

DISEÑO MECÁNICO:

TEORÍA DE FALLAS ESTÁTICAS.

A) TEORÍA DE VON MISES - HENCKY

Energía de Deformación total.

La energía de deformación U por unidad de volumen (densidad de la energía de deformación), se define con el área bajo la curva $\sigma - \epsilon$ (esfuerzo de formación unitaria) hasta el punto donde se aplica el esfuerzo.

- Asumiendo comportamiento lineal hasta el punto de fluencia, la energía de deformación se expresa por:

$$U = \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon$$

Ampliando esto al esfuerzo tridimensional, tenemos.

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$$

Donde σ_i son los esfuerzos principales y ϵ_i las def. principales sobre los planos de esfuerzo cortante igual a cero ($\tau_{ij} = 0$, planos principales).

Podemos plantear esta expresión en términos de esfuerzos principales sustituyendo las relaciones:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2 - \nu \sigma_3)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_3)$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_2)$$

ν : Módulo de Poisson
 E : Módulo de Elasticidad

Reemplazando

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2 - \nu \sigma_3) + \frac{\sigma_2}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_3) + \frac{\sigma_3}{E} (\sigma_3 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_2) \right)$$

$$U = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3))$$

Componentes de la energía de deformación:

$$U = U_h + U_d$$

U_h : energía hidrostática o volumétrica

U_d : energía de distorsión.

ENERGÍA VOLUMÉTRICA

También podemos expresar cada uno de los esfuerzos principales en términos de la componente hidrostática (o volumétrica) σ_h que es común en cada cara, y una componente de distorsión que es única en cada cara,

$$\sigma_1 = \sigma_h + \sigma_{1d}$$

$$\sigma_2 = \sigma_h + \sigma_{2d}$$

$$\sigma_3 = \sigma_h + \sigma_{3d}$$

Sumando los esfuerzos principales se tiene:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_h + \sigma_{1d} + \sigma_{2d} + \sigma_{3d}$$

$$3\sigma_h = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - (\sigma_{1d} + \sigma_{2d} + \sigma_{3d})$$

Para un cambio volumétrico sin distorsión, el término entre paréntesis debe ser cero) por tanto la componente volumétrica del esfuerzo está dada por:

$$\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

} Promedio de los
Esfuerzos Principales }

Ahora, la componente volumétrica de la energía de deformación (asociada al cambio de volumen) se obtiene ~~como~~ sustituyendo σ_h en la expresión de la energía de deformación

$$U = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3))$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_h$$

$$U_h = \frac{1}{2E} (\sigma_h^2 + \sigma_h^2 + \sigma_h^2 - 2\nu(\sigma_h\sigma_h + \sigma_h\sigma_h + \sigma_h\sigma_h))$$

$$U_h = \frac{1}{2E} (3\sigma_h^2 - 2\nu(3\sigma_h^2))$$

$$U_h = \frac{3}{2E} (1 - 2\nu) \sigma_h^2$$

Ahora, sustituyendo $\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

$$U_h = \frac{3E(1-2\nu)}{2} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2$$

$$U_h = \frac{1-2\nu}{6E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \right]$$

ENERGÍA DE DISTORSIÓN

Ahora la energía de distorsión se obtiene restando de la energía total la componente volumétrica

$$U = U_h + U_d \rightarrow U_d = U - U_h$$

$$U_d = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)) - \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3))$$

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3 \right]$$

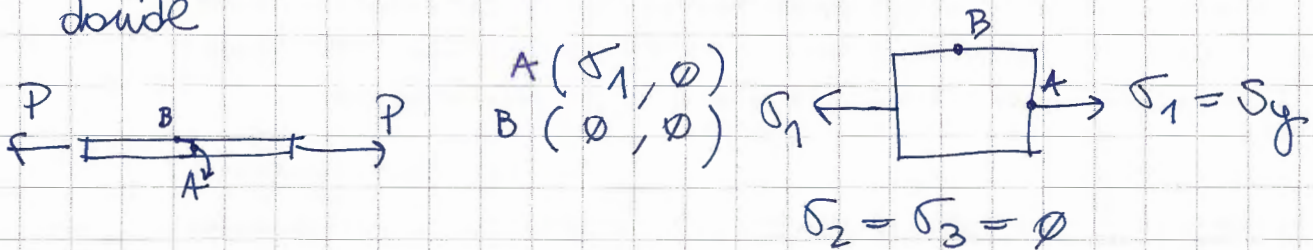
CRITERIO DE FALLA

4/9

Para obtener un criterio de falla se compara la energía de distorsión por unidad de volumen con la energía de distorsión por unidad de volumen en una muestra de prueba a la tensión en la falla (ya que la prueba a tensión es la fuente principal de datos de resistencia del material).

Aquí el esfuerzo de falla de interés es la resistencia a la flexión.

La prueba de tensión es un estado de esfuerzo uniaxial donde



La energía de distorsión asociada con el esfuerzo de flexión se obtiene como:

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E} (S_y^2 + 0^2 + 0^2 - 0 - 0 - 0) = \frac{1+\nu}{3E} S_y^2$$

El criterio de falla se obtiene igualando la expresión general para U_d con la expresión específica para la falla

$$\underbrace{\frac{1+\nu}{3E} S_y^2}_{U_{d, \text{falla}}} = \underbrace{\frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1)}_{U_d}$$

$$S_y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_1 \cdot \sigma_3}$$

Para 2D ($\sigma_2 = 0$)

$$S_y = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_3^2}$$

ESTUERZO EFECTIVO.

Conviene a menudo, en situaciones que implican esfuerzos de tensión y cortante combinados que actúan sobre un mismo punto, definir un esfuerzo efectivo que sirva para representar la combinación de esfuerzos.

El enfoque de la energía de distorsión proporciona un buen medio para hacer esto en materiales dúctiles.

El esfuerzo efectivo de Von Mises se define como el esfuerzo de tensión uniaxial que crearía la misma energía de distorsión que la combinación real de los esfuerzos aplicados

Este enfoque permite tratar casos de esfuerzos combinados multiaxiales de tensión y cortante, como si fueran resultado de una carga de tensión pura.

El esfuerzo efectivo de Von Mises σ' se define como:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_1 \cdot \sigma_3} \quad (3D)$$

En términos de los esfuerzos aplicados.

$$\sigma' = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

Para el caso bidimensional.

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_3^2}$$

En función de los esfuerzos aplicados:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

TAREA.

FACTOR DE SEGURIDAD.

Resulta conveniente definir un factor de seguridad "N" en los cálculos, de modo que el estado de esfuerzos sea seguro dentro de la elipse de falla.

$$N = \frac{S_y}{\sigma_1}$$

$$3D \rightarrow \frac{S_y}{N} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}$$

$$2D \rightarrow \frac{S_y}{N} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2}$$

CORTANTE PURO

Para el caso de cortante puro (carga de torsión pura) los esfuerzos principales se vuelven:

$$\sigma_1 = \tau = -\sigma_3 \text{ y } \sigma_2 = 0 \quad (\text{Figura Elipse 2D})$$

El lugar geométrico del esfuerzo cortante a la torsión pura es una línea recta que pasa por el origen a 45° .

Esta línea recta corta la elipse de falla en los puntos A y B.

Los valores absolutos de σ_1 y σ_3 se obtienen ~~como~~ para 2D como:

$$S_y = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2}$$

$$S_y = \sqrt{\tau^2 + \tau^2 + \tau^2} = \sqrt{3} \tau_{\max}$$

Esta relación define la resistencia a la fluencia de corte S_{ys} de cualquier material como una fracción de la resistencia a la fluencia en tensión S_y (determinada en un prueba de tensión)

$$S_{ys} = \frac{S_y}{\sqrt{3}} = 0.577 S_y$$

TEORÍA DE FALLA DUCTIL

Con base en experimentos y en la teoría de la energía de distorsión, la falla de materiales dúctiles con carga estática a la tensión es provocada por los esfuerzos cortantes.

NOTA

El número de desarrollos de esta teoría usando enfoques diferentes, en combinación con los resultados experimentales, tan cerca nos a los pronosticados, hacen de ella la mejor elección para el pronóstico de fallas, en el caso de cargas estáticas en materiales dúctiles, en los cuales las resistencia de tensión y de compresión son iguales.

~~###~~

B) TEORÍA DEL ESFUERZO CORTANTE MÁXIMO.

El rol del esfuerzo cortante en falla fue reconocido antes del desarrollo del enfoque de Von Mises.

La teoría de cortante máximo fue propuesta primero por Coulomb (1736 - 1806) y descrita más tarde por Tresca (1864). A principios del siglo XX, J. Guest realizó experimentos que confirman la teoría.

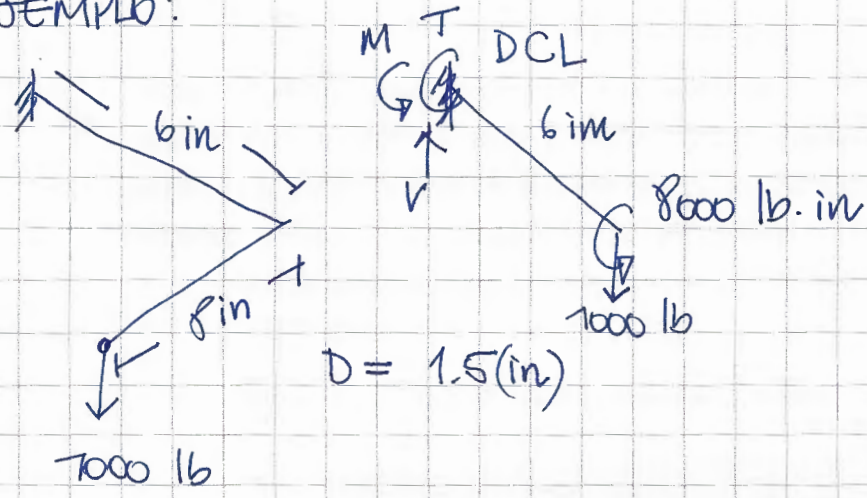
Se le conoce también con teoría de Tresca - Guest.

La teoría de cortante máximo establece que la falla ocurre cuando el esfuerzo cortante máximo en una pieza excede el esfuerzo cortante por fluencia en una muestra sujeta a tensión (la mitad de la resistencia de fluencia por tensión). En otras palabras establece que

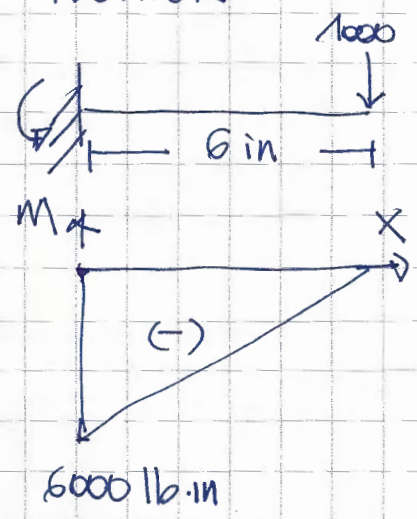
$$S_{ys} = 0.5 S_y$$

Obs: este límite es más conservador que el de la teoría de la energía de distorsión.

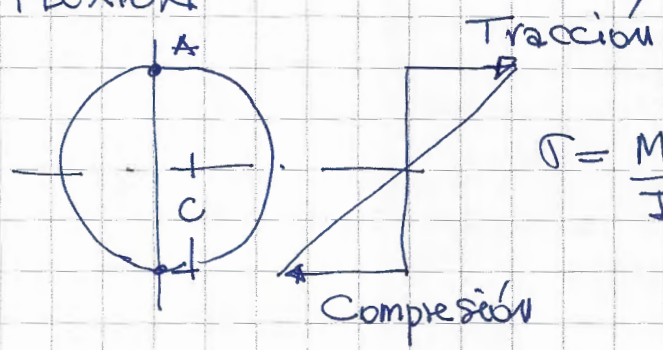
EJEMPLO:



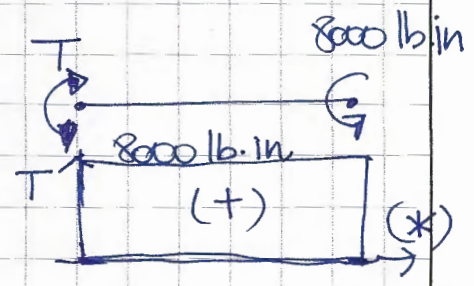
FLEXION



FLEXION



TORSION

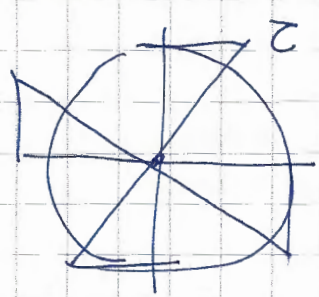


$$M = F \cdot l = 1000 \times 6 \text{ in} = 6000 \text{ lb.in}$$

$$W = \frac{I}{C} = \frac{\pi D^4}{64} \times \frac{1}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{3.14 \times (1.5)^3}{32}$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6000 \times 32}{\pi D^3} = 18108.30 \text{ psi} \left(= \frac{1 \text{ lb}}{\text{in}^2} \right)$$

TORSION



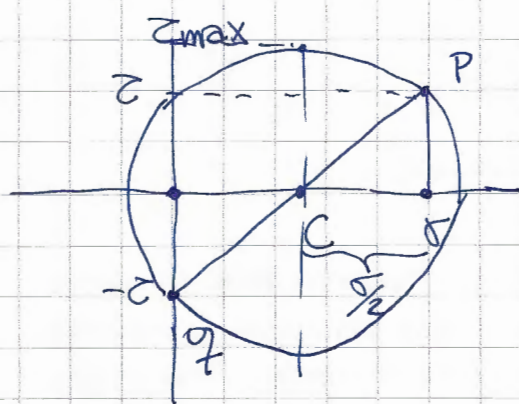
$$\tau = \frac{T \cdot r}{J} = \frac{8000 \times 32 \times \frac{D}{2}}{\pi D^4}$$

$$J = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$\tau = \frac{16 T}{\pi D^3}$$

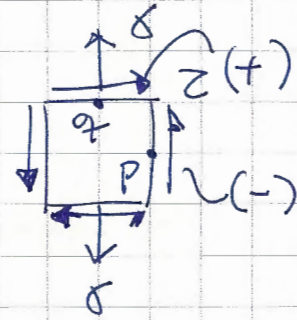
$$\tau = \frac{16 \times 8000}{\pi (1.5)^3} = 12072.20 \text{ psi}$$

Círculo de Mohr para (A)



$$q(\sigma, \tau)$$

$$P(0, -\tau)$$



$$C = \frac{\sigma}{2}$$

$$R = \tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{18168.30}{2}\right)^2 + (12072.20)^2} = 15090.25 \text{ psi}$$

$$\sigma_1 = C + R = \frac{\sigma}{2} + \tau_{\max} = 24144.4 \text{ psi}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = C - R = \frac{\sigma}{2} - \tau_{\max} = -6036.1 \text{ psi}$$

Esfuerzo efectivo de Von Mises.

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2}$$

$$\sigma' = \sqrt{(24144.4)^2 + (24144.4)(6036.1) + (6036.1)^2}$$

$$\sigma' = 27660.89 \text{ psi}$$

FACTOR DE SEG. PARA T. ENERGÍA DE ~~DEFORMACIÓN~~ DISTORSIÓN

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{47000 \text{ psi}}{27660.89 \text{ psi}} = 1.70$$

FACTOR DE SEG. PARA T. CORTANTE MÁXIMO

$$N = \frac{0.5 S_y}{\tau_{\max}} = \frac{0.5(47000) \text{ psi}}{15090.25 \text{ psi}} = 1.56$$

EJEMPLO 3-1

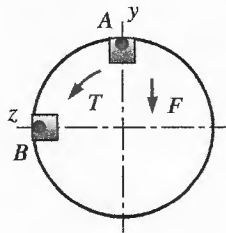
Falla de materiales dúctiles bajo carga estática

Problema Determine los factores de seguridad de la varilla de soporte mostrada en la figura 3-9, con base tanto en la teoría de la energía de distorsión como en la teoría de cortante máximo, y compárelos.

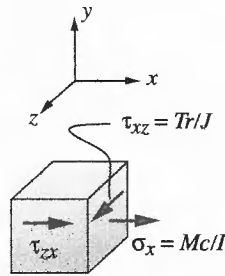
Se proporciona El material es aluminio 2024-T4 con una resistencia a la fluencia de 47 000 psi. La longitud de la varilla es $l = 6$ in y la del brazo $a = 8$ in. El diámetro exterior de la varilla es $d = 1.5$ in. La carga $F = 1\ 000$ lb.

Suposiciones La carga es estática y el montaje está a temperatura ambiente. Considere el cortante debido a la carga transversal, así como otros esfuerzos.

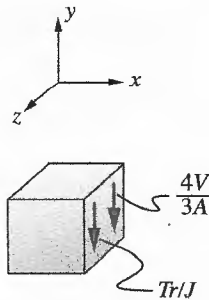
Solución Véase las figuras 3-9 y 2-33 (repetida aquí), y también el ejemplo 2-9 (p. 110), para una explicación más completa del análisis de esfuerzos en este problema.



(a) Dos puntos de interés para el cálculo de esfuerzo



(b) Elemento de esfuerzo en el punto A



(c) Elemento de esfuerzo en el punto B

1. La varilla está cargada tanto a la flexión (como una viga en voladizo) como a la torsión. El mayor esfuerzo de flexión a la tensión se encuentra en la fibra externa superior en el punto A. El mayor esfuerzo cortante por torsión se encuentra alrededor de la circunferencia exterior de la varilla. (Para más detalles, véase el ejemplo 2-9). Primero se toma un elemento diferencial en el punto A, donde ambos esfuerzos se combinan como se ilustra en la figura 2-33b. Calcule el esfuerzo de flexión normal y el esfuerzo cortante por torsión en el punto A, usando las ecuaciones 2.11b (p. 86) y 2.23b (p. 108), respectivamente.

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(Fl)c}{I} = \frac{1\ 000(6)(0.75)}{0.249} = 18\ 108 \text{ psi} \quad (a)$$

$$\tau_{xz} = \frac{Tr}{J} = \frac{(Fa)r}{J} = \frac{1\ 000(8)(0.75)}{0.497} = 12\ 072 \text{ psi} \quad (b)$$

2. Obtenga el esfuerzo cortante máximo y los esfuerzos principales que resultan de esta combinación de esfuerzos aplicados, usando las ecuaciones 2.6 (p. 75).

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{18\ 108 - 0}{2}\right)^2 + 12\ 072^2} = 15\ 090 \text{ psi}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \tau_{m\acute{a}x} = \frac{18\ 108}{2} + 15\ 090 = 24\ 144 \text{ psi}$$

$$\sigma_2 = 0 \quad (c)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \tau_{m\acute{a}x} = \frac{18\ 108}{2} - 15\ 090 = -6\ 036 \text{ psi}$$

3. Determine el esfuerzo efectivo de Von Mises a partir de los esfuerzos principales, usando la ecuación 3.7a (p. 179) con $\sigma_2 = 0$, que también tiene la forma de la ecuación 3.7c (p. 179) para el caso en 2-D.

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2}$$

$$\sigma' = \sqrt{24\ 144^2 - 24\ 144(-6\ 036) + (-6\ 036)^2} = 27\ 661 \text{ psi} \quad (d)$$

4. Usando la teoría de la energía de distorsión se obtiene ahora el factor de seguridad, aplicando la ecuación 3.8a (p. 181).

FIGURA 2-33 Repetida
Elementos de esfuerzo en los puntos A y B dentro de la sección transversal de la varilla del ejemplo 2-10

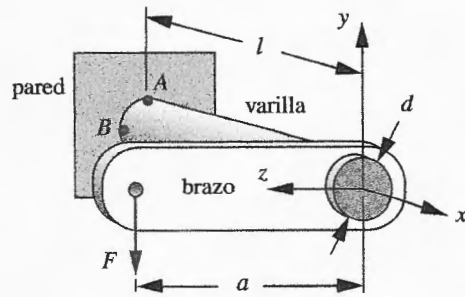


FIGURA 3-9

Soporte de los ejemplos 3-1 y 3-2

$$N = \frac{S_y}{\sigma} = \frac{47\,000}{27\,661} = 1.7 \quad (e)$$

5. Usando la teoría del esfuerzo cortante máximo se obtiene el factor de seguridad, aplicando la ecuación 3.10 (p. 182).

$$N = \frac{0.50 S_y}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{0.50(47\,000)}{15\,090} = 1.6 \quad (f)$$

6. La comparación de estos dos resultados muestra la naturaleza más conservadora de la teoría del esfuerzo cortante máximo, la cual da un factor de seguridad ligeramente menor.
7. Como la varilla es una viga corta, es necesario verificar el cortante debido a la carga transversal en el punto B sobre el eje neutro. El esfuerzo cortante transversal máximo, en el eje neutro de una varilla redonda, está dado por la ecuación 2.15c (p. 91).

$$\tau_{\text{flexión}} = \frac{4V}{3A} = \frac{4(1\,000)}{3(1.767)} = 755 \text{ psi} \quad (g)$$

El punto B está en cortante puro. El esfuerzo cortante total en el punto B es la suma algebraica del esfuerzo cortante transversal y el esfuerzo cortante por torsión, los cuales actúan sobre los mismos planos del elemento diferencial, en este caso, en la misma dirección que se indica en la figura 2-33c.

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{\text{torsión}} + \tau_{\text{flexión}} = 12\,072 + 755 = 12\,827 \text{ psi} \quad (h)$$

8. El factor de seguridad para el punto B usando la teoría de la energía de distorsión para cortante puro (ecuación 3.9b, p. 181) es

$$N = \frac{S_{ys}}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{0.577 S_y}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{0.577(47\,000)}{12\,827} = 2.1 \quad (i)$$

y aplicando la ecuación 3.10 (p. 182) en la teoría del cortante máximo

$$N = \frac{S_{ys}}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{0.50 S_y}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{0.50(47\,000)}{12\,827} = 1.8 \quad (j)$$

Otra vez, el último es más conservador.

9. Los archivos EX05-01 se encuentran en el CD-ROM.