frac{N}{m^2}\right)} + \frac{3T(2\ m)}{\frac{\pi}{32}(0.075\ m)^4\left(28 \cdot 10^9\ \frac{N}{m^2}\right)} \leq 12 \cdot \frac{\pi}{180} \rightarrow T \leq 1637.3\ N \cdot m$$

Por lo tanto, para que se cumplan las tres restricciones impuestas, el par máximo puede alcanzar un valor de 1227.2 kN·m

11. Problema Nº11



En la figura se tiene un eje de acero ($E = 210\,GPa\ y\ \nu = 0.27$) y de diámetro 100 mm. El eje tiene un soporte rígido en B unido a dos barras de acero ($E = 210\,GPa\ y\ \nu = 0.27$) de un diámetro de 5 mm. En el extremo C se aplica un torque igual a T_c = 100 Nm.

Se pide:

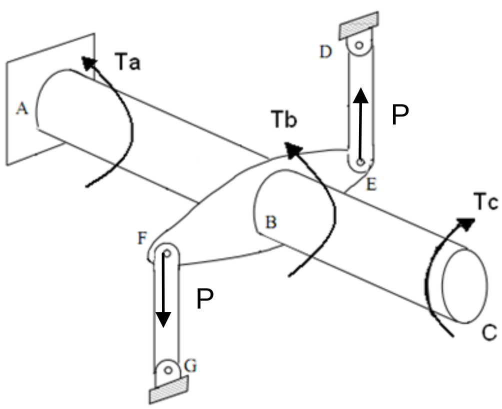
A) Esfuerzo de las barras GF y DE.

B) Diagrama de momento torsor, indique valores máximos.

C) Ángulo de torsión de C respecto de A (ϑ_{CA} en grados).

Solución:

A) Primero realizamos un diagrama de cuerpo libre.

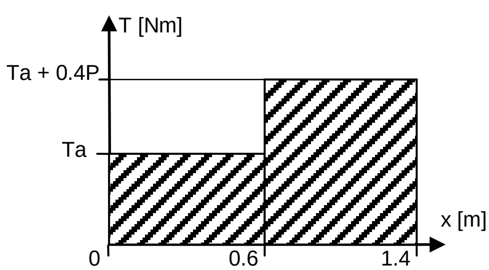


Donde $T_b = 0.4\,P\,(N \cdot m)$, si se considera P como la misma fuerza que realiza el soporte rígido sobre cada barra, dada su simetría.

Luego para que el sistema este en equilibrio la sumatoria de los momentos torsor debe ser igual a cero, así:

$$\sum T = 0 \rightarrow T_a + T_b - T_C = 0 \rightarrow T_a + 0.4P = 100\,N \cdot m \qquad (1)$$

Con lo acotado podemos realizar un bosquejo del diagrama del momento torsor.



Segundo tenemos el ángulo de torsión de A respecto de C:

$$\theta_{A/C} = \theta_{A/B} + \theta_{B/C}, \qquad \text{donde } \theta = \frac{T \cdot L}{J \cdot G};\ J = \frac{\pi \cdot D^4}{32};\ G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

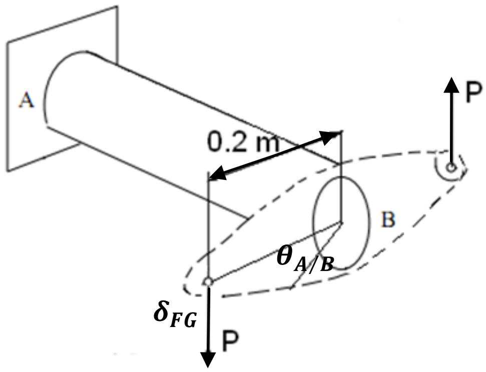
Al realizar los cálculos. Tenemos:

$$J = \frac{\pi \cdot 0.1^4\,m^4}{32} \rightarrow J = 9.8 * 10^{-6}\,m^4$$

$$G = \frac{210\,GPa}{2(1+0.27)} \rightarrow G = 82{,}68\,GPa$$

$$\theta_{A/C} = \theta_{A/B} + \theta_{B/C} \rightarrow \theta_{A/C} = \frac{(100 - 0.4P)\,N \cdot m \cdot 0.6\,m}{9.8 \cdot 10^{-6}\,m^4 \cdot 82{,}68\,GPa} + \frac{100\,N \cdot m \cdot 0.8\,m}{9.8 \cdot 10^{-6}\,m^4 \cdot 82{,}68\,GPa} \qquad (2)$$

Tercero tenemos la deformación que se produce en las barras.



Al analizar la deformación de la barra FG, dado que ésta es infinitésima en comparación con la dimensión de la barra se puede considerar como un segmento de arco, entonces:

$$\delta_{FG} = \theta_{A/B} \cdot 0.2\ m, donde\ \delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

$$\rightarrow \delta_{FG} = \frac{P \cdot 0.5\ m}{210\ GPa \cdot \frac{\pi(5 \cdot 10^{-3})^2\ m^2}{4}}$$

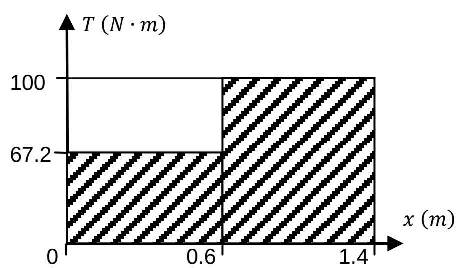
$$\boldsymbol{As\text{í}\ obtemos\ la\ relaci\text{ó}n:\ \theta_{A/B} = \frac{\delta_{FG}}{0.2\ m} \rightarrow \theta_{A/B} = \frac{P \cdot 0.5\ m}{210\ GPa \cdot \frac{\pi(5 \cdot 10^{-3})^2\ m^2}{4} \cdot 0.2\ m}} \qquad \mathbf{(3)}$$

$$De\ lo\ deducido\ en\ 2\ y\ 3:\ \theta_{A/B} = \frac{(100 - 0.4P)N \cdot m \cdot 0.6\ m}{9.8 * 10^{-6}\ m^4 \cdot 82{,}68\ GPa} = \frac{P \cdot 0.5\ m}{210\ GPa \cdot \frac{\pi(5 \cdot 10^{-3})^2\ m^2}{4} \cdot 0.2\ m}$$

$$\rightarrow P = 82\ N$$

$$\therefore los\ esfuerzos\ son:\ \sigma_{FG} = \sigma_{ED} = \frac{P}{A} = \frac{82\ N}{\frac{\pi \cdot 5^2\ mm^2}{4}} \rightarrow \sigma_{FG} = \sigma_{ED} = 4.2\ MPa$$

B) El diagrama del momento torsor es:



$$de\ (1) \rightarrow T_a + 0.4P = 100\ N \cdot m \ \rightarrow \ T_a = 67.2\ N \cdot m$$

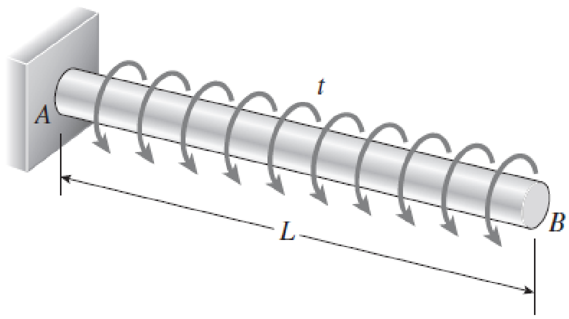
El valor máximo es $100\ N \cdot m$ y se encuentra en el segundo tramo de $0.6\ m \leq x \leq 1.4\ m$.

C) El ángulo de torsión de C respecto de A es:

$$\theta_{C/A} = \theta_{C/B} + \theta_{B/A} = \frac{100\ N \cdot m \cdot 0.8\ m}{9.8 \cdot 10^{-6}\ m^4 \cdot 82{,}68\ GPa} + \frac{67.2\ N \cdot m \cdot 0.6\ m}{9.8 \cdot 10^{-6}\ m^4 \cdot 82{,}68\ GPa} \rightarrow \theta_{C/A} = 0.000148\ rad$$

$$\rightarrow \theta_{C/A} = 0.000148\ rad \cdot \frac{180\ °}{\pi\ rad} \rightarrow \theta_{C/A} = 0.00848\ °$$

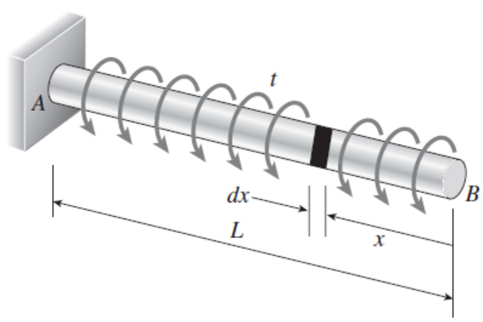
12. Problema Nº12



Una barra prismática AB de longitud L y de sección transversal circular sólida (diámetro d) está cargada por un par distribuido de intensidad t constante por unidad de longitud (véase la figura).

a)Determine el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en la barra
b)Determine el ángulo de torsión φ entre los extremos de la barra

Solución:



Datos: t=intensidad de torque distribuido
d=diámetro eje
G=módulo de elasticidad al cortante

a)Esfuerzo cortante máximo $\boldsymbol{\tau_{máx}}$ en la barra

b)Determine el ángulo de torsión φ entre los extremos de la barra.

a) $\mathrm{T}_{máx} = \mathrm{tL} \;\rightarrow\; \tau_{máx} \; \frac{16T_{máx}}{\pi d^3} = \frac{16TL}{\pi d^3}$

b) $T(x) = tx \;\; J = \frac{\pi d^4}{32}$

$d\phi = \frac{\mathrm{T(x)dx}}{\mathrm{GJ}} = \frac{\mathrm{32txdx}}{\pi \mathrm{Gd}^4}$

$\phi = \int_0^L d\phi = \frac{32t}{\pi G d^4}\int_0^L x dx = \frac{16tL^2}{\pi G d^4}$

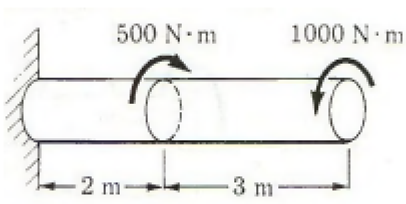
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Problema Nº1

Un árbol macizo de 5 m de longitud, en el que el ángulo total de torsión es de 4º, el esfuerzo cortante máximo es de 60 MPa. Si $G = 83\ GPa$, calcular su diámetro. ¿Qué potencia podrá transmitir a 20 r/s?

Respuesta: $d = 104\ mm$
$P = 1.67\ MW$

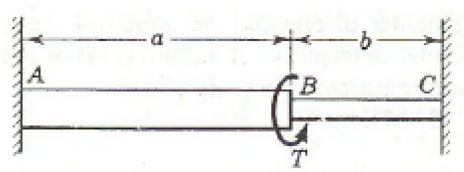
2. Problema Nº2



Un árbol de acero se encuentra cargado según se muestra en la figura. Usando un módulo $G = 83\ GPa$, calcular el diámetro requerido si el esfuerzo cortante está limitado a $60\ MPa$ y el ángulo de rotación en el extremo libre no debe exceder de 4º.

Respuesta: $d = 52mm$

3. Problema Nº3

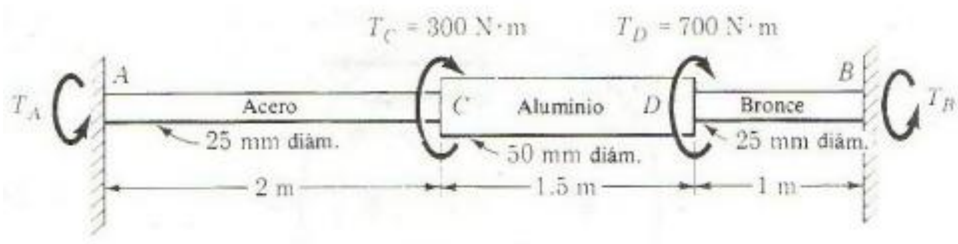


Del problema de la figura, determinar la relación de longitudes b/a que debe existir para que el acero y el bronce trabajen al máximo esfuerzo posible. ¿Qué par torsor T es necesario para ello?

Respuesta: $b/a = 1.19$

$T = 6.93\ kN \cdot m$

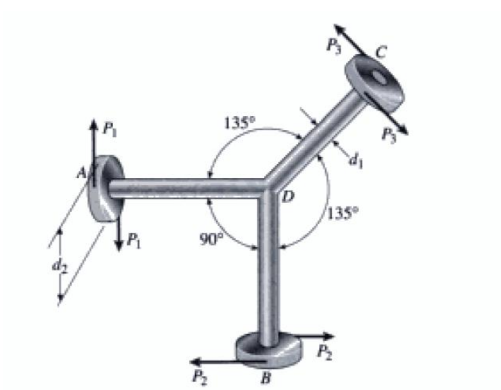
4. Problema Nº4



Un árbol se compone de tres secciones, como se muestra en la figura, las secciones se encuentran soldadas entre si y el conjunto firmemente empotrado en sus extremos y cargado como se muestra en la figura. Determinar el esfuerzo cortante máximo en cada material. Datos: $G_{ac} = 83\ GPa\ G_{br} = 35\ GPa\ \ G_{al} = 28\ GPa$

Respuesta: $\tau_{ac} = 172.1MPa$
$\tau_{al} = 9.3MPa$
$\tau_{br} = 153.8MPa$

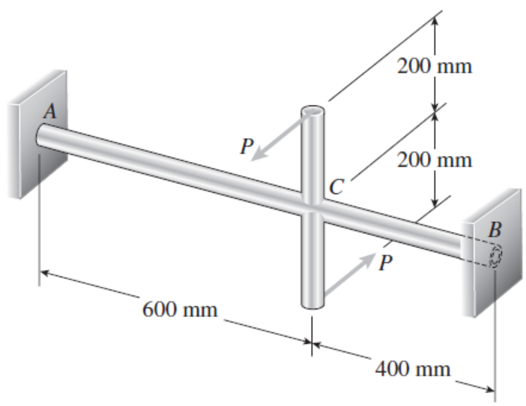
5. Problema Nº5



Tres discos circulares idénticos A, B y C están soldados a los extremos de barras circulares idénticas (véase la figura). Las tres barras están en el mismo plano y los discos están en planos perpendiculares a los ejes de las barras. Las barras están soldadas en su intersección D para formar una conexión rígida. Las fuerzas P1, P2 y P2 generan pares que actúan sobre los discos A, B y C, respectivamente, sometiendo a las barras a la torsión. Si $P_1 = 25N$. ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ en cualquiera de las tres barras?.
Datos: $d_1 = 10mm.$, $d_2 = 30mm\ (diámetro\ de\ cada\ disco)$

Respuesta: 540.19Pa

6. Problema Nº6



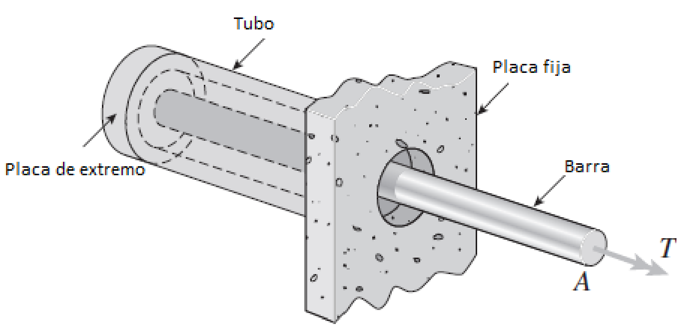
Un eje hueco de acero ACB con diámetro exterior de 50mm y diámetro interior de 40mm está fijo en los extremos A y B (véase la figura) a fin de evitar rotaciones. Las fuerzas horizontales P se aplican en los extremos del brazo vertical que está soldado al eje en el punto C. Determine el valor permisible de las fuerzas P si el esfuerzo cortante permisible máximo en el eje es de 45MPa.

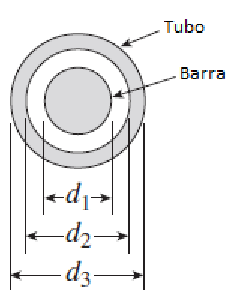
Datos: $L_b = 400mm, L_a = 600mm,\ L = 1000mm\ d_2 = 50mm,\ d_1 = 40mm$

Respuesta: $P \leq 2717N$

7. Problema Nº7

Un tubo circular con diámetro exterior $d_3 = 70mm$ y diámetro interior $d_2 = 60mm$ está soldado en su extremo derecho a una placa fija y en el extremo (véase la figura). Una barra circular sólida de diámetro $d_1 = 400mm$ está dentro y colocada concéntricamente en el tubo. La barra pasa a través de un agujero en la placa fija y está soldada a la placa rígida de extremo.





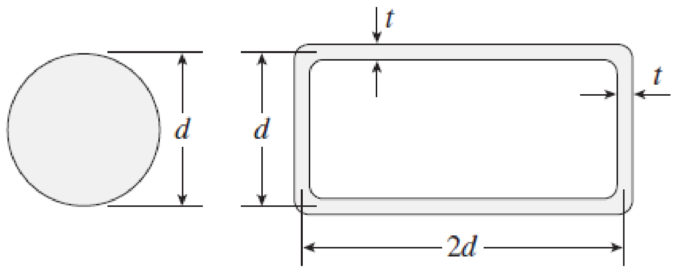
La barra tiene 1.0m de longitud y el tubo tiene la mitad de esa longitud. Un par $T = 1000Nm$ actúa en el extremo A de la barra. Además, la barra y el tubo son de una aleación de aluminio con módulo de elasticidad cortante $G = 27GPa$.

a)Determine los esfuerzos cortantes máximos en la barra y en el tubo.

b)Determine el ángulo de torsión (en grados) en el extremo A de la barra.

Respuesta: $\tau_{Barra} = 79.6MPa,\ \ \tau_{Tubo} = 32.3MPa,\ \phi_A = 9.43º$

8. Problema Nº8



Se va a sustituir una barra circular sólida con diámetro d por un tubo rectangular con dimensiones d X 2d en su línea media de la sección transversal (véase la figura).
Determine el espesor $t_{mín}$ requerido en el tubo de manera que el esfuerzo cortante máximo en él no exceda el esfuerzo cortante máximo de la barra sólida

Respuesta: $t_{mín} = \frac{\pi d}{64}$