DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Curso – Resistencia de materiales [15153]

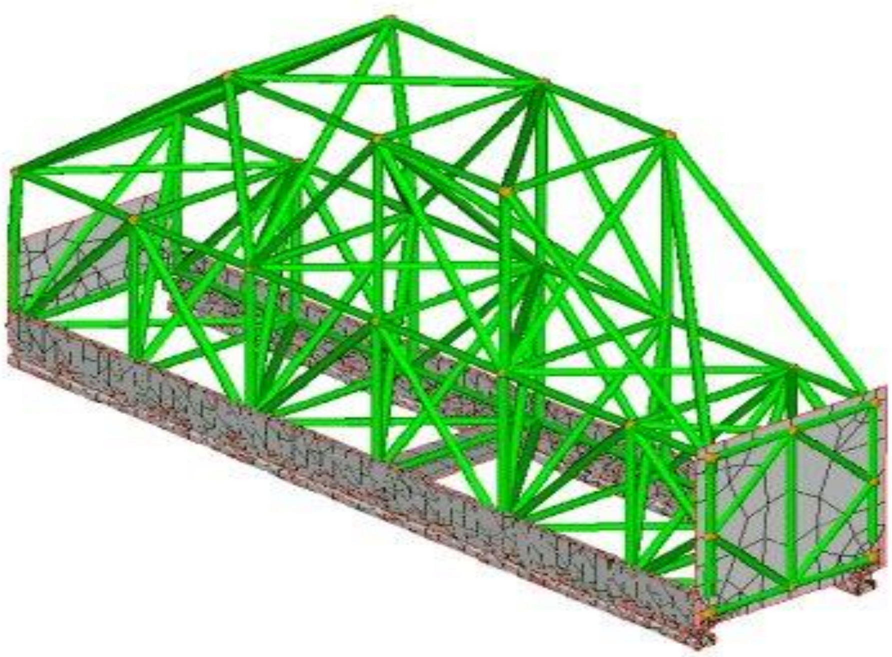
Clase 5 – Casos hiperestáticos, carga térmica y teorema de Castigliano

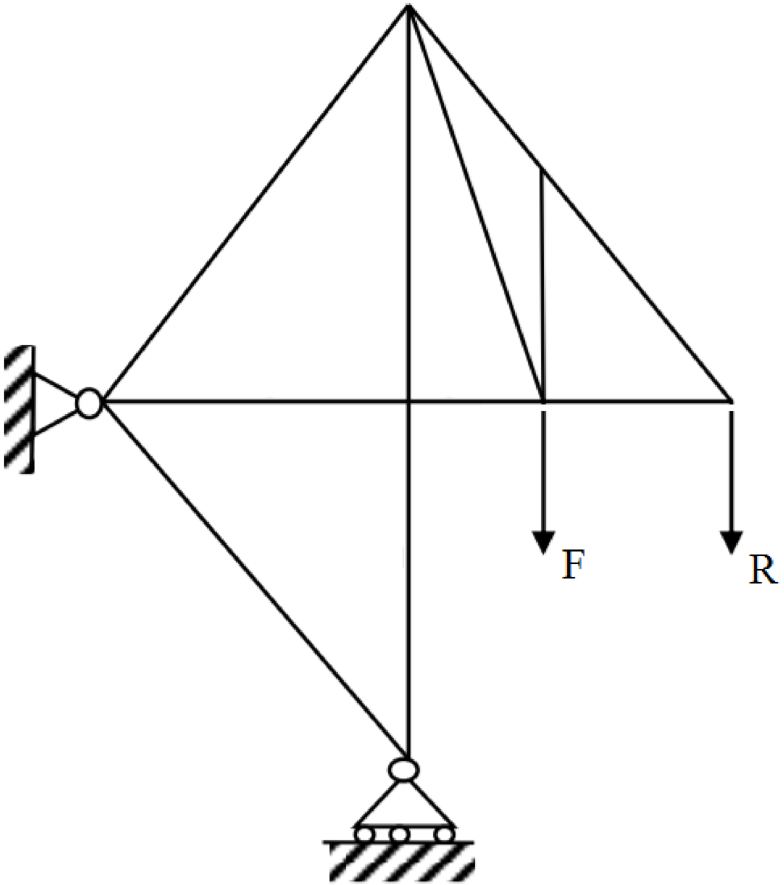
Plan de estudios - Ingeniería Civil en Mecánica

Profesores: Matías Pacheco Alarcón (**matias.pacheco@usach.cl**)
Aldo Abarca Ortega (**aldo.abarca@usach.cl**)
Ayudante: Estéfano Muñoz (**estefano.munoz@usach.cl)**

Santiago de Chile, Abril 2019

Estructuras de barras

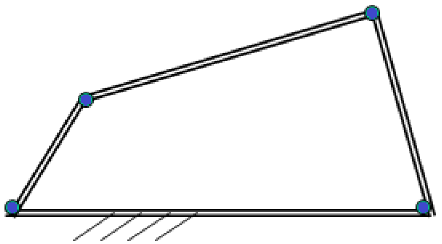




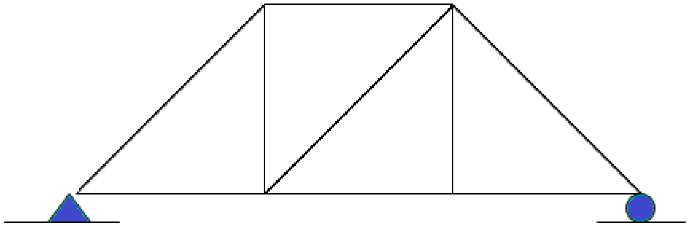
Estructuras de sólo barras

Se tienen los siguientes casos

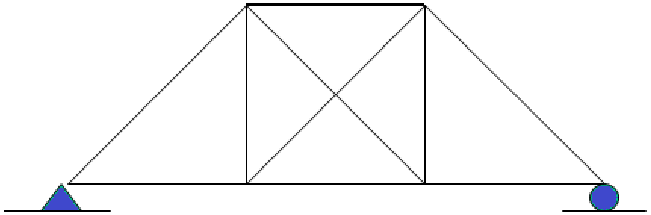
$2N > B + 3$ Mecanismo



$2N = B + 3$ Isoestática

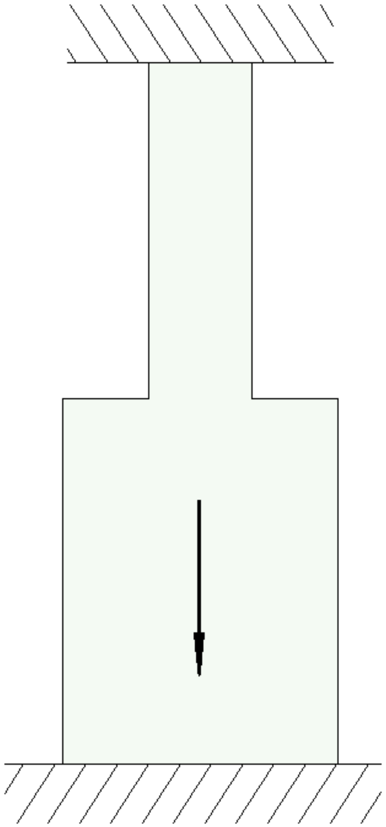


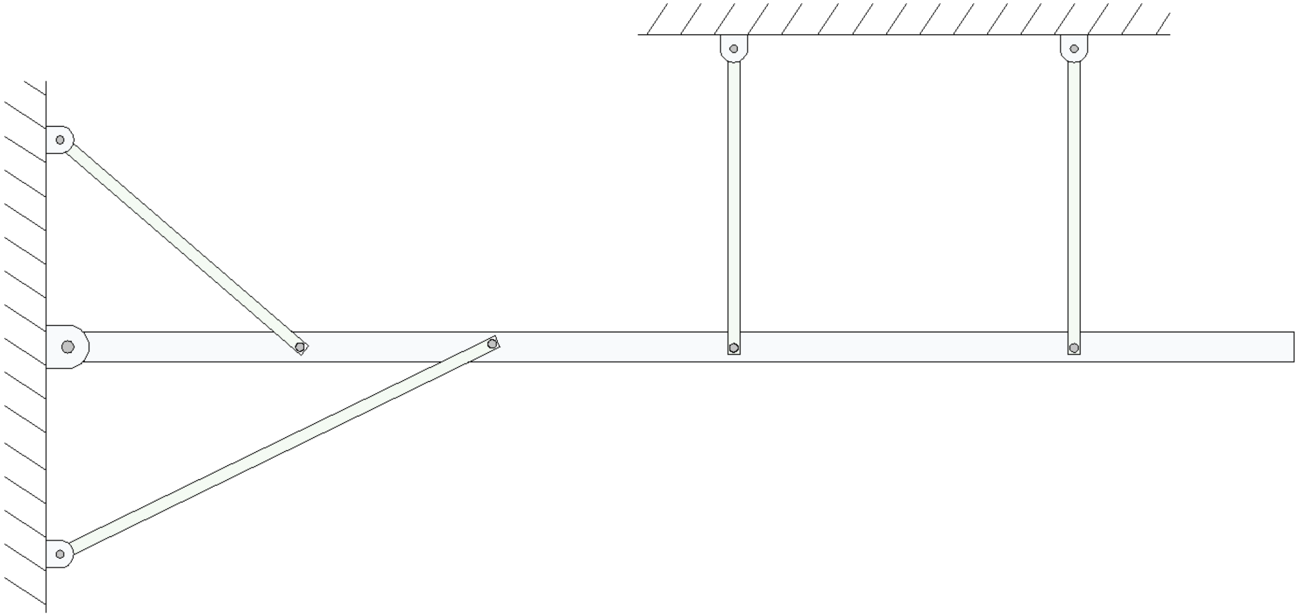
$2N < B + 3$ Hiperestática



Sistemas hiperestáticos

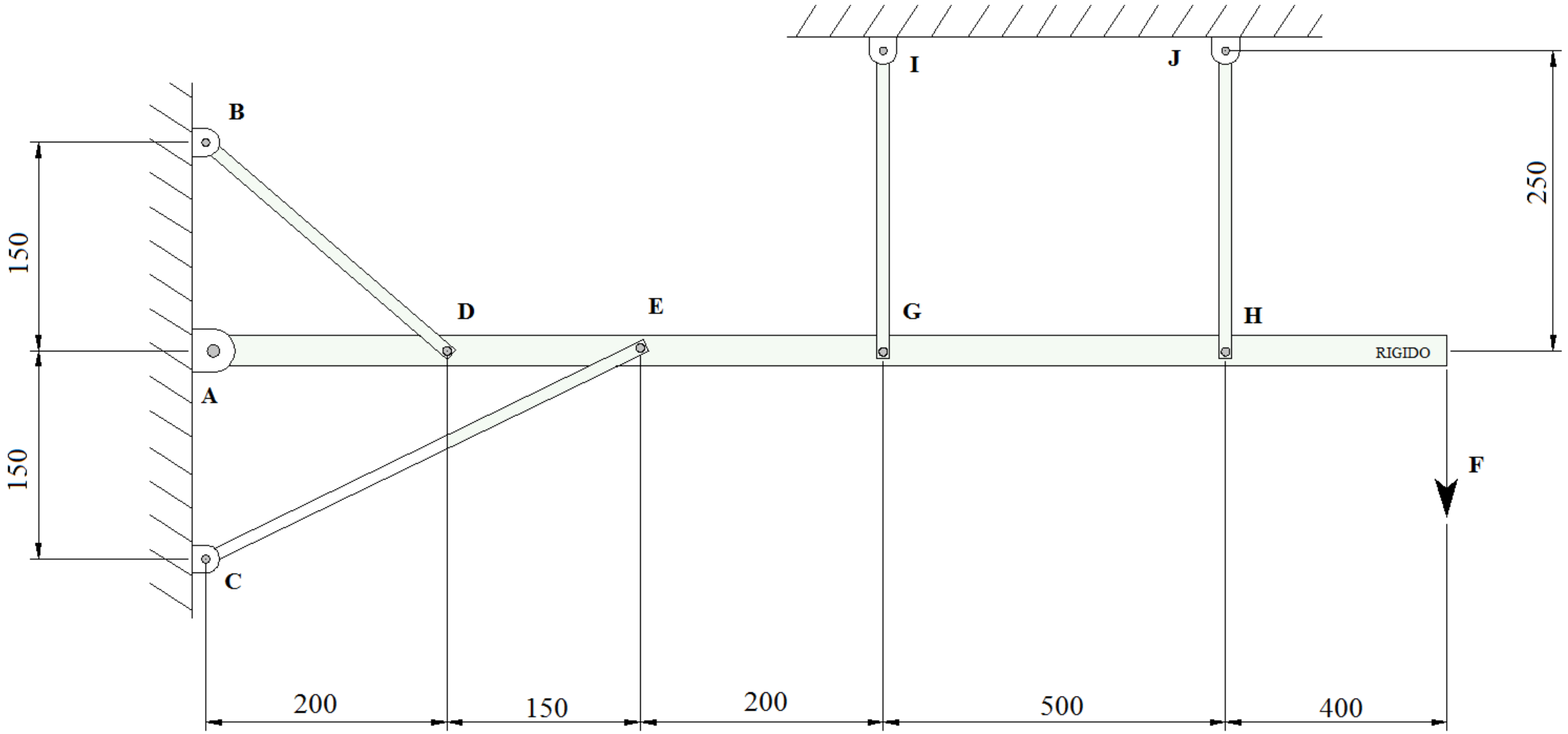
Los sistemas hiperestáticos tienen mas reacciones externas de las necesaria para mantener el equilibrio estático.





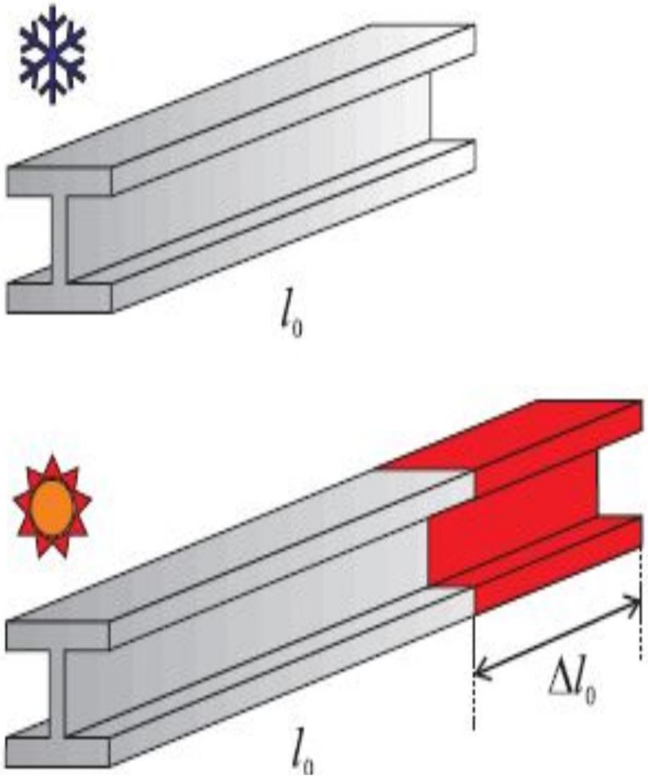
Ejemplo

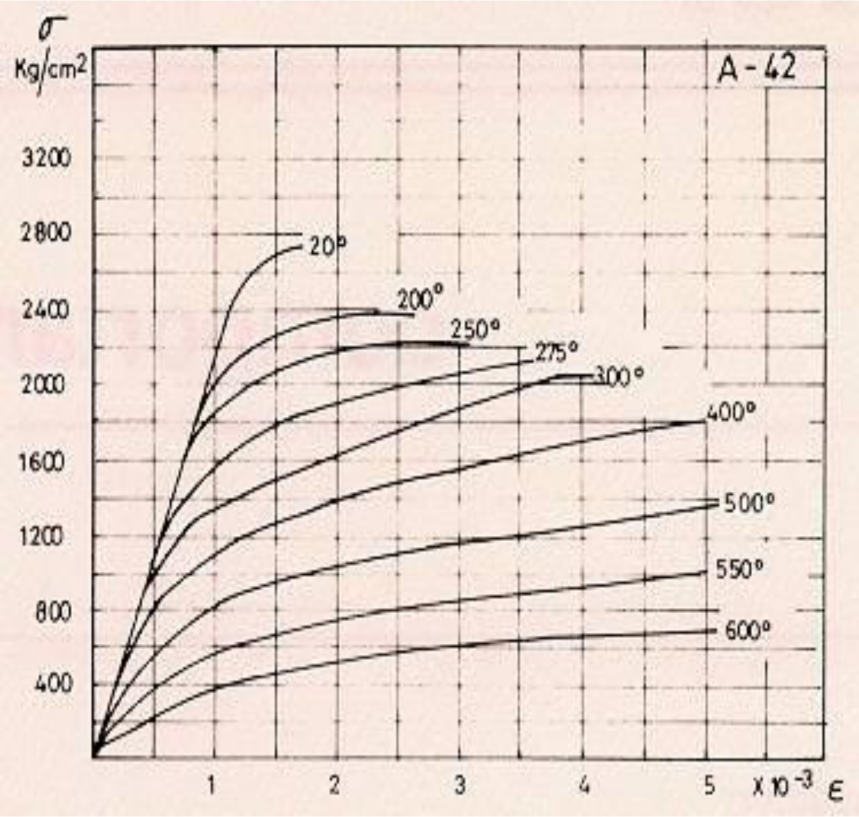
Se tiene la estructura de la figura donde la viga AH es rígida, a la cual se articulan la barras BD, CE, IG, JH. Las barras son de acero (E=210 [GPa]) y todas tienen la misma área transversal de 300 [mm2]. Calcule los esfuerzos en todas las barras si la fuerza es de 10 [KN].



Efecto de la temperatura

Se tienen los siguientes efectos:





Junta de dilatación o expansión en un puente. Evita que al dilatarse los materiales, el puente se deforme debido a las enormes tensiones.

Efecto de la temperatura

Junta de dilatación o expansión en un puente. Evita que al dilatarse los materiales, el puente se deforme debido a las enormes tensiones.

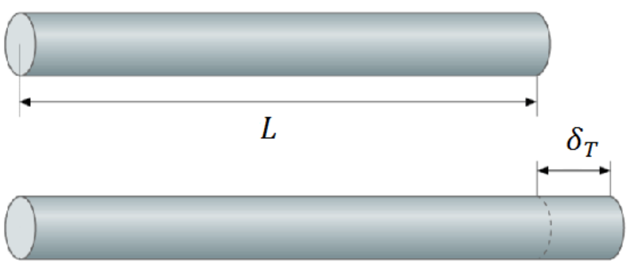
DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA
MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Efecto de la temperatura

En la foto de arriba, tomada el 24 de julio de 1978, las vías de ferrocarril extremadamente deformadas cerca de Asbury Park, Nueva Jersey, condujeron al descarrilamiento de un coche de pasajeros, que se puede ver en el fondo.

Efecto de la temperatura

Se tienen los siguientes efectos:



Dilatación térmica: $\delta_T = \alpha(\Delta T)L$

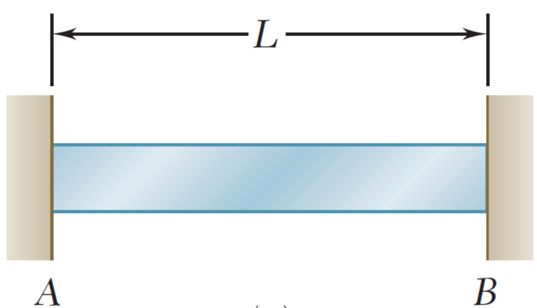
Donde:

α: Es el coeficiente lineal de expansión térmica. Es una propiedad del material y sus unidades son (1/°F) en el sistema FPS y (1/°C) ó (1/K) en el SI.

ΔT: Es el cambio de temperatura en el cuerpo.

L: Es la longitud inicial del cuerpo.

δ_T: Es la dilatación térmica del cuerpo.



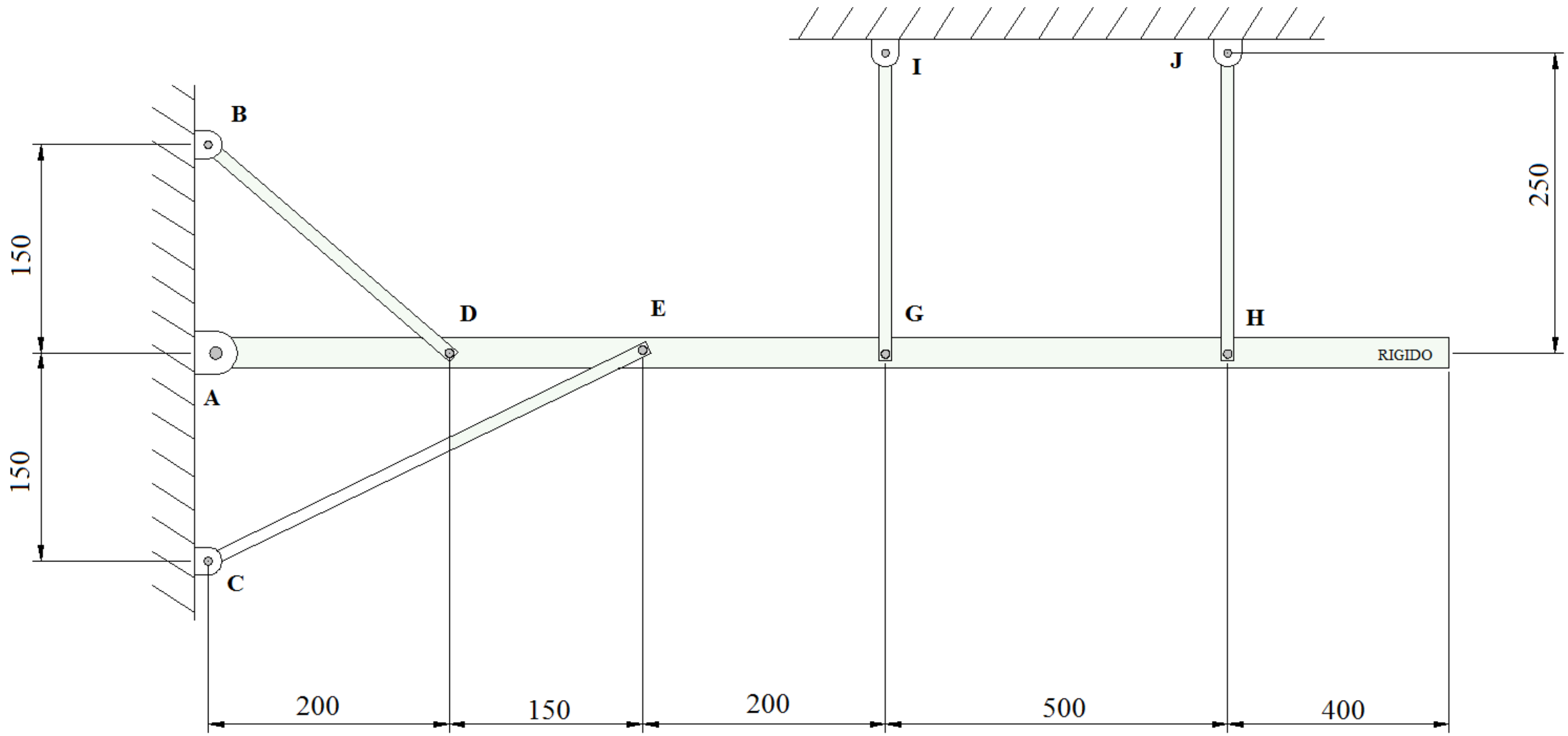
(a)

Si el cuerpo que sufre cambios de temperatura no se puede dilatar o contraer libremente, entonces sufrirá "esfuerzos térmicos" que deben ser considerados en un análisis estático.

DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA
MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

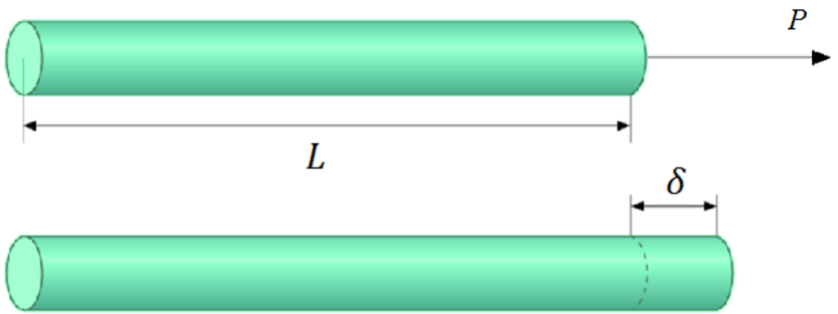
Ejemplo

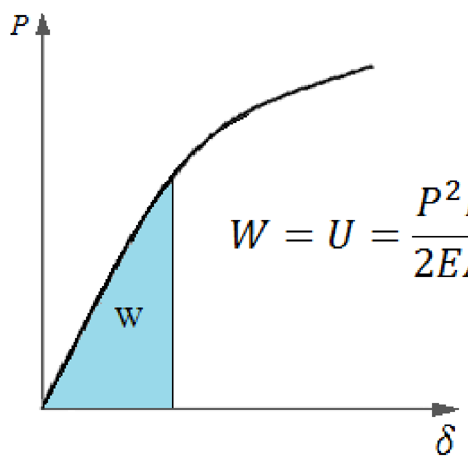
Se tiene la estructura de la figura donde la viga AH es rígida, a la cual se articulan la barras BD, CE, IG, JH. Las barras son de acero (E=210 [GPa], $\alpha = 12 * 10^{-6}$, [1/C°].) y todas tienen la misma área transversal de 300 [mm2]. Calcule los esfuerzos en todas las barras si la temperatura aumenta en 20 [C°].



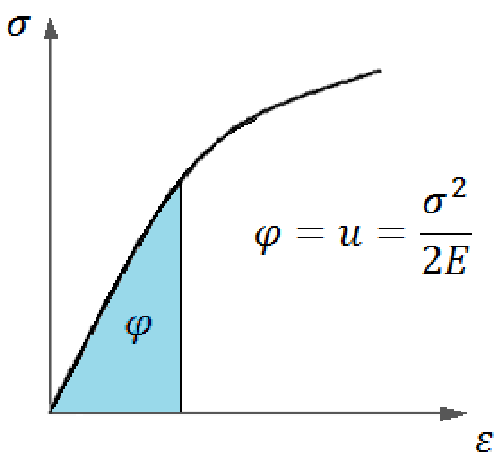
Energía de deformación

Se tiene el siguiente caso





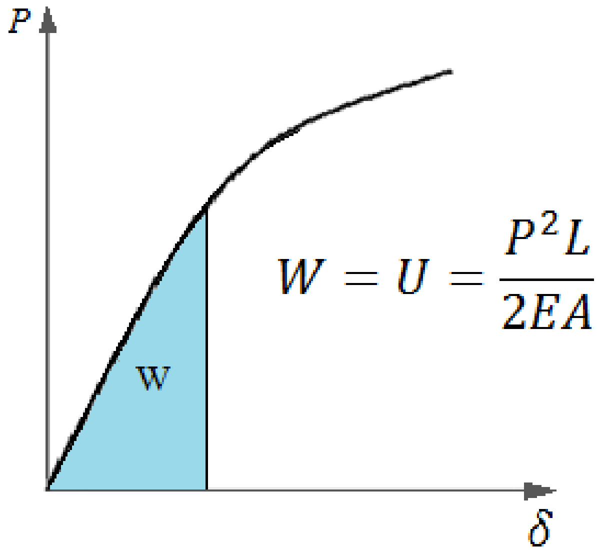
$$W = U = \frac{P^2 L}{2EA}$$



$$\varphi = u = \frac{\sigma^2}{2E}$$

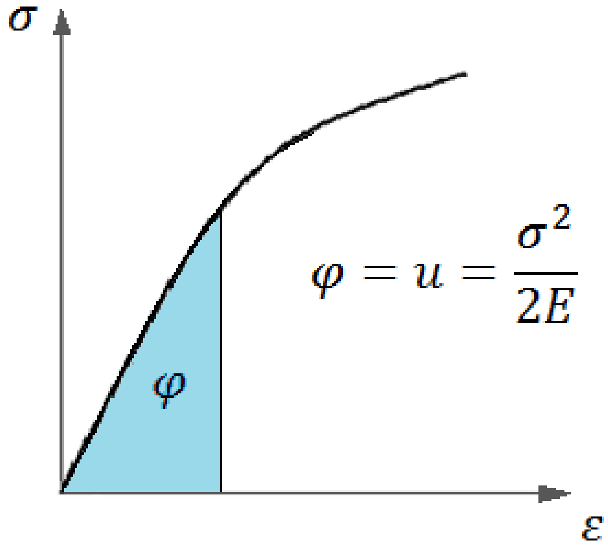
Energía de deformación

Luego



$$W = U = \frac{P^2 L}{2EA}$$

Energía potencial elástica: Energía almacenada que resulta de aplicar una fuerza para deformar un cuerpo elástico. La energía queda almacenada hasta que se quita la fuerza y el objeto elástico regresa a su forma original, realizando un trabajo en el proceso.

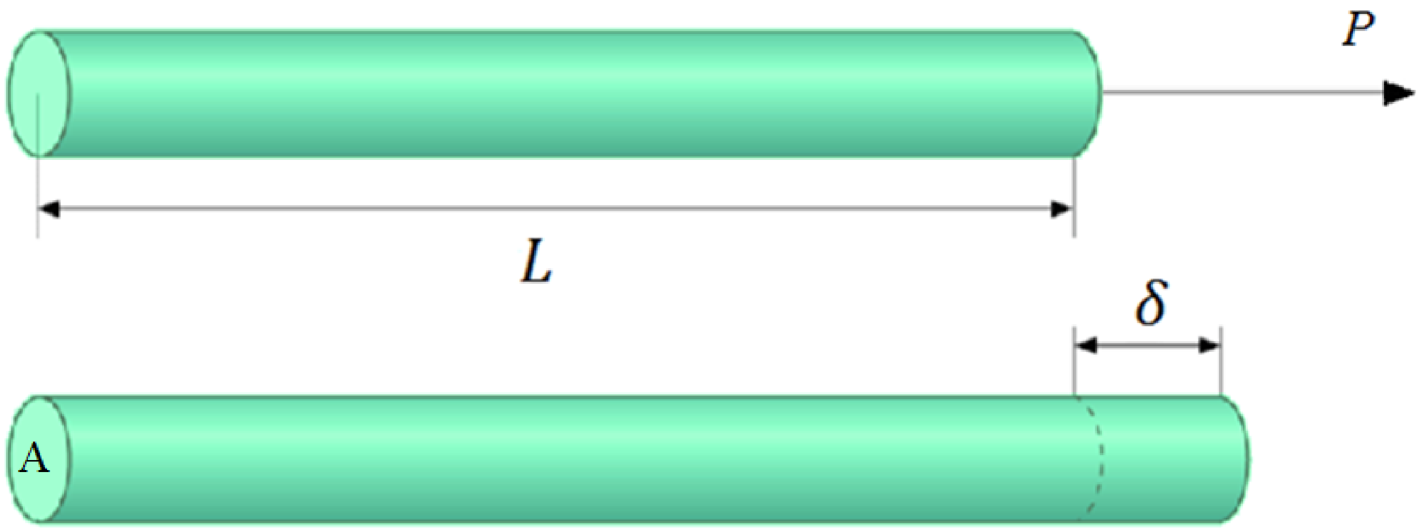


$$\varphi = u = \frac{\sigma^2}{2E}$$

Resiliencia: Energía (por unidad de volumen) almacenada durante la deformación elástica, es decir, energía que puede ser recuperada de un cuerpo deformado cuando cesa el esfuerzo que causa la deformación. La resiliencia es igual al trabajo externo realizado para deformar un material hasta su límite elástico.

Teorema de Castigliano

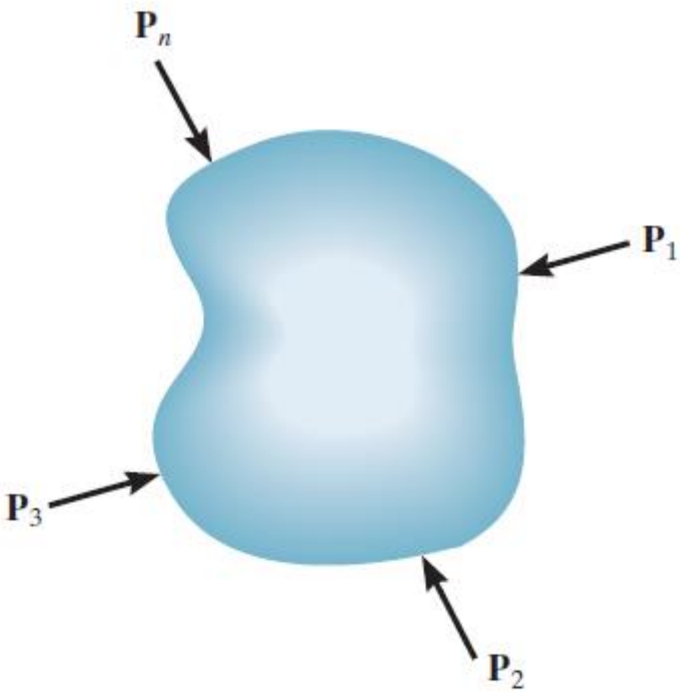
Luego



$$U = \frac{P^2 L}{2EA} \qquad \frac{dU}{dP} = \frac{PL}{EA} = \delta$$

Teorema de Castigliano generalizado

Luego



La energía externa es función de las cargas externas, por lo tanto, también, el potencial interno es función de las cargas externas:

$$U_i = U_e = f(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$$

Luego, sí una de las cargas externas P_j es incrementada por un diferencial de carga dP_j, la energía interna también aumenta, así entonces la energía potencial elástica es:

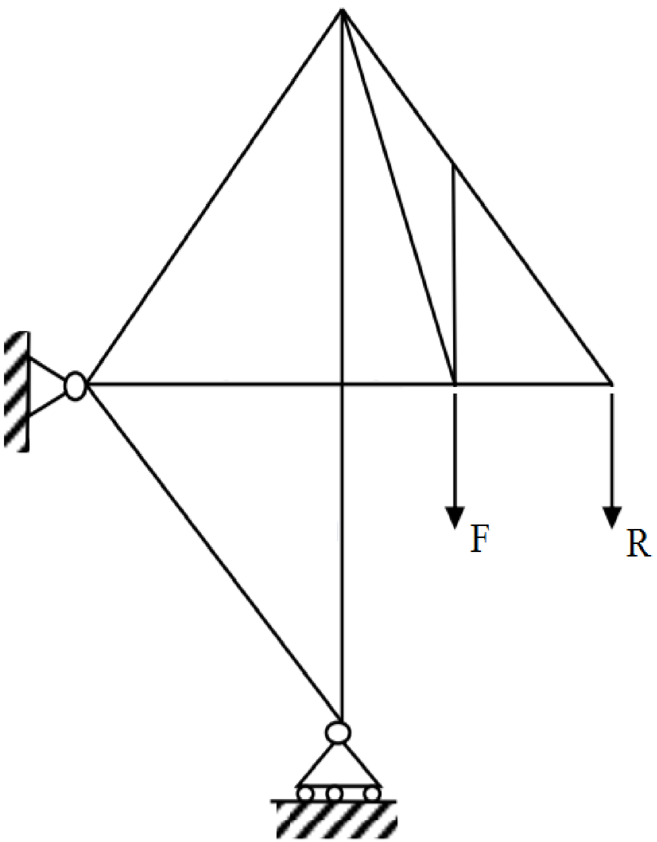
$$U_i + dU_i = U_i + \frac{\partial U_i}{\partial P_j} dP_j$$

La ecuación anterior representa el potencial elástico del cuerpo determinado aplicando las cargas $P_1, P_2, \dots, P_n$, y luego dP_j. Si consideramos la deformación del cuerpo en la dirección j entonces:

$$\delta_j = \frac{\partial U_i}{\partial P_j} = \sum_i \frac{\partial U_i}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial P_j}$$

Teorema de Castigliano para barras

Luego



El teorema de Castigliano, establece que cuando actúan fuerzas sobre sistemas elásticos, el desplazamiento correspondiente a cualquier fuerza, puede encontrarse obteniendo la derivada parcial de la energía de deformación respecto a esta fuerza.

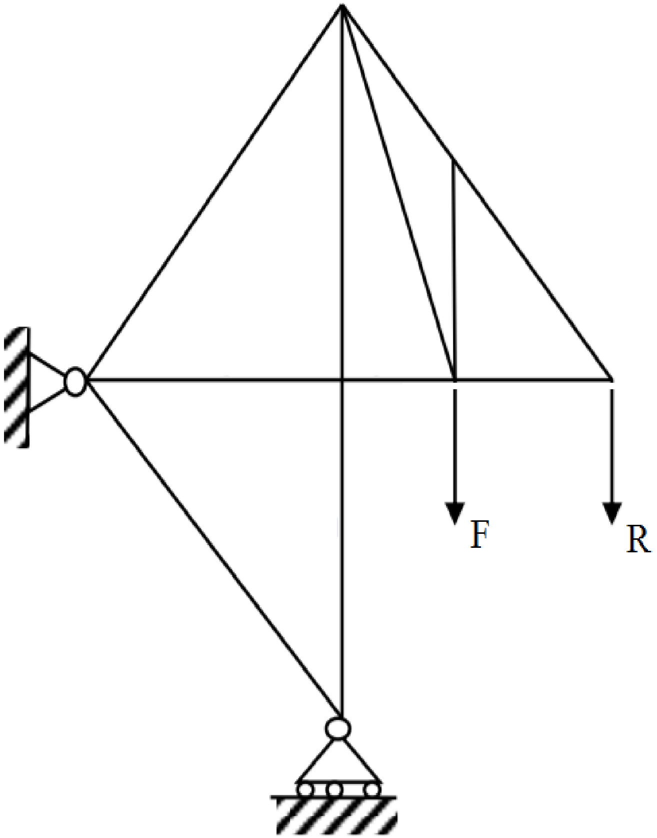
$$U = \sum_i \frac{P_i^2 L_i}{2E_i A_i}$$

Primer teorema: "La primera derivada parcial de la energía de deformación total (energía potencial elástica) de la estructura, con respecto a una de las cargas aplicadas, es igual al desplazamiento en el sentido de la carga".

$$\frac{dU}{dP_j} = \sum_i \frac{P_i L_i}{E_i A_i} \frac{dP_i}{dP_j} = \delta_j$$

Teorema de Castigliano para barras

Luego

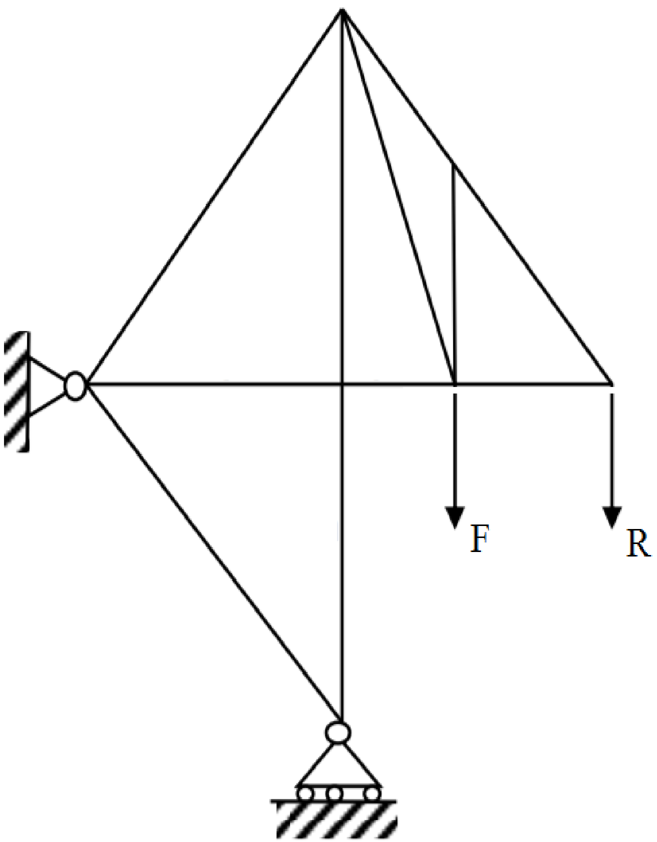


Segundo teorema: "Sea un cuerpo elástico sobre el que actúan un conjunto de fuerza $P_1, P_2, \dots, P_n$ aplicados sobre los puntos del sólido $A_1, A_2, \dots, A_n$ y llamamos $U(P_1, P_2, \dots, P_n)$ a la energía potencial elástica, entonces el desplazamiento o giro del punto A_i proyectado sobre la dirección de P_i viene dado por:

$$\delta_i = \frac{\delta U}{\delta P_i}$$

Teorema de Castigliano para barras

Luego



En estructuras o armaduras se tiene que el potencial elástico de cada barra es $U_i = N^2L/AEA$ y sustituyendo en el primer teorema de Castigliano:

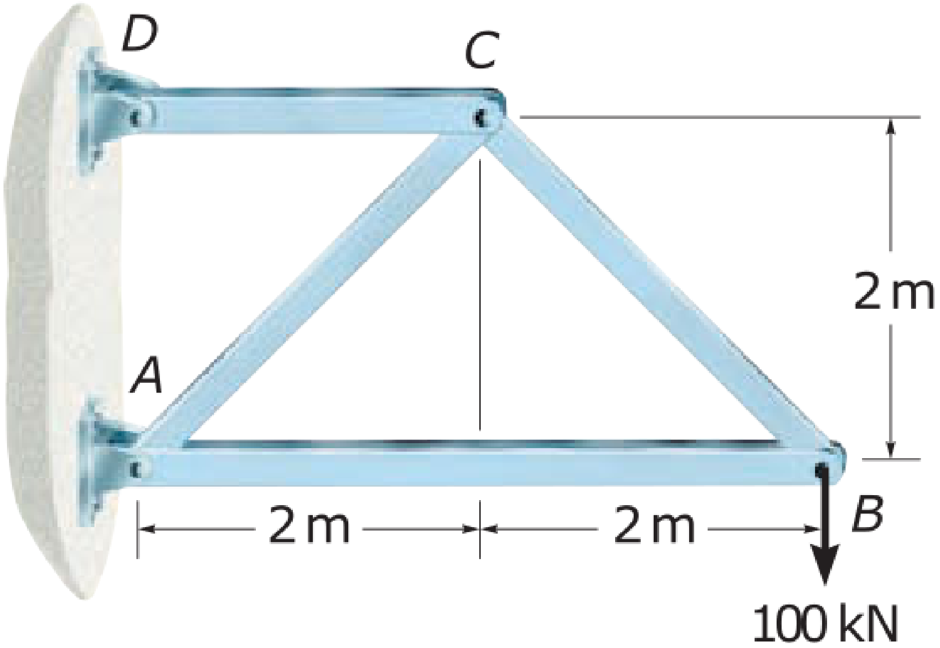
$$\delta_i = \sum N \left(\frac{\delta N}{\delta P_i}\right) \frac{L}{AE}$$

Donde:

- δ: Desplazamiento nodal.
- P: Fuerza externa de "magnitud variable" aplicada al nodo en la dirección del desplazamiento.
- N: Fuerza interna axial del miembro causada por la fuerza P y las cargas en la armadura.
- L: Longitud de cada barra.
- A: Sección transversal de cada barra.
- E: Módulo elástico del material.

Ejemplo

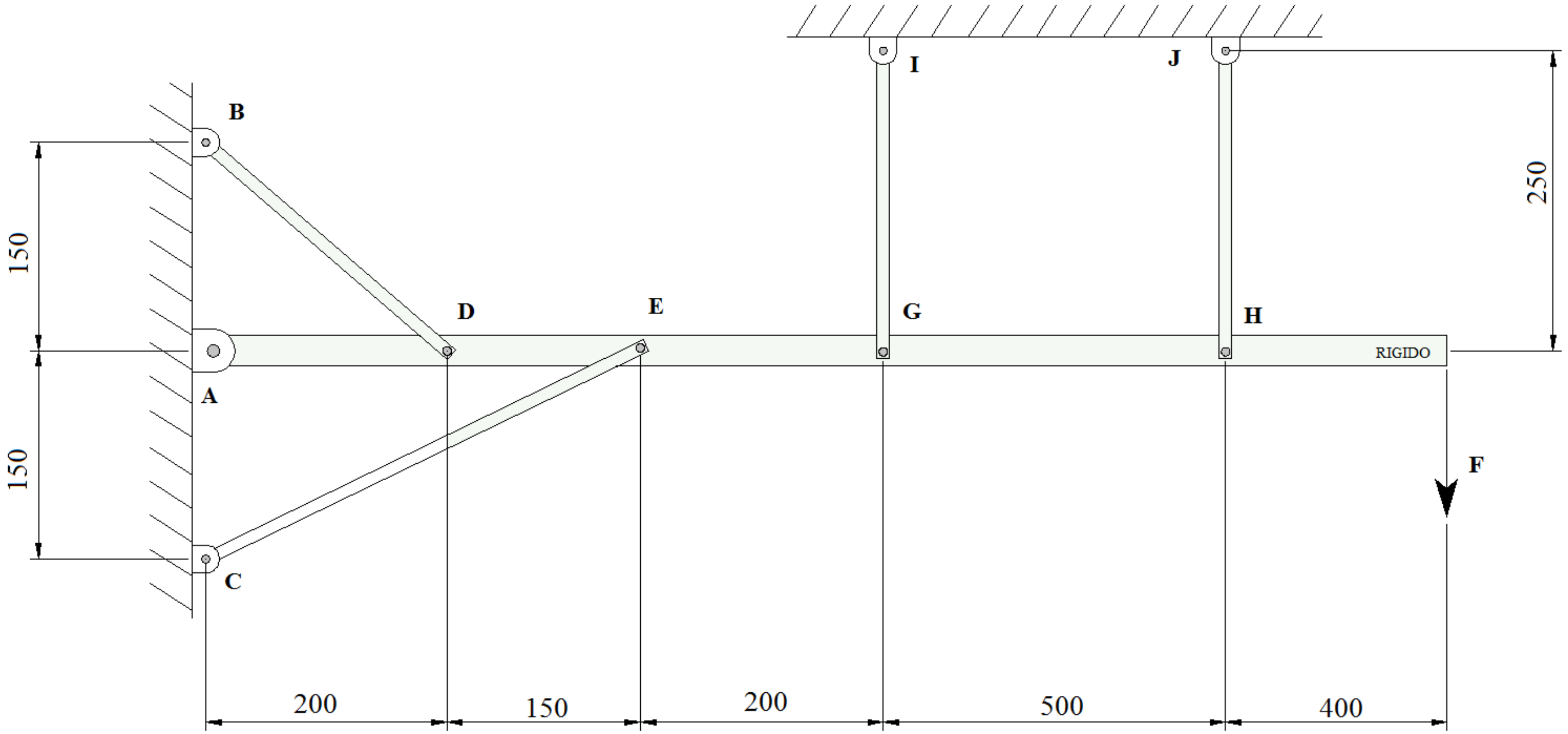
Determine el desplazamiento vertical del nodo C en la armadura de acero mostrada más abajo. La sección transversal de cada miembro es $A = 400\ \text{mm}^2$ y su módulo elástico es $E = 200\ GPa$.



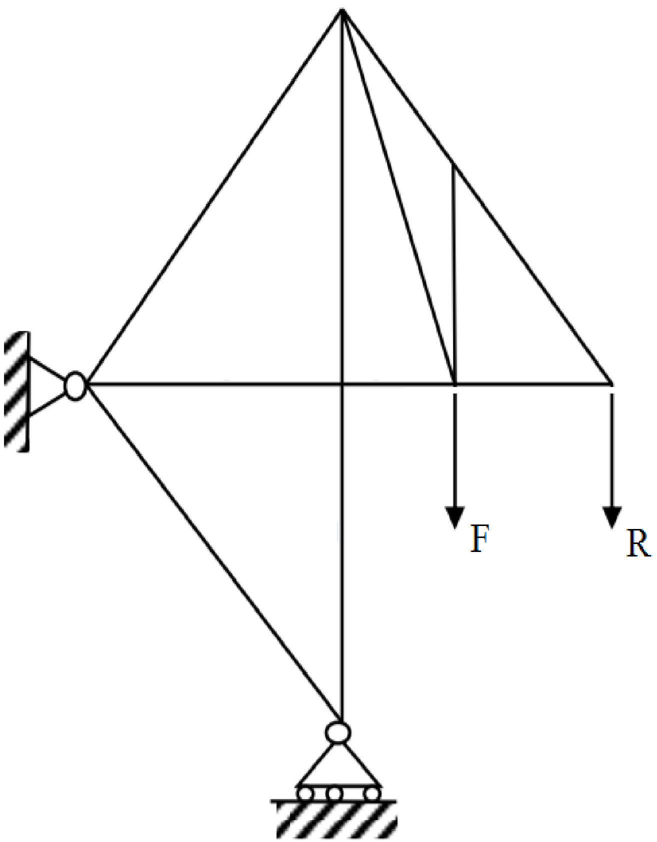
DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA
MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Ejercicio propuesto

Se tiene la estructura de la figura donde la viga AH es rígida, a la cual se articulan la barras BD, CE, IG, JH. Las barras son de acero (E=210 [GPa]) y todas tienen la misma área transversal de 300 [mm2]. Calcule los esfuerzos en todas las barras si la fuerza es de 10 [KN]. Utilice el teorema de Castigliano.



Teorema de Castigliano y dilatación térmica



En caso de producirse un aumento de temperatura en una estructura o armadura (en conjunto a una carga mecánica), el potencial elástico se calcula como:

$$U = \int_0^{\delta} N d\delta = \int_0^{\delta_m+\delta_T} N d\delta = \int_0^{\delta_m+\delta_T} \frac{AE}{L}\delta\, d\delta$$

$$U = \frac{AE}{2L}\delta_m^2 + \frac{AE}{L}\delta_m\delta_T + \frac{AE}{2L}\delta_T^2 = \frac{N^2L}{2AE} + N\delta_T + \frac{AE}{2L}\delta_T^2$$

Entonces, analizando el potencial elástico respecto a una fuerza externa y obteniendo el desplazamiento puntual en la dirección de aquella carga:

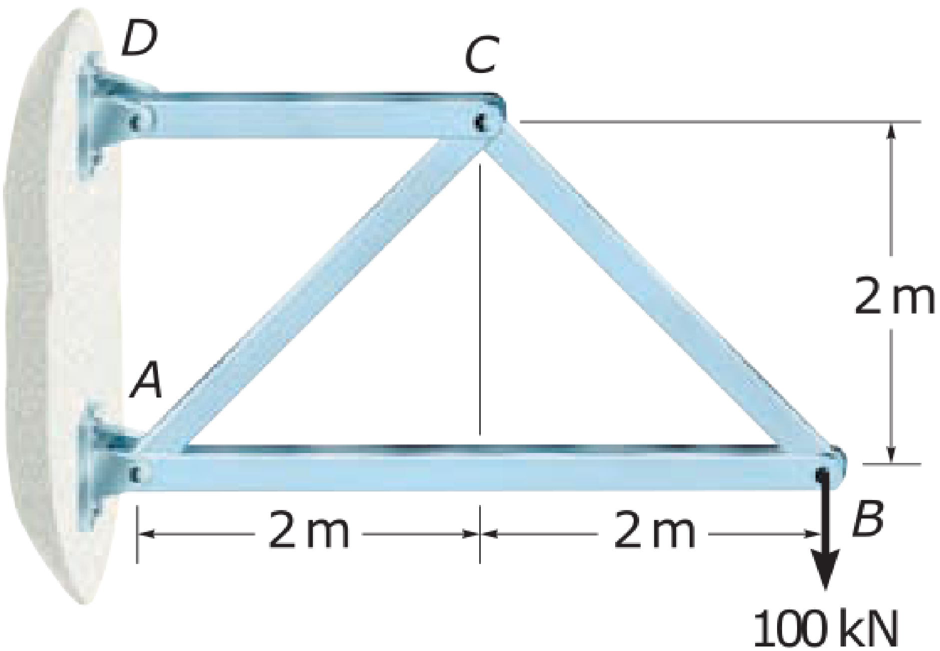
$$\delta_i = \frac{\delta U}{\delta N}\frac{\delta N}{\delta P_i} = \frac{NL}{AE}\frac{\delta N}{\delta P_i} + \delta_T\frac{\delta N}{\delta P_i}$$

Finalmente

$$\delta_i = \sum N\left(\frac{\delta N}{\delta P_i}\right)\frac{L}{AE} + \delta_T\left(\frac{\delta N}{\delta P_i}\right)$$

Ejemplo

Determine el desplazamiento vertical del nodo C en la armadura de acero mostrada más abajo. La sección transversal de cada miembro es A $= 400\ \mathrm{mm}^2$ y su módulo elástico es $E = 200\ GPa$ y tienen un coeficiente de dilatación térmica α=12 $* 10^{-6}$, [1/C°]. Considere un aumento de temperatura de 60°C previo a la aplicación de la carga de 100kN.



DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA
MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

¿Consultas?

Curso – Resistencia de Materiales [15153]

Plan de estudios - Ingeniería Civil en Mecánica

Profesores: Matías Pacheco Alarcón (**matias.pacheco@usach.cl**)

Aldo Abarca Ortega (**aldo.abarca@usach.cl**)

Ayudante: Estéfano Muñoz (**estefano.munoz@usach.cl)**

Santiago de Chile, Abril 2019