



# Curso – Resistencia de materiales [15153]

## Clase 7 – Flexión y esfuerzo en vigas

Plan de estudios - Ingeniería Civil en Mecánica

Profesores: Matías Pacheco Alarcón ([matias.pacheco@usach.cl](mailto:matias.pacheco@usach.cl))

Aldo Abarca Ortega ([aldo.abarca@usach.cl](mailto:aldo.abarca@usach.cl))

Ayudante: Estéfano Muñoz ([estefano.munoz@usach.cl](mailto:estefano.munoz@usach.cl))

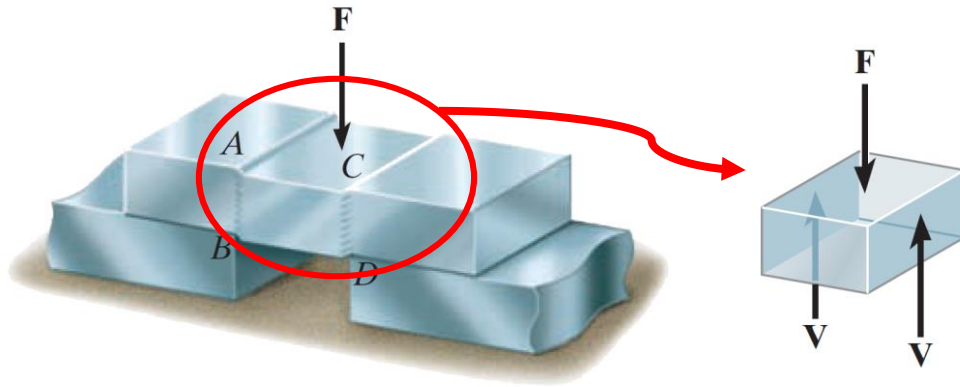
Santiago de Chile, Mayo 2019



## Casos en Resistencia de Materiales



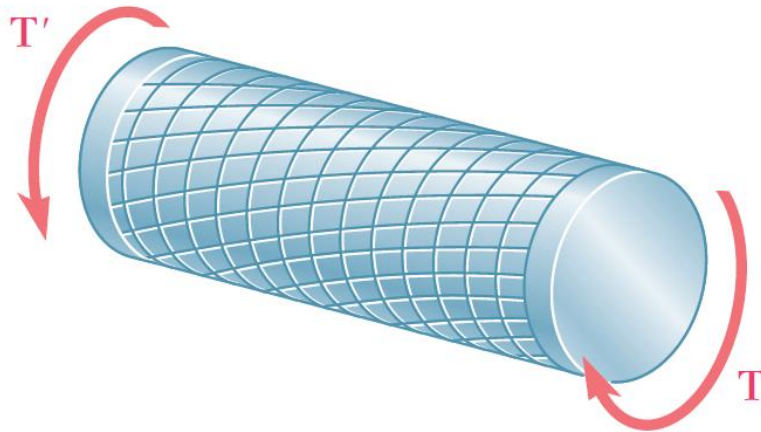
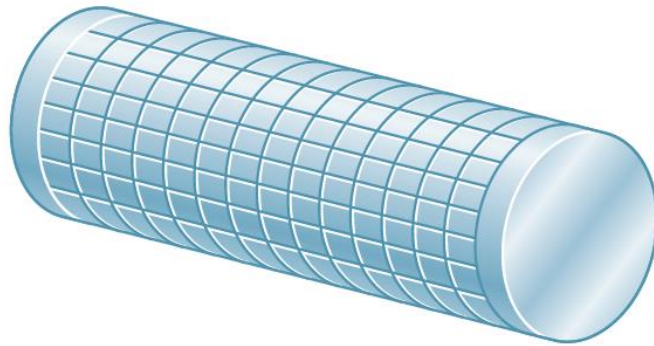
Fuerza de tracción  
o compresión ( $P$ )



Fuerza cortante o  
de corte ( $V$ )



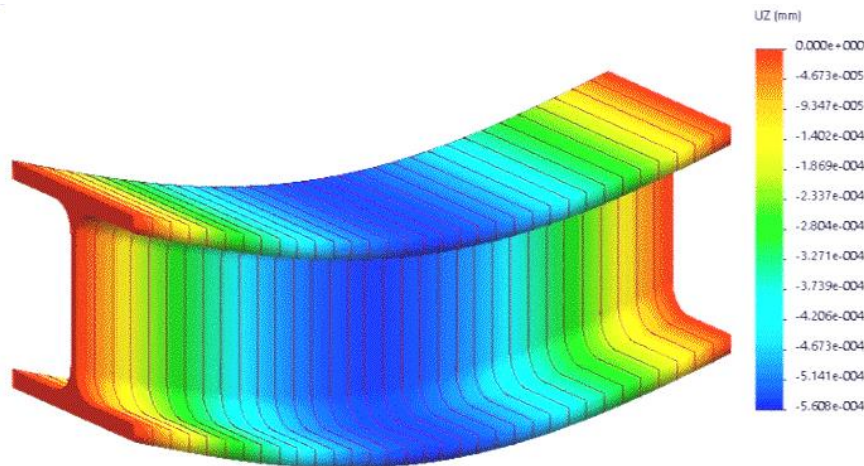
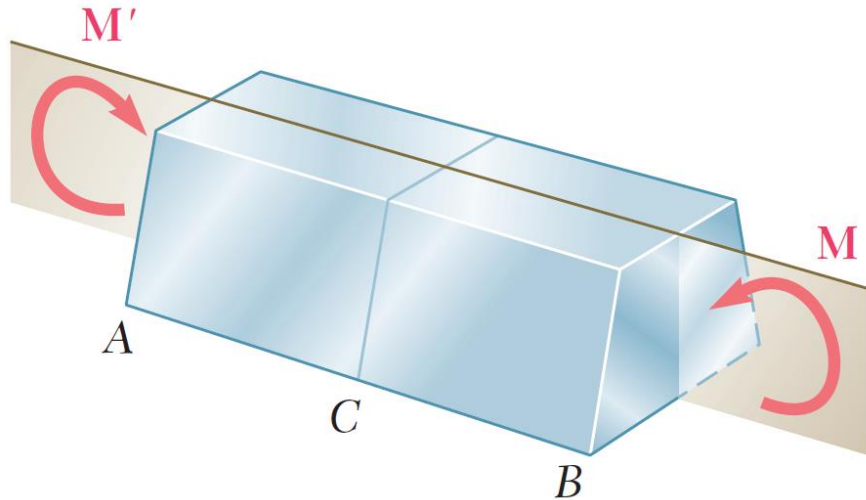
# Casos en Resistencia de Materiales



Momento Torsor ( $M$ )



# Momento flector



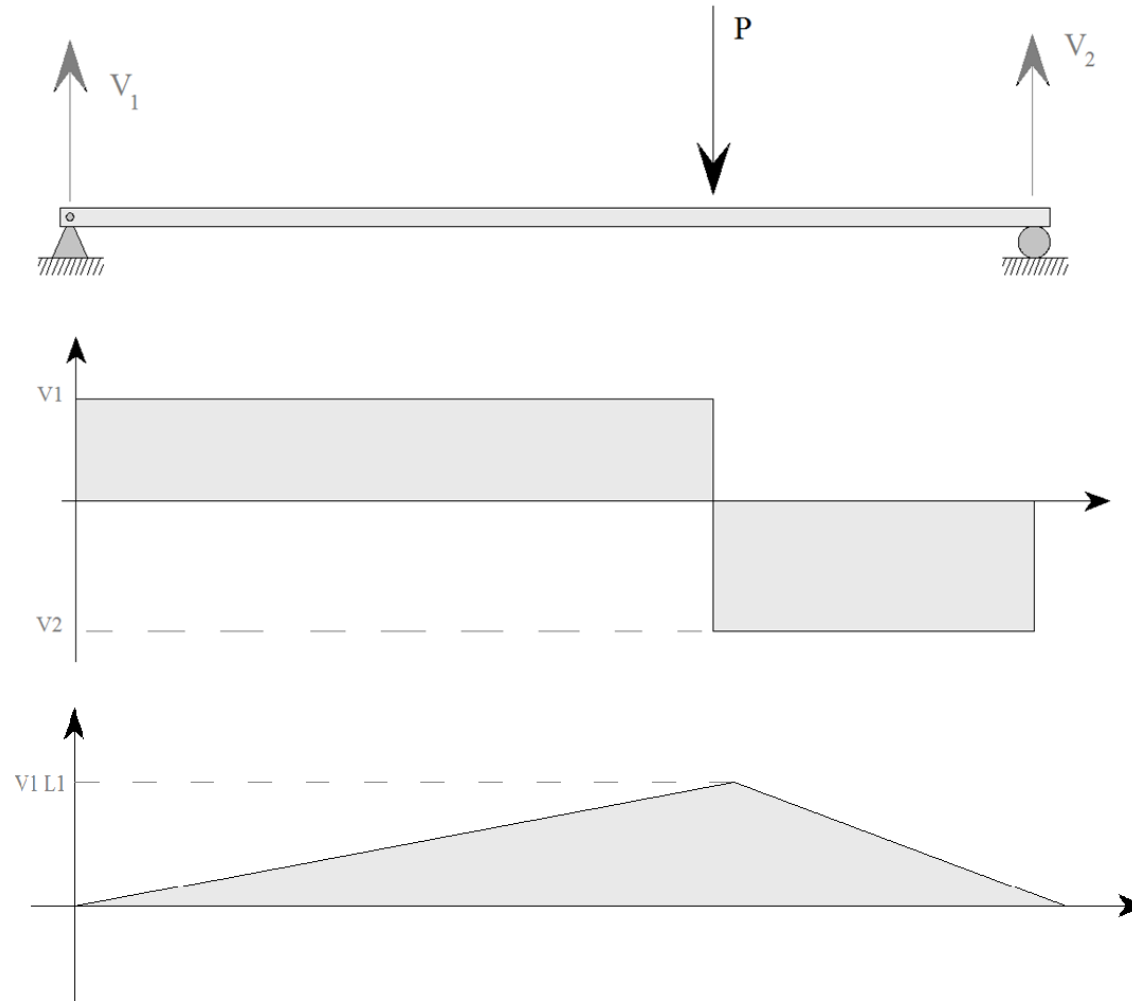
El concepto de flexión es usado en el diseño de maquinas y estructuras cuando éstas se ven sometidas a momentos en su plano longitudinal. Cuando no existen otras fuerzas aplicadas al sistema se considera flexión pura.

Muchas veces se generan esfuerzos de flexión a partir de aplicaciones de otros tipos de cargas, tales como cargas axiales excéntricas o transversales.



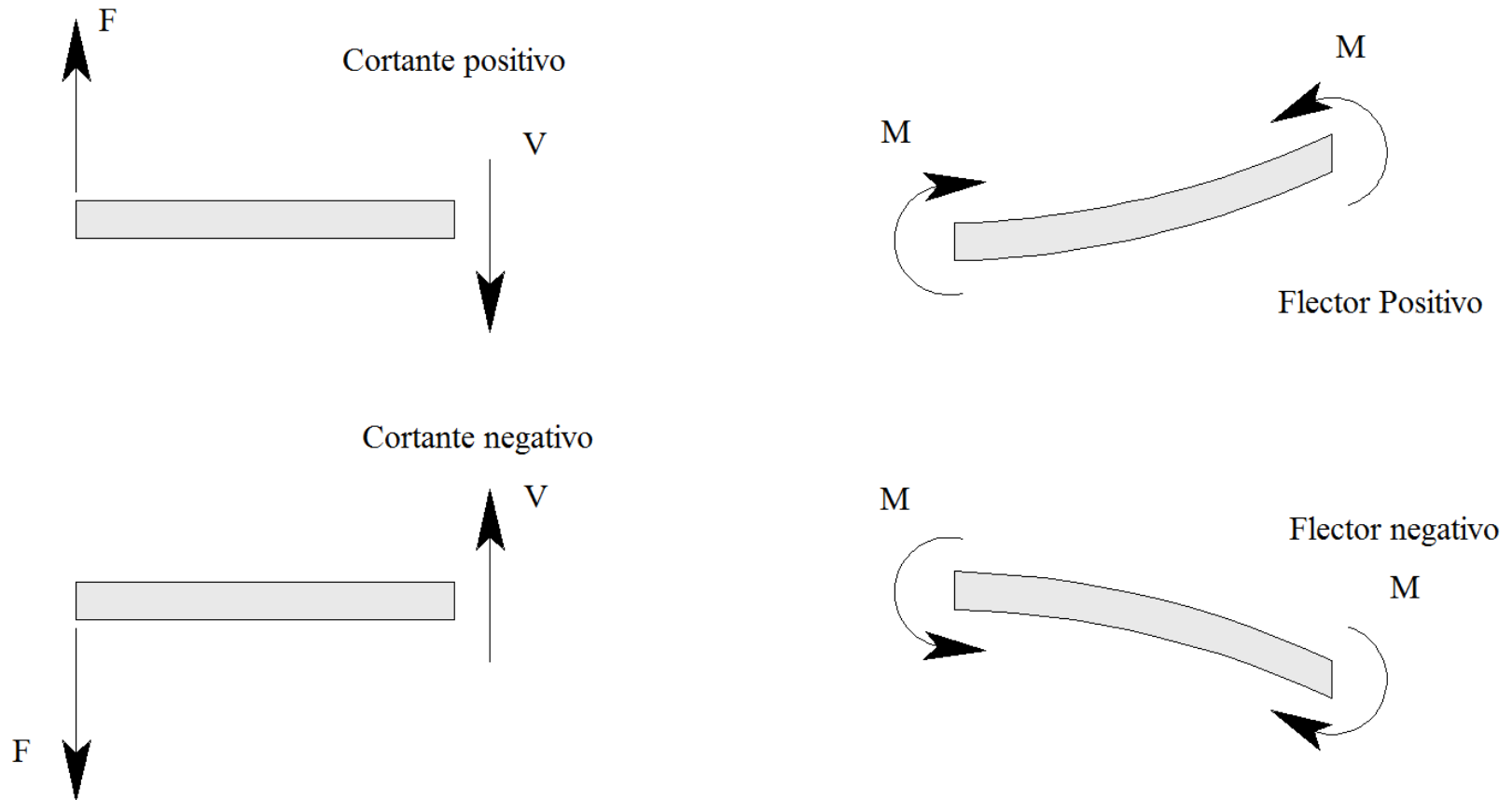


# Diagramas de momento flector y fuerza cortante



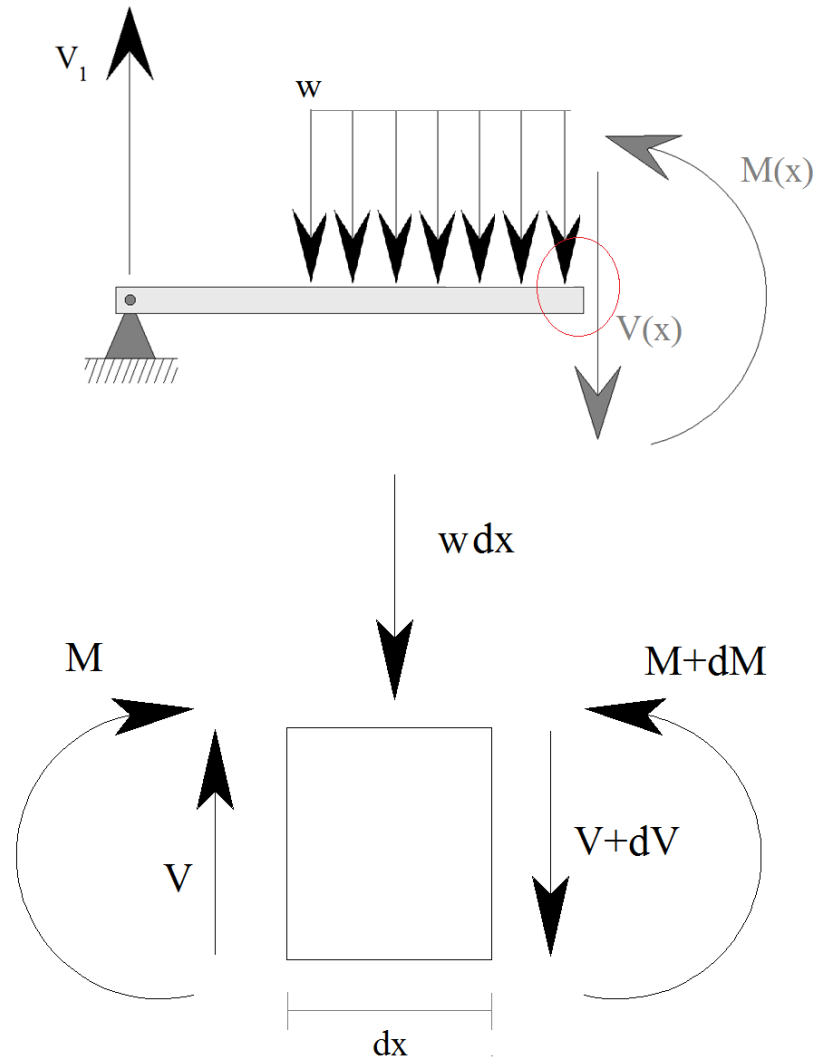


# Momento flector: Convención de signos





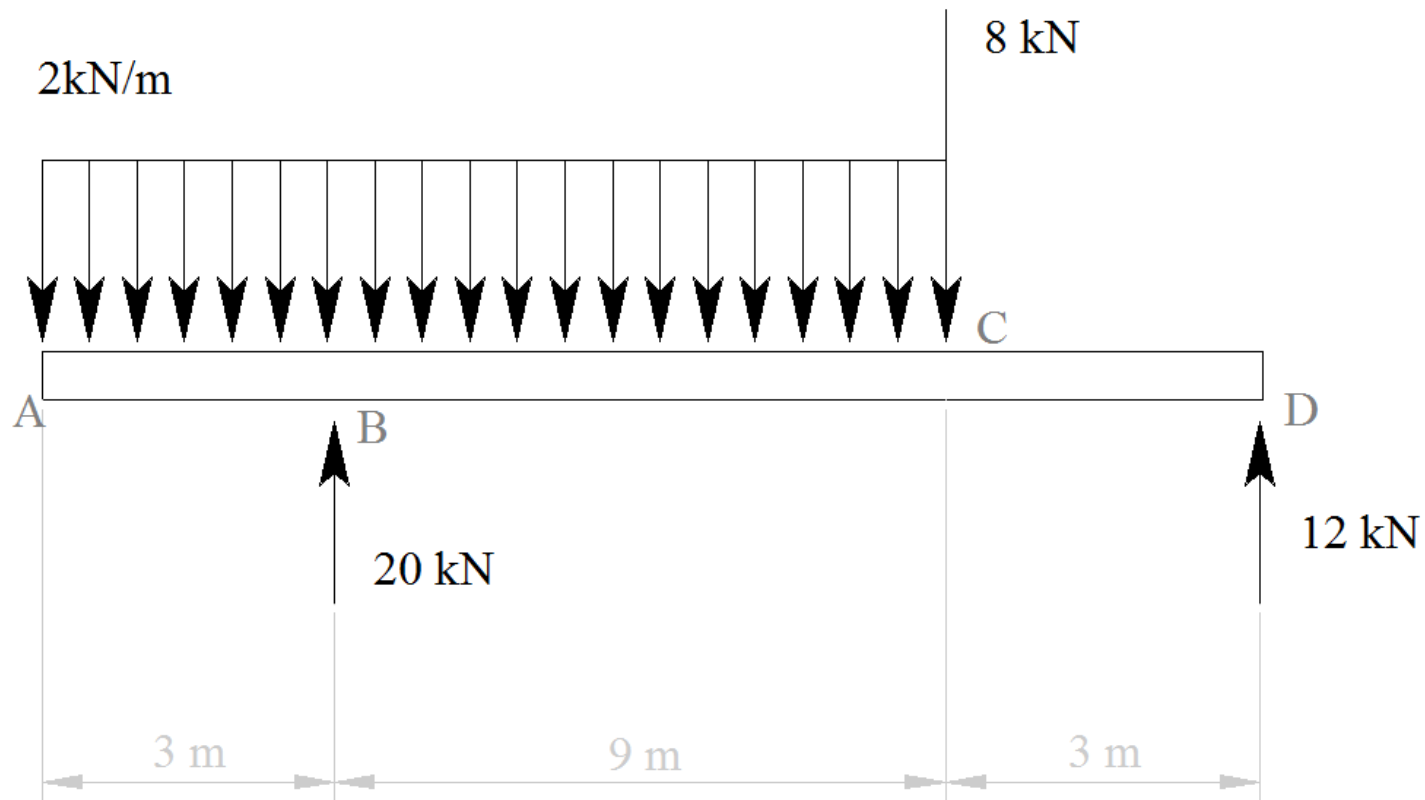
# Momento flector: Relación de cortante y flector





## Ejemplo

Para el diagrama de cuerpo libre de la viga siguiente realice el diagrama de fuerza cortante y momento flector.

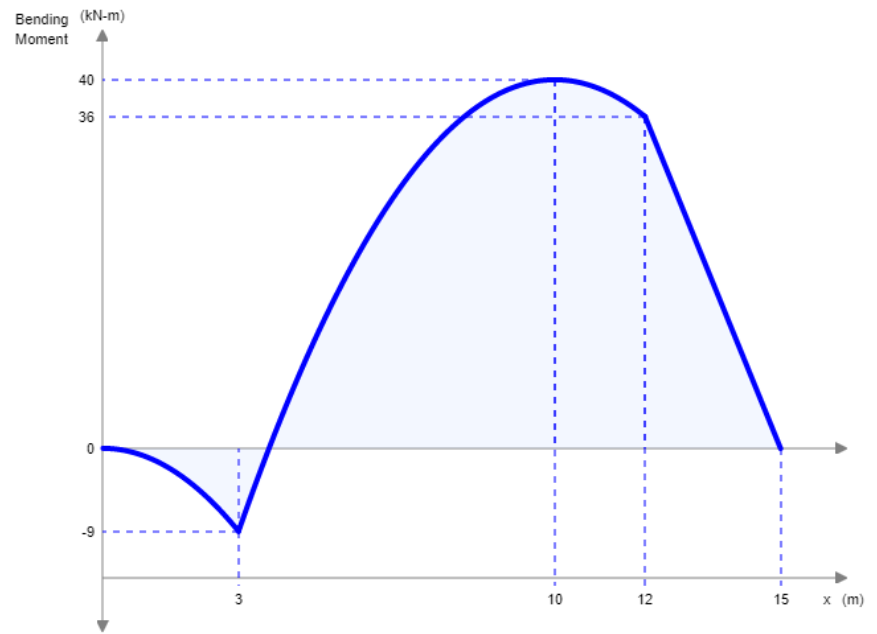
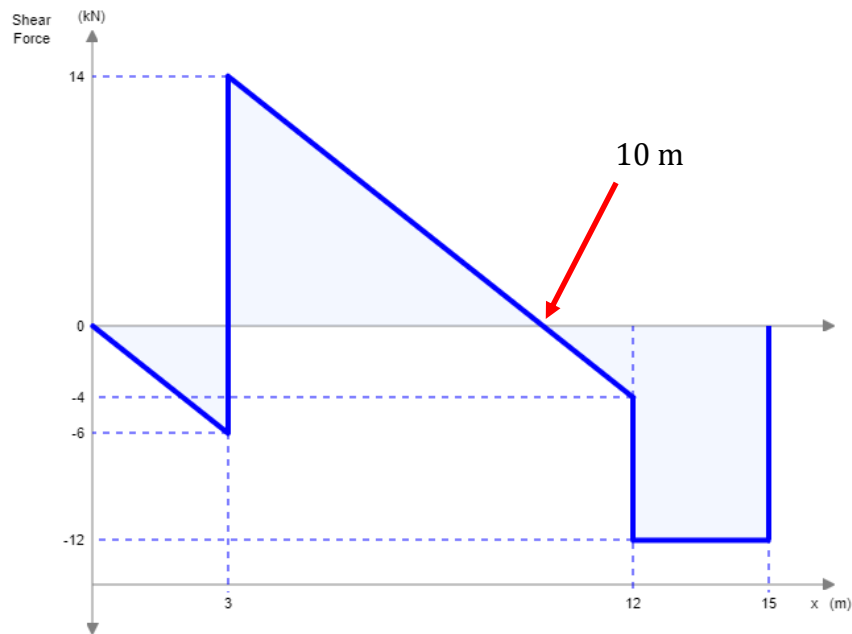






## Ejemplo

Para el diagrama de cuerpo libre de la viga siguiente realice el diagrama de fuerza cortante y momento flector.



## Esfuerzos y deformaciones en vigas

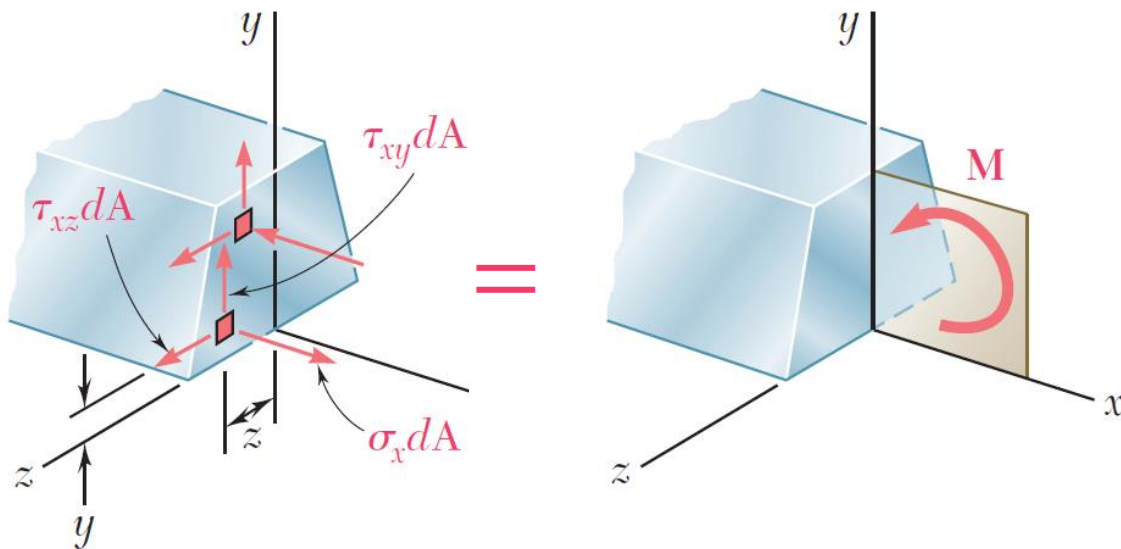
Se considera un miembro prismático con uno o dos planos de simetría longitudinales y ortogonales entre sí, en donde momentos flectores de igual magnitud atraviesan cierta porción de la misma. Se denota como  $\sigma_x$  al esfuerzo normal en un punto dado de la sección transversal y a  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  como las componentes del esfuerzo de corte.

Al realizar sumatoria de fuerzas y momentos internos:

$$\text{En } x: \int \sigma_x dA = 0$$

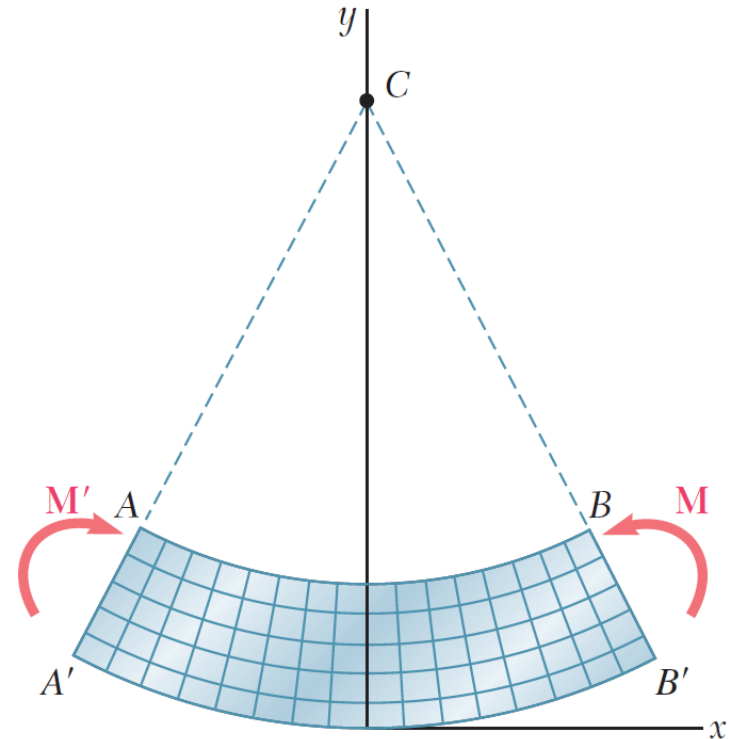
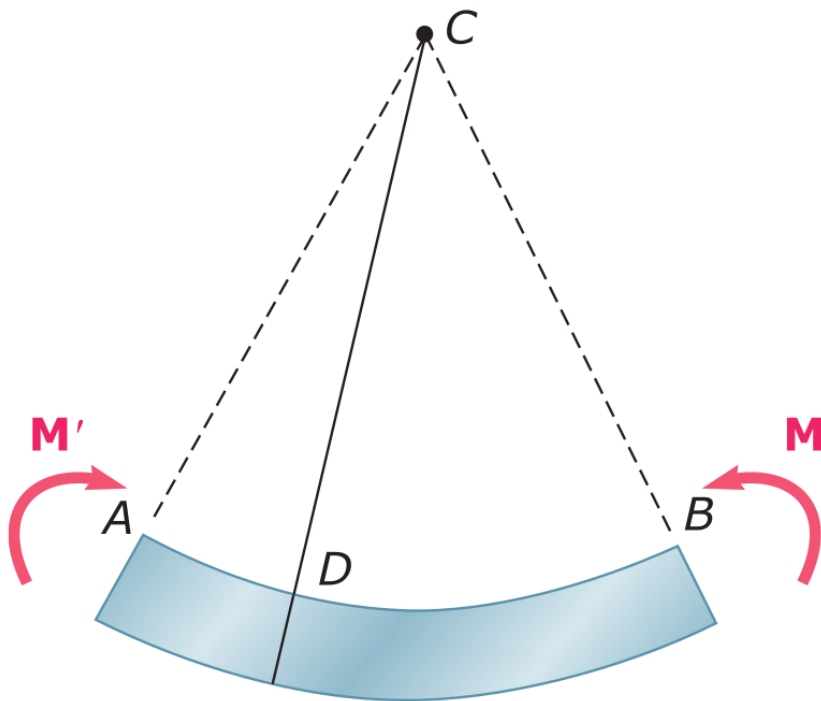
$$\text{En } y: \int z \sigma_x dA = 0$$

$$\text{En } z: \int y \sigma_x dA = M$$



## Esfuerzos y deformaciones en vigas

Debido a que el cuerpo prismático está siendo sometido a momentos flectores iguales, éste se flectirá uniformemente. La línea  $AB$  (y  $A'B'$ ) longitudinal se transformará en una sección circular con centro  $C$ . En la línea superior los elementos están siendo sometidos a compresión y en la sección de abajo a tracción (se tienen estados de esfuerzo uniaxial). Por lo tanto debe haber una zona paralela en donde  $\epsilon_x$  y  $\sigma_x$  sean 0.



# Esfuerzos y deformaciones en vigas

El eje neutro determina esfuerzos y deformaciones nulos, pasando desde un estado de tracción a compresión. Se tomará un nuevo sistema coordinado desde este punto.

Se denota  $\rho$  como el radio del arco DE, siendo  $\theta$  el ángulo central.

$$L = \rho\theta$$

Considerando una distancia menor hasta el eje neutro (línea JK):

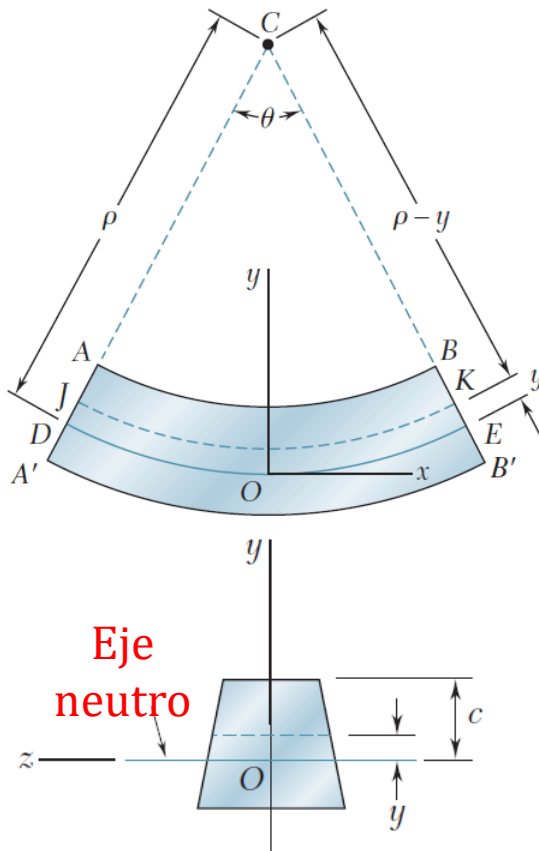
$$L' = (\rho - y)\theta$$

Así la deformación de JK es

$$\delta = L' - L = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

Entonces la deformación longitudinal  $\epsilon_x$  en JK

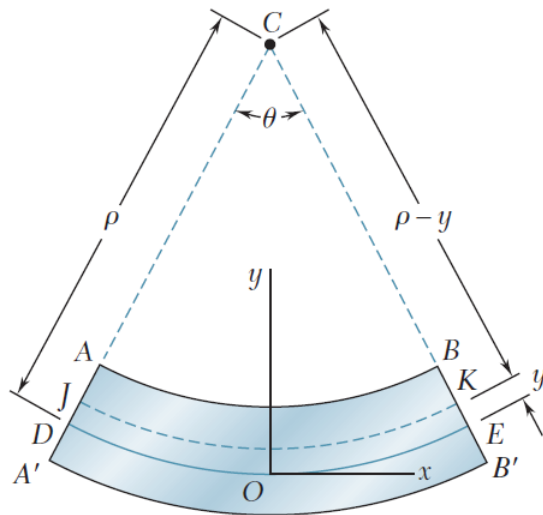
$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} \rightarrow \epsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$



# Esfuerzos y deformaciones en vigas

El eje neutro determina esfuerzos y deformaciones nulos, pasando desde un estado de tracción a compresión. Se tomará un nuevo sistema coordinado desde este punto.

Como cada sección transversal permanece plana, ocurren deformaciones en cada plano paralelo al neutro. Así entonces, la deformación normal longitudinal  $\epsilon_x$  varía linealmente con la distancia  $y$  desde el eje neutro.

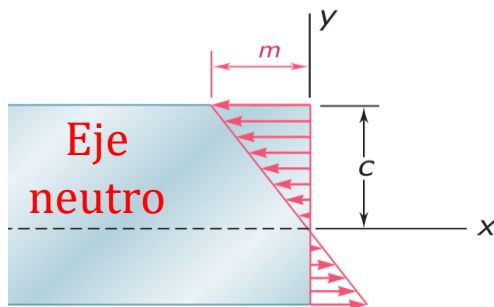


$$\epsilon_{max} = \frac{c}{\rho} \rightarrow \epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_{max}$$

Considerando deformaciones dentro de la zona elástica, la Ley de Hooke para esfuerzos uniaxiales aplica de la siguiente forma:

$$\sigma_x = E \epsilon_x \rightarrow E \epsilon_x = -\frac{y}{c} (E \epsilon_{max}) \rightarrow \sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_{max}$$

En la zona elástica el esfuerzo normal varía linealmente con la distancia desde el eje neutro.



# Esfuerzos y deformaciones en vigas

El eje neutro determina esfuerzos y deformaciones nulos, pasando desde un estado de tracción a compresión. Se tomará un nuevo sistema coordinado desde este punto.

Pese a lo anterior, determinar la ubicación de la superficie neutra es más complicado (y el valor de esfuerzo máximo) y se asumirá suma de esfuerzos en la sección transversal igual a 0:

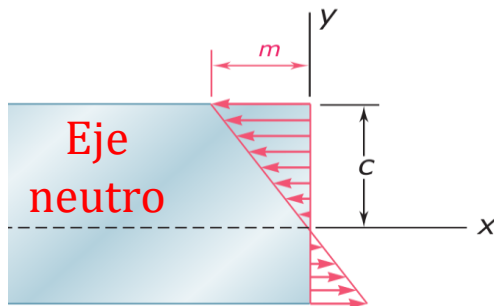
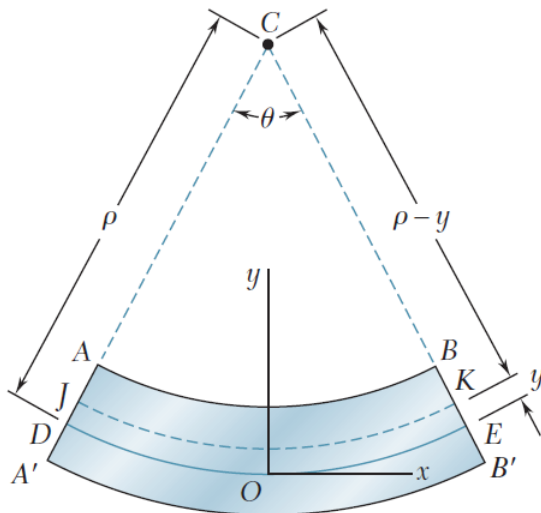
$$\int \sigma_x dA = \int \left(-\frac{y}{c} \sigma_{max}\right) dA = -\frac{\sigma_{max}}{c} \int y dA = 0 \rightarrow \int y dA = 0$$

El primer momento de área en la sección transversal en el eje neutro debe ser 0. Por lo tanto, mientras la flexión se mantenga en la zona elástica, el eje neutro siempre pasará por el centroide de la sección.

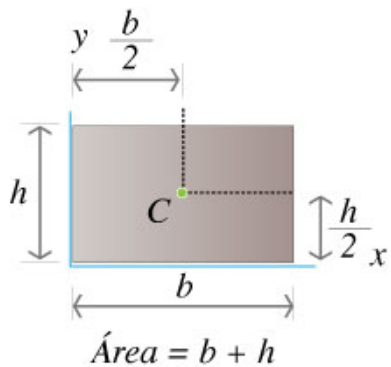
$$\int (-y \sigma_x dA) = \int (-y) \left(-\frac{y}{c} \sigma_{max}\right) dA = M \rightarrow \frac{\sigma_{max}}{c} \int y^2 dA = M$$

Finalmente

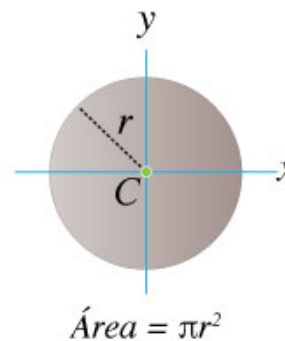
$$\sigma_{max} = -\frac{Mc}{I} \quad \text{ó} \quad \sigma_x = -\frac{My}{I}$$



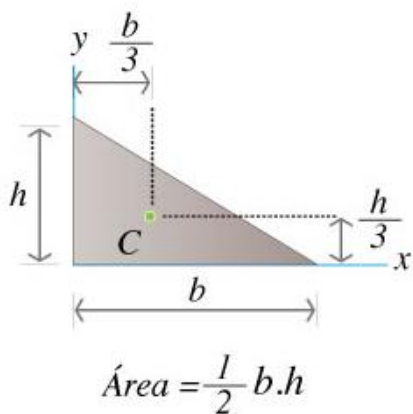
# Centroides (baricentros) de área



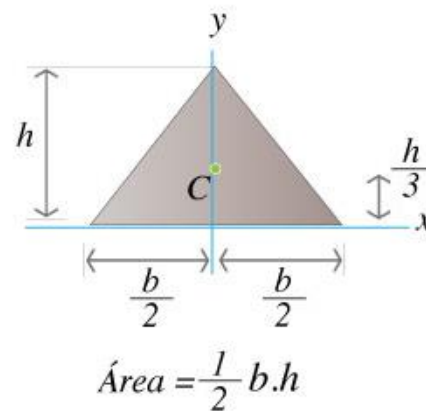
Rectángulo



Círculo



Triángulo  
rectángulo

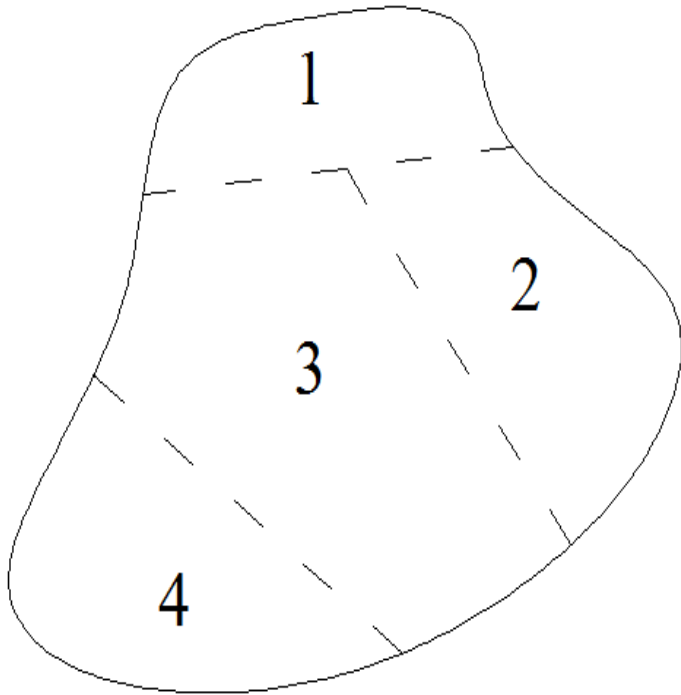


Triángulo  
isósceles



## Centroides (baricentros) de área

Si los centroides de área 1,...,n son conocidos, éstos pueden ser sumados



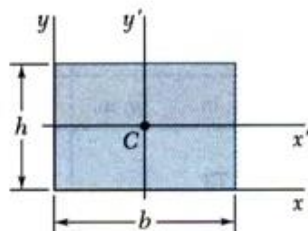
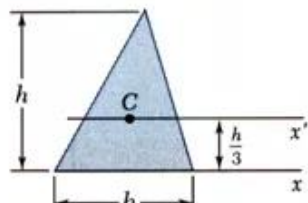
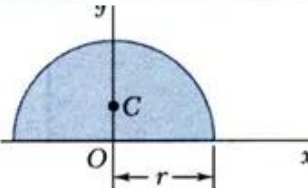
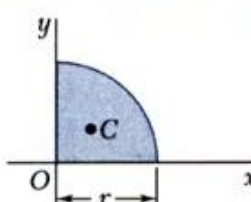
$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_1 dA + \int y_2 dA + \dots + \int y_n dA}{\sum A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \dots + \bar{y}_n A_n}{\sum A_i} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i}$$



## Momentos de inercia

Rectangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Semicircle		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Quarter circle		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$

El segundo momento de área o momento de inercia de un área  $A$  con respecto a los ejes  $x$  e  $y$  son

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I = \sum A_i r_i^2$$

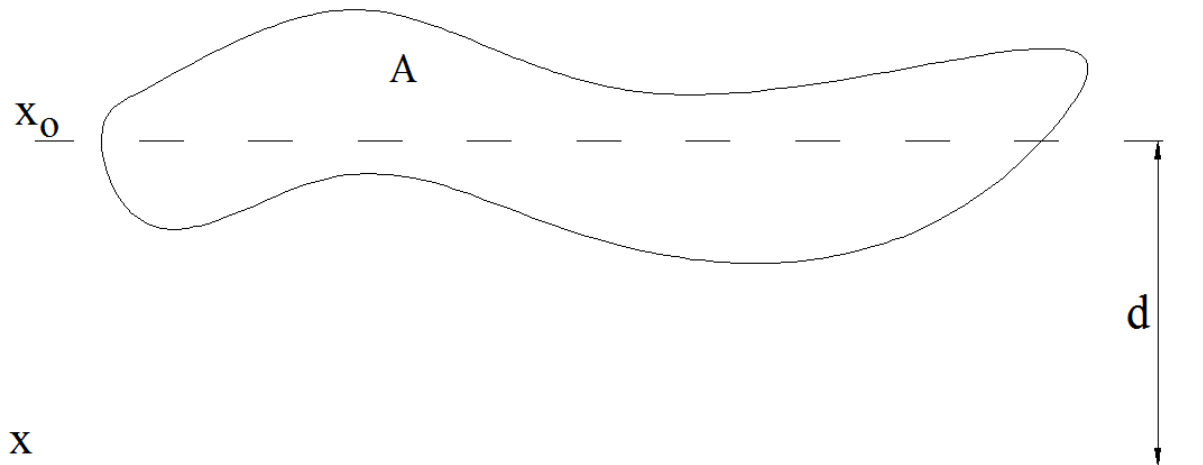


# Momentos de inercia: Teorema de Steiner

El teorema de ejes paralelos considera un momento de inercia  $I_x$  de un área con respecto a un eje  $x$  arbitrario (en este caso  $x_0$ ). Considerando una distancia  $d$  desde el eje  $x$  al  $x_0$

$$I_x = I_{x_0} + Ad^2$$

Inercia respecto a nuevo eje      Inercia respecto al eje original      Área de la sección estudiada





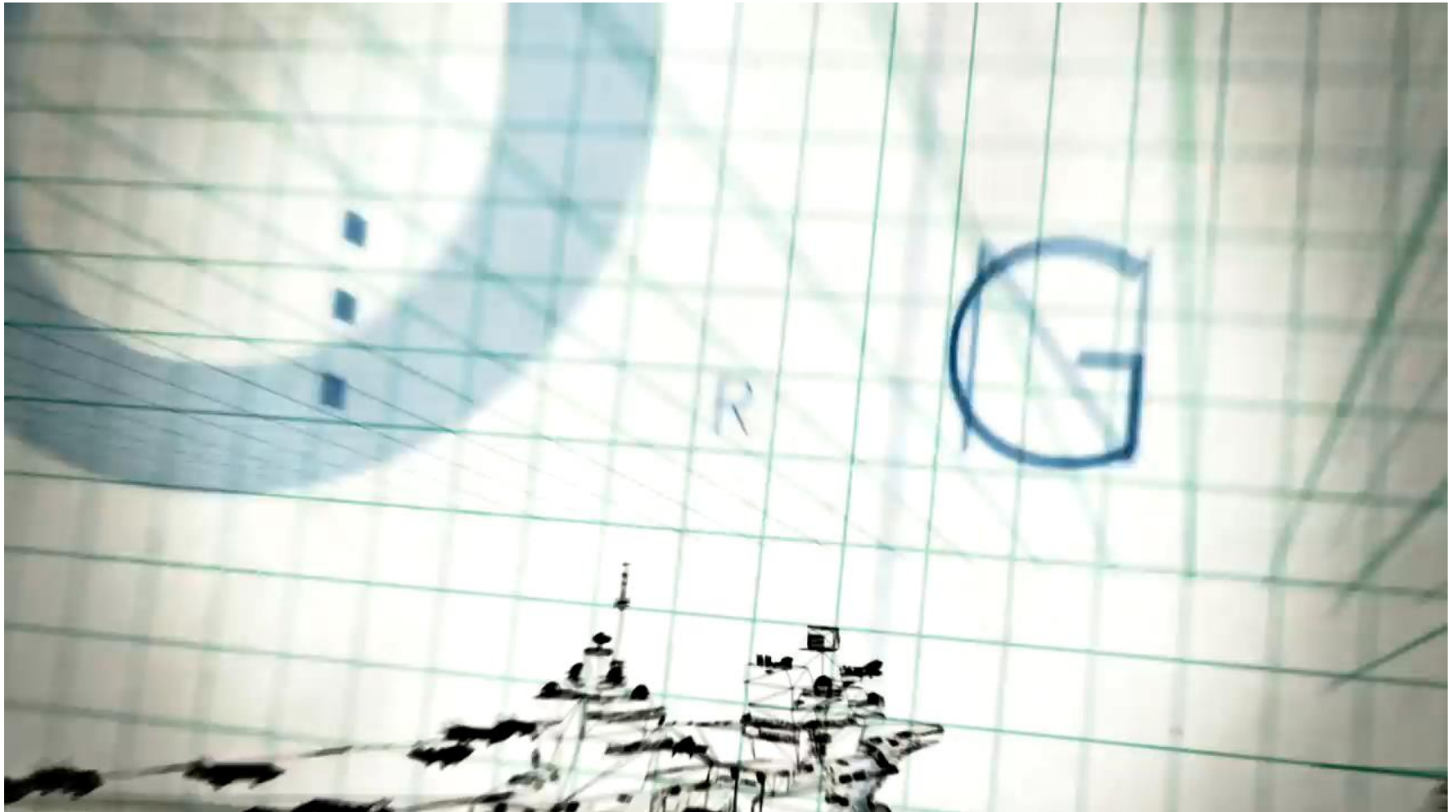
## Puente más alto del mundo: Millau Bridge



Longitud: 2460 m. Ancho: 32m. Altura: 343m. Coste total: aprox 400M €.



## Puente más alto del mundo: Millau Bridge





# ¿Consultas?

## **Curso – Resistencia de Materiales [15153]**

Plan de estudios - Ingeniería Civil en Mecánica

Profesores: Matías Pacheco Alarcón ([matias.pacheco@usach.cl](mailto:matias.pacheco@usach.cl))

Aldo Abarca Ortega ([aldo.abarca@usach.cl](mailto:aldo.abarca@usach.cl))

Ayudante: Estéfano Muñoz ([estefano.munoz@usach.cl](mailto:estefano.munoz@usach.cl))

Santiago de Chile, Mayo 2019