

TÓPICOS I: DISEÑO MECÁNICO

TEMA: EJES.

A) INTRODUCCIÓN

En general los ejes se pueden clasificar en: giratorios y no giratorios.

→ Los ejes giratorios transmiten potencia o movimiento y usualmente son de sección transversal circular.

Se diseñan para soportar: engranes, poleas, volantes de inercia, manivelas, ruedas dentadas y componentes similares.

→ Los ejes no giratorios no transmiten par de torsión y se utilizan para soportar ruedas rotatorias, poleas y elementos similares.

Se diseñan con facilidad como una viga bajo cargas estáticas.

Nos centraremos en los ejes giratorios debido a su importancia en el diseño de elementos de máquinas.

El diseño de ejes giratorios (o flechas) incluye los siguientes tópicos:

- + Selección de Material.
- + Configuración geométrica.
- + Esfuerzos y Resistencia (Estática y por fatiga)
- + Deflexión (flexión, torsión y cortante, pendiente en elementos)
- + Vibración (Debida a frecuencia natural)

Es importante tener en cuenta que para analizar los esfuerzos en un punto específico de un eje se considera únicamente la geometría del eje en la proximidad de ese punto. Por tanto, no es necesario conocer la geometría de todo el eje.

Primero se localizan las áreas críticas y se dimensionan para cumplir los requisitos de resistencia y después se dimensiona el resto del eje para satisfacer los requerimientos de los elementos.

2/

Los análisis de deflexión y pendiente ^{se realizan} una vez definida la geometría de todo el eje.

En resumen, el diseño de ejes permite primero una consideración de esfuerzo y resistencia; y una vez establecidos valores tentativos para las dimensiones del eje, se pueden determinar las deflexiones y las inclinaciones.

Materiales

Obs 1) La deflexión no se ve afectada por la resistencia sino por la rigidez, representada por el módulo de elasticidad, que es prácticamente constante en todos los aceros. Por tanto, la rigidez depende únicamente de la geometría siendo irrelevante el material.

Muchos ejes están fabricados de acero de bajo carbono, acero estirado en frío o acero laminado en caliente, como lo son los aceros AISI 1020 - 1050

Configuración del eje

- La configuración general del eje para acomodar elementos que lo conforman (engranes, rodamientos y poleas) se debe especificar en los primeros pasos del diseño, para poder realizar un análisis de fuerza de cuerpo libre (momento y cortante).
- Por lo general, la geometría de un eje es la de un cilindro escalonado
- El uso de hombros o resaltos permite localizar de forma axial los elementos y para ejecutar cualquier carga de empuje.

ESFUERZOS EN Ejes.

Los esfuerzos de flexión, torsión o axiales pueden estar presentes tanto en componentes medias como alternantes.
Para el análisis se combinan los diferentes tipos de esfuerzos para obtener el esfuerzo equivalente de Von Mises alternantes y medias.

En general, las cargas axiales son comparativamente muy pequeñas y por tanto pueden omitirse para el diseño.
Los esfuerzos de flexión y torsión están dados por:

$$\sigma_a = k_f \frac{M_a c}{I}$$

$$\sigma_m = k_f \frac{M_m c}{I}$$

$$\tau_a = k_{fs} \frac{T_a c}{J}$$

$$\tau_m = k_{fs} \frac{T_m c}{J}$$

ESFUERZOS
FLUCTUANTES.

M_a y M_m : Momentos flexionantes alternantes y medios.

T_a y T_m : Momentos torsivos alternante y medio.

k_f y k_{fs} : Factores de concentración de esfuerzos por fatiga de flexión y torsión.

Assumiendo un eje sólido con sección transversal circular, se obtienen las siguientes expresiones para ejes:

$$\sigma_a = k_f \frac{32 M_a}{\pi d^3}$$

$$\sigma_m = k_f \frac{32 M_m}{\pi d^3}$$

$$\tau_a = k_{fs} \frac{16 T_a}{\pi d^3}$$

$$\tau_m = k_{fs} \frac{16 T_m}{\pi d^3}$$

Donde se han reemplazado:

$$\boxed{I = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}} ; \boxed{J = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}} ; \boxed{c = \frac{d}{2}}$$

Si se combinan los esfuerzos σ y τ para obtener los esfuerzos de Von Mises en base a la teoría de falla por energía de distorsión (ED) se obtiene.

$$\sigma_a' = (\sigma_a^2 + 3\tau_a^2)^{1/2} = \left[\left(\frac{32K_f M_a}{\pi d^3} \right)^2 + 3 \left(\frac{16K_{fs} T_a}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\sigma_m' = (\sigma_m^2 + 3\tau_m^2)^{1/2} = \left[\left(\frac{32K_f M_m}{\pi d^3} \right)^2 + 3 \left(\frac{16K_{fs} T_m}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Obs: No se tienen en cuenta las cargas axiales.

Los esfuerzos medios y alternantes equivalentes pueden usarse para evaluar la falla de acuerdo a los criterios de esfuerzos fluctuantes.

• Goodman Modificado $\frac{1}{n} = \frac{\sigma_a'}{S_e} + \frac{\sigma_m'}{S_{ut}}$

$$\frac{1}{n} = \frac{16}{\pi d^3} \left\{ \frac{1}{S_e} \left[4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2 \right]^{1/2} + \frac{1}{S_{ut}} \left[4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2 \right]^{1/2} \right\}$$

Para propósito de diseño, despejamos el diámetro de la expresión anterior:

$$d = \left[\frac{16n}{\pi} \left\{ \frac{1}{S_e} \left[4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2 \right]^{1/2} + \frac{1}{S_{ut}} \left[4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2 \right]^{1/2} \right\} \right]^{1/3}$$

• Gerber $n \frac{\sigma_a}{S_e} + \left(n \frac{\tau_m}{S_{yt}} \right)^2 = 1$

$$\frac{1}{n} = \frac{8A}{\pi d^3 S_e} \left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{2B S_e}{A S_{yt}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}$$

$$d = \left(\frac{8An}{\pi S_e} \left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{2B S_e}{A S_{yt}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \right)^{1/3}$$

donde $A = \left(4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2 \right)^{1/2}$
 $B = \left(4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2 \right)^{1/2}$

• Soderberg $\sigma_a / s_e + \tau_m / s_y = 1/n$

$$\frac{1}{n} = \frac{16}{\pi d^3} \left\{ \frac{A}{S_e} + \frac{B}{S_{yt}} \right\} \quad A = \left[4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2 \right]^{1/2}$$

$$d^3 = \left(\frac{16n}{\pi} \left\{ \frac{A}{S_e} + \frac{B}{S_{yt}} \right\} \right)^{1/3} \quad B = \left[4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2 \right]^{1/2}$$

• ASME - Elíptica $\left(\sigma_a / s_e \right)^2 + \left(\tau_m / s_{yt} \right)^2 = 1/n^2$

$$\frac{1}{n} = \frac{16}{\pi d^3} \left[4 \left(\frac{K_f M_a}{S_e} \right)^2 + 3 \left(\frac{K_{fs} T_a}{S_e} \right)^2 + 4 \left(\frac{K_f M_m}{S_{yt}} \right)^2 + 3 \left(\frac{K_{fs} T_m}{S_{yt}} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{16}{\pi d^3} \left[\left(\frac{A}{S_e} \right)^2 + \left(\frac{B}{S_{yt}} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$d = \left(\frac{16n}{\pi} \left[\left(\frac{A}{S_e} \right)^2 + \left(\frac{B}{S_{yt}} \right)^2 \right]^{1/2} \right)$$

OBS: En el caso de un eje giratorio con flexión y torsión constante, el esfuerzo debido a flexión es completamente reversible y el esfuerzo debido a torsión es constante. ($M_m = 0$ y $T_a = 0$)

Siempre es necesario considerar la posibilidad de falla estática en el primer ciclo.

1° Calcular el esfuerzo máximo de Von Mises:

$$\sigma'_{\max} = [(\sigma_m + \sigma_a)^2 + 3(\tau_m + \tau_a)^2]^{1/2}$$

$$\sigma'_{\max} = \left[\left(\frac{32 K_f}{\pi d^3} (M_m + M_a) \right)^2 + 3 \left(\frac{16 K_{fs}}{\pi d^3} (T_m + T_a) \right)^2 \right]^{1/2}$$

2° Verificar la fluencia (S_y)

$$n_y = \frac{S_y}{\sigma'_{\max}}$$

Obs: Para una verificación rápida se puede obtener σ'_{\max} como la suma de σ'_m y σ'_a

Problema propuesto.

En el hombro de un eje mecanizado el diámetro menor es $d = 28 \text{ mm}$, el diámetro mayor es $D = 42 \text{ mm}$ y el radio de entalle es $r = 3 \text{ mm}$. Considerando un momento flexionante $M = 145 \text{ N}\cdot\text{m}$ (completamente reversible) y un momento torsor $T = 125 \text{ N}\cdot\text{m}$ (constante). Calcule los factores de seguridad para todos los criterios de falla (Goodman, Soderberg, Gerber y ASME) considerando los aceros 1020 y 1045.

- No olvide verificar la fluencia de primer ciclo.
- Use las fórmulas particulares para ejes.

ESTIMACIÓN DE CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS.

Durante la fase de diseño los factores k_f y k_{fs} dependen de las especificaciones de tamaño, las cuales no se conocen en el primer paso del proceso.

Puesto que las proporciones de tamaño son estándar en gran parte de los elementos (hombro y uniones), es posible estimar los factores de concentración de esfuerzos para el diseño inicial.

En general, los catálogos para rodamientos y engranes recomiendan valores de relación D/d en el hombro para el apoyo de dichos elementos.

Típicos $D/d = 1.2 - 1.5$
Típicos $r/d = 0.02 - 0.06$

Por ejemplo: $D/d = 1.5$ (Peor caso)

k_t	$r/d = 0.02$	$r/d = 0.05$	$r/d = 0.10$
$D/d = 1.5$	$k_t = 2.7$	$k_t = 2.1$	$k_t = 1.7$

obs: Existe una variación importante de k_t para diferentes relaciones de filete.

Para una primera iteración del diseño se suelen considerar los valores que suponen el peor escenario:

$r/d = 0.02$ $D/d = 1.5$	Flexión $k_t = 2.7$	Torsión $k_{ts} = 2$	Axial $k_t = 2.0$	Aguado ($r/d = 0.02$)
				FILETE DE HOMBRO
$D/d = 1.5$ $r/d = 0.1$	$k_t = 1.7$	$k_{ts} = 1.5$	$k_t = 1.9$	Redondeado ($r/d = 0.1$)
				FILETE DE HOMBRO

obs: Para una primera iteración use $k_f = k_t$

$k_{fs} = k_{ts}$

Una vez obtenida las dimensiones verifiquen estos valores

observaciones importantes referentes a la deflexión:

- Las deflexiones están limitadas por los valores permisibles de los elementos como rodamientos y engranes.
- En general, el trabajo de obtener deflexiones y pendientes se obtiene por medio de programas computacionales.
- Una vez obtenidas las deflexiones y pendientes se pueden corregir los diámetros (si fuese necesario) mediante fórmulas sencillas.

$$d_{new} = d_{old} \left| \frac{n_d \gamma_{old}}{\gamma_{adm}} \right|^{1/4}$$

γ_{adm} : flecha admisible
 n_d : factor de diseño
 (suele ser ≥ 1)

$$d_{new} = d_{old} \left| \frac{n_d \theta_{old}}{\theta_{adm}} \right|$$

θ_{adm} : pendiente admisible

- Normalmente se presta poca atención a la deflexión por cortante y la deflexión angular. Para vez se erra.

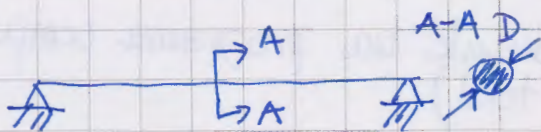
VELOCIDADES CRÍTICAS DE EJES.

Cuando un eje gira, la excentricidad ocasiona una deflexión debida a la fuerza centrífuga. Esta deflexión es resistida por la rigidez a flexión del eje.

Si estas deflexiones son pequeñas no producen daños, sin embargo, a ciertas velocidades el eje es inestable y las deflexiones aumentan sin un límite superior.

Éstas se conocen como velocidades críticas.

Para un eje simplemente apoyado de diámetro uniforme las frecuencias críticas están dadas por:



$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{gEI}{A\gamma}}$$

m : masa por unidad de longitud

$$m = \frac{M}{L} = \frac{\gamma V}{L} = \frac{\gamma A \cdot L}{L} = \frac{\gamma A}{g}$$

γ : peso específico

A : Área

En el caso de un ensamble de elementos, el método de Rayleigh para masas concentradas establece:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \sum w_i y_i}{\sum w_i y_i^2}}$$

donde w_i es el peso de la i -ésima ubicación, y_i es la deflexión en la ubicación i -ésima.

Para utilizar este método se suele dividir el eje en trozos

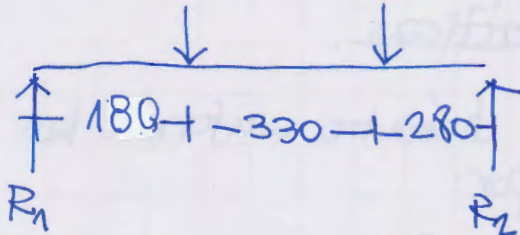


Ejemplo del Método de Rayleigh para estimar la velocidad crítica.

— Considerar un eje de acero simplemente apoyado de diámetro 25mm, largo 790 mm, que soporta 2 engravajes que pesan 156 N y 245 N

$$(15.87 \text{ kgf}) \quad (24.95 \text{ kgf})$$

$$156 \text{ N} \quad 245 \text{ N}$$



$$R_1 = \frac{245 \times (280) + 156 \times (330 + 280)}{790}$$

$$R_1 = 204.2911$$

$$R_2 = 193.7089$$

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi (25)^4}{64}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

Mediante un programa computacional (Ftool)

$$y_1 = 5.556 \times 10^{-1} \text{ mm} = 5.556 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$y_2 = 7.713 \times 10^{-1} \text{ mm} = 7.713 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Fórmula de Rayleigh

$$w_1 = \sqrt{\frac{g \sum w_i y_i}{\sum w_i y_i^2}}$$

$$N = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

$$1 \text{ kgf} = 9.80665 \text{ N}$$

$$= 1 \text{ kg} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\sum w_i y_i = 156 \text{ N} \times 5.556 \times 10^{-4} \text{ m} + 245 \text{ N} \times 7.713 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\sum w_i y_i^2 = 156 \text{ N} \times (5.556 \times 10^{-4})^2 + 245 \text{ N} \times (7.713 \times 10^{-4})^2$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0.27564 \text{ N} \cdot \text{m}}{1.94 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}^2}} = 118.06 \left[\frac{1}{\text{s}} = \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s} \Rightarrow w_1 = 118.06 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} = 1127 \frac{\text{rev}}{\text{min}}$$