



Curso – Resistencia de materiales [15153]

Clase 4 – Ley de Hooke

Plan de estudios - Ingeniería Civil en Mecánica

Profesores: Matías Pacheco Alarcón (matias.pacheco@usach.cl)

Aldo Abarca Ortega (aldo.abarca@usach.cl)

Ayudante: Estéfano Muñoz (estefano.munoz@usach.cl)

Santiago de Chile, Abril 2019



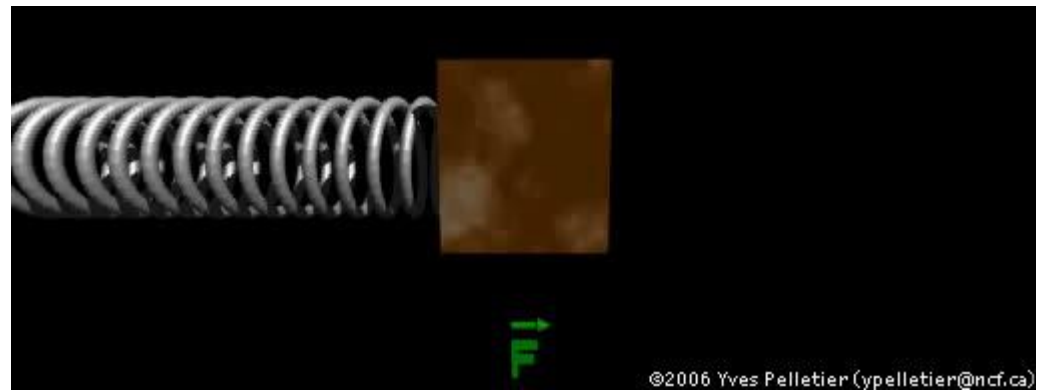
Resistencia de materiales

La respuesta del material a las cargas depende de sus propiedades, dos de las cuales son:

- Rigidez: Propiedad de un material a oponerse a las deformaciones.



Robert Hooke - 1635 a 1703



$$F = -k \cdot \delta$$

Fuerza ejercida
por el resorte

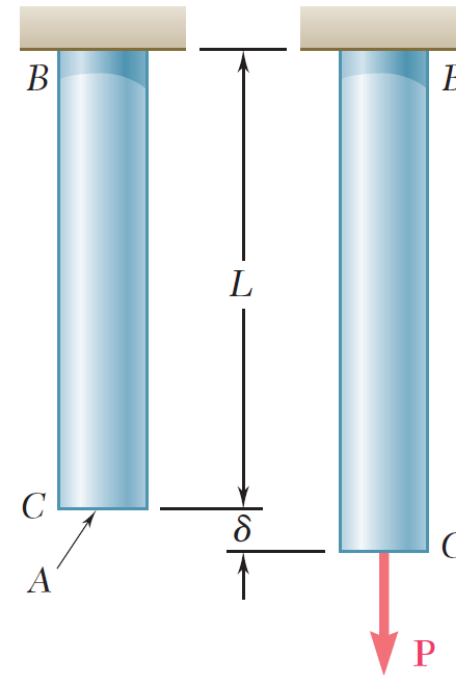
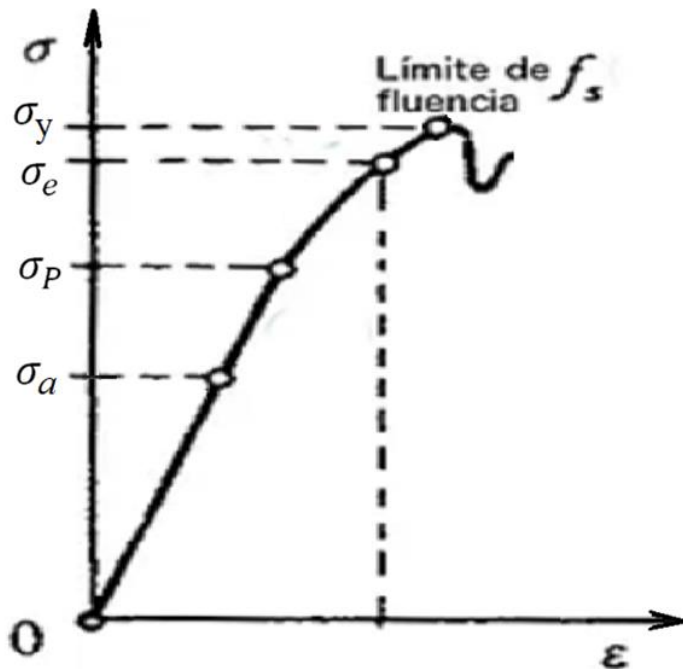
Constante elástica

Elongación que
experimenta el
resorte



Diagrama esfuerzo vs deformación

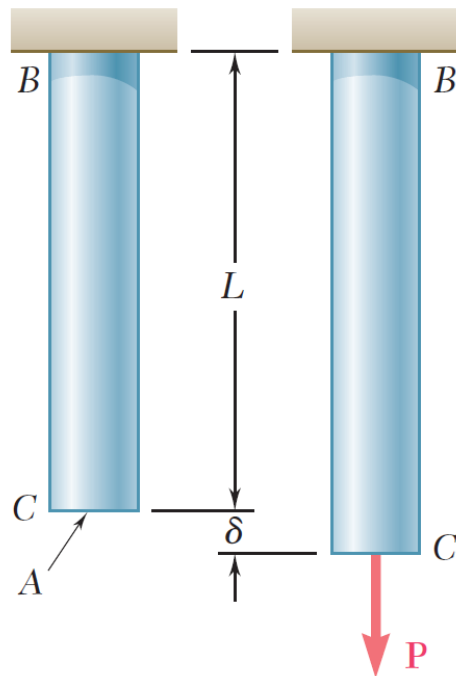
Considere una barra BC de sección transversal la cuál está empotrada en B. Si se aplica una carga C la barra se deforma una magnitud δ .





Ley de Hooke en barras

Elemento axial sometido a cargas de tracción



Si el esfuerzo axial resultante $\sigma = \frac{P}{A}$ no supera el límite de proporcionalidad del material, se aplica la ley de Hooke

$$\sigma = E\epsilon$$

Donde

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \left(\frac{P}{A}\right) \frac{1}{E}$$

Y definiendo la deformación como $\epsilon = \delta/L$

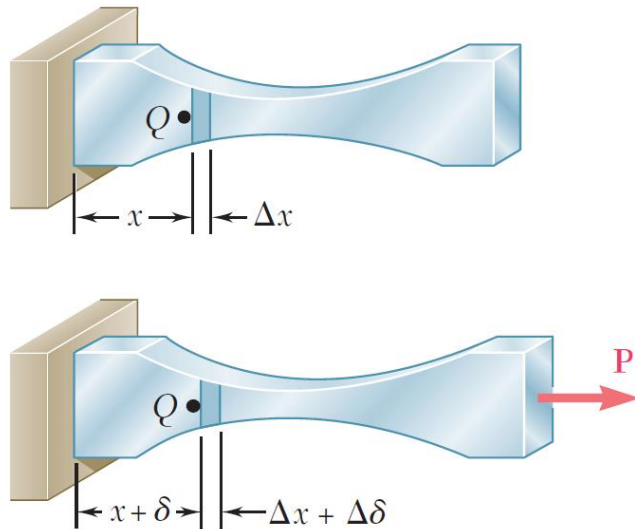
$$\delta = \epsilon L$$

Finalmente se tiene

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

Esfuerzo y deformación

Si se tiene una barra de sección transversal A variable cargada axialmente:



Considerando un pequeña distancia longitudinal Δx se denota que su deformación bajo la carga P es $\Delta\delta$, así la deformación unitaria en el punto Q es:

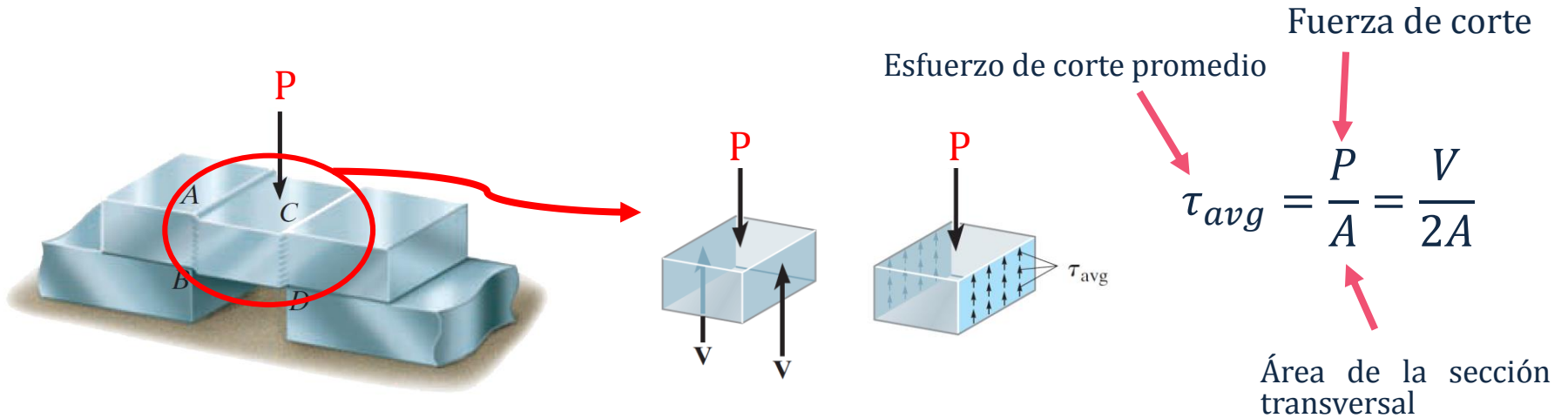
$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dL}$$

Si se quiere conocer la deformación total o alargamiento de la barra, entonces

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \rightarrow \delta = \int_0^L \frac{P dx}{EA}$$



Esfuerzo de corte

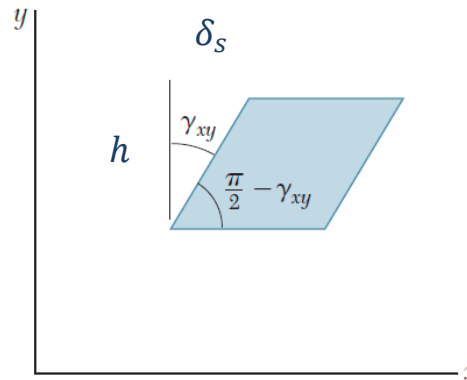
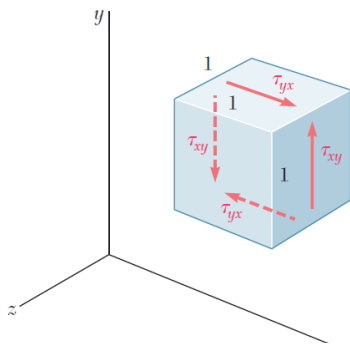


Se produce corte interno en la sección intermedia de las fuerzas transversales.

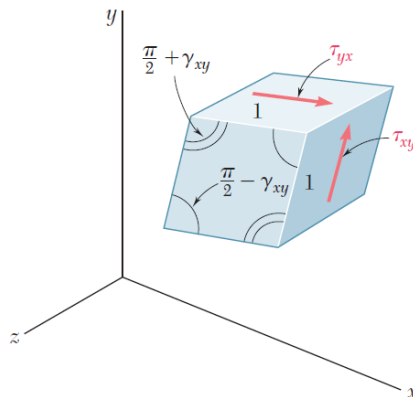
El esfuerzo de corte se produce cuando se aplica una fuerza contenida en el plano de corte.

Esfuerzo de corte

El esfuerzo de corte se produce cuando se aplica una fuerza contenida a una sección transversal intermedia.



$$\tan(\gamma_{xy}) = \frac{\delta_s}{h} \rightarrow \epsilon = \frac{\delta}{L}$$



Se define la ley de Hooke para esfuerzo y deformación cortante de la forma

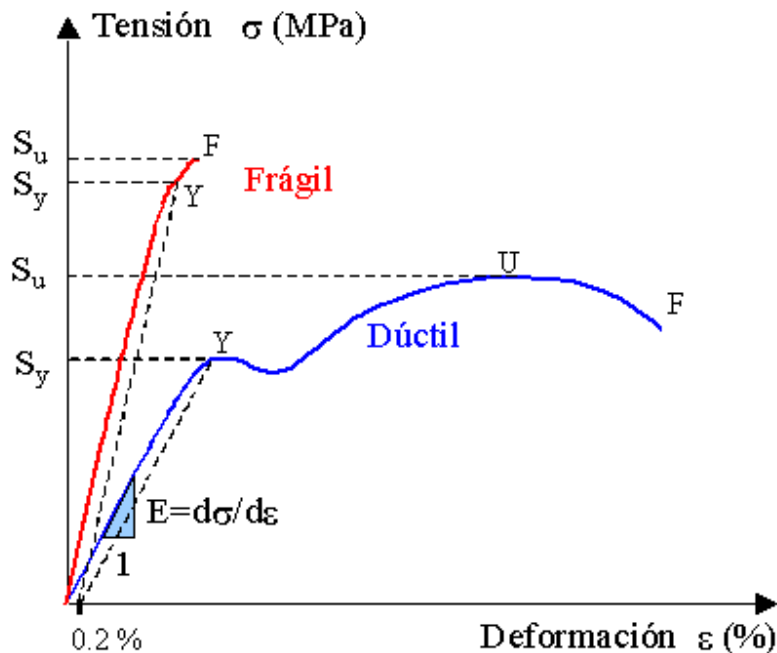
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Donde G es el módulo de rigidez o módulo elástico de corte.



Materiales dúctiles vs frágiles

La ductilidad es una propiedad que presentan algunos materiales, como las aleaciones metálicas o materiales asfálticos, los cuales bajo la acción de una fuerza, pueden deformarse plásticamente de manera sostenible sin romperse. La fragilidad es la capacidad de un material de fracturarse debido a su escasa o nula deformación permanente.

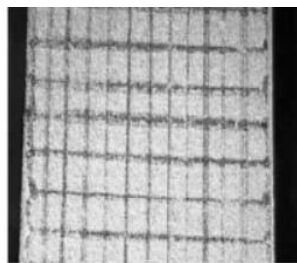
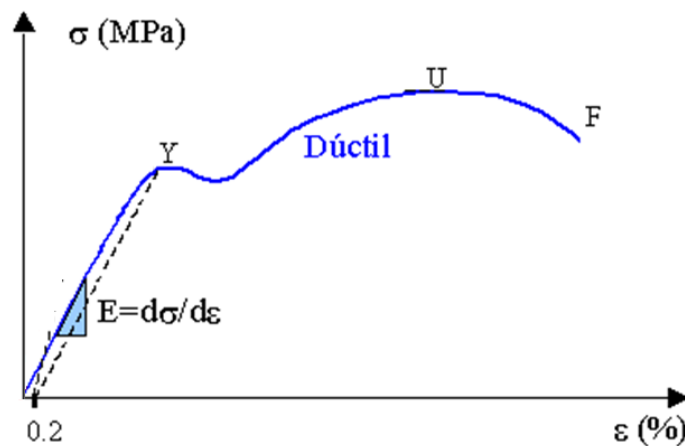


$$\% \text{ porcentaje de elongación} = \frac{L_f - L_0}{L_0} * 100$$

$$\% \text{ porcentaje de reducción del área} = \frac{A_0 - A_f}{A_0} * 100$$

Falla de materiales

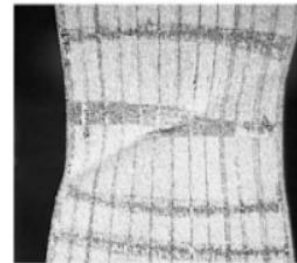
La ductilidad es una propiedad que presentan algunos materiales, como las aleaciones metálicas o materiales asfálticos, los cuales bajo la acción de una fuerza, pueden deformarse plásticamente de manera sostenible sin romperse. La fragilidad es la capacidad de un material de fracturarse debido a su escasa o nula deformación permanente.



34%



41%



44%

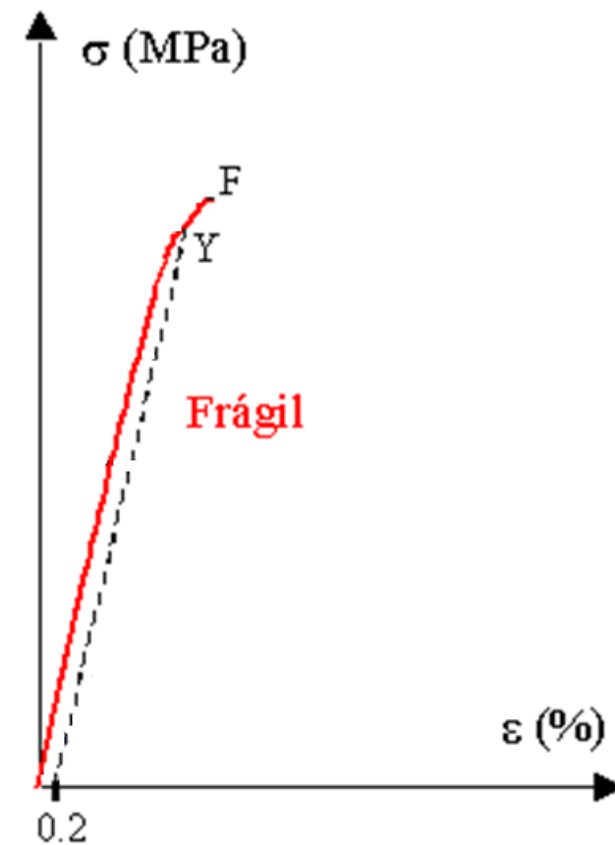


47.1%



Falla de materiales

Material frágil:





Propiedades mecánicas de los materiales

Average Mechanical Properties of Typical Engineering Materials^a
(SI Units)

Materials	Density ρ (Mg/m ³)	Modulus of Elasticity E (GPa)	Modulus of Rigidity G (GPa)	Yield Strength (MPa)			Ultimate Strength (MPa)			% Elongation in 50 mm specimen	Poisson's Ratio ν	Coef. of Therm. Expansion α (10 ⁻⁶)/°C
				Tens.	Comp. ^b	Shear	Tens.	Comp. ^b	Shear			
Metallic												
Aluminum Wrought Alloys	2.79	73.1	27	414	414	172	469	469	290	10	0.35	23
				255	255	131	290	290	186			
Cast Iron Alloys	7.19	67.0	27	–	–	–	179	669	–	0.6	0.28	12
	7.28	172	68	–	–	–	276	572	–	5	0.28	12
Copper Alloys	8.74	101	37	70.0	70.0	–	241	241	–	35	0.35	18
	8.83	103	38	345	345	–	655	655	–	20	0.34	17
Magnesium Alloy	1.83	44.7	18	152	152	–	276	276	152	1	0.30	26
Steel Alloys	7.85	200	75	250	250	–	400	400	–	30	0.32	12
	7.86	193	75	207	207	–	517	517	–	40	0.27	17
	8.16	200	75	703	703	–	800	800	–	22	0.32	12
Titanium Alloy	4.43	120	44	924	924	–	1,000	1,000	–	16	0.36	9.4
Nonmetallic												
Concrete	2.38	22.1	–	–	–	12	–	–	–	–	0.15	11
	2.38	29.0	–	–	–	38	–	–	–	–	0.15	11
Plastic Reinforced	1.45	131	–	–	–	–	717	483	20.3	2.8	0.34	–
	1.45	72.4	–	–	–	–	90	131	–	–	0.34	–
Wood Select Structural Grade	0.47	13.1	–	–	–	–	2.1 ^c	26 ^d	6.2 ^d	–	0.29 ^c	–
	3.60	9.65	–	–	–	–	2.5 ^c	36 ^d	6.7 ^d	–	0.31 ^c	–

^aSpecific values may vary for a particular material due to alloy or mineral composition, mechanical working of the specimen, or heat treatment. For a more exact value reference books for the material should be consulted.

^bThe yield and ultimate strengths for ductile materials can be assumed equal for both tension and compression.

^cMeasured perpendicular to the grain.

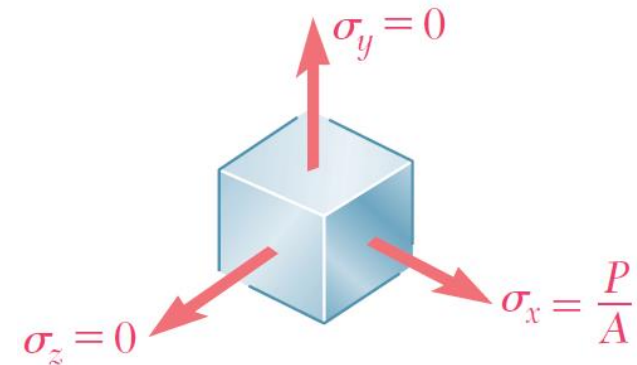
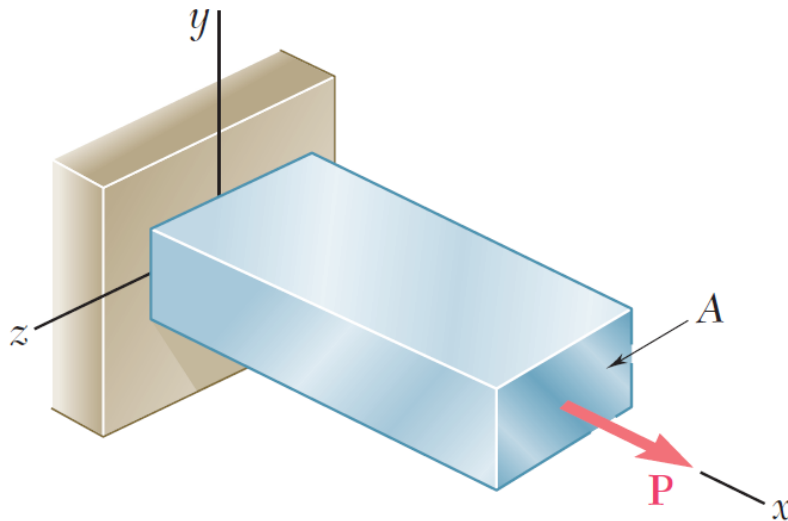
^dMeasured parallel to the grain.

^eDeformation measured perpendicular to the grain when the load is applied along the grain.



Ley de Hooke en barras

Elemento axial sometido a cargas de tracción

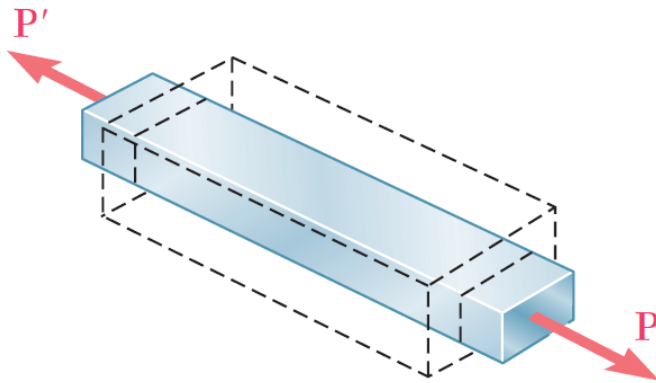


Elemento representativo de esfuerzos.



Ley de Hooke en barras

Elemento axial sometido a cargas de tracción



Según la ley de Hooke

$$\sigma_x = \epsilon_x E \rightarrow \epsilon_x = \sigma_x / E$$

La elongación producida en la dirección axial por la fuerza P es acompañada por una reducción de área en la sección transversal. Así $\epsilon_y = \epsilon_z$, magnitud que se llama “deformación lateral”. Una constante importante es el módulo de Poisson:

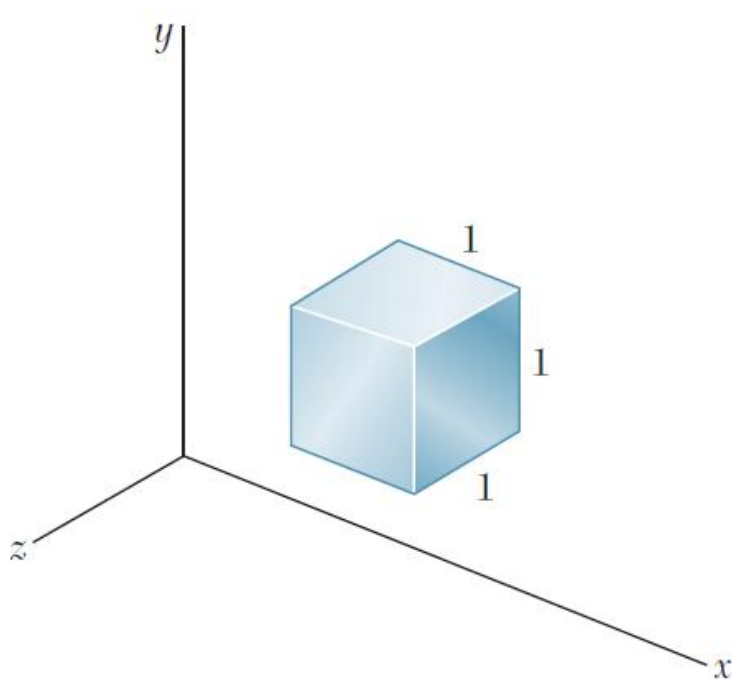
$$\nu = - \frac{\text{Deformación lateral}}{\text{Deformación axial}} = - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = - \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

Así entonces

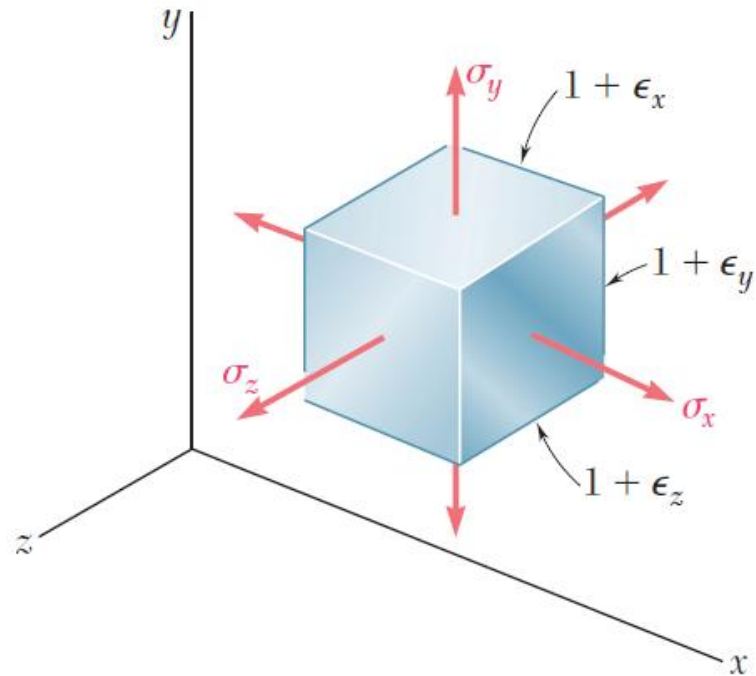
$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad y \quad \epsilon_y = \epsilon_z = - \frac{\nu \sigma_x}{E}$$



Ley de Hooke en estado multiaxial



Cubo unitario descargado



Cubo unitario cargado y deformado

Ley de Hooke en estado multiaxial

Se establece que el efecto de una carga combinada dada sobre una estructura puede obtenerse determinando los efectos de las distintas cargas por separado y combinando los resultados, siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

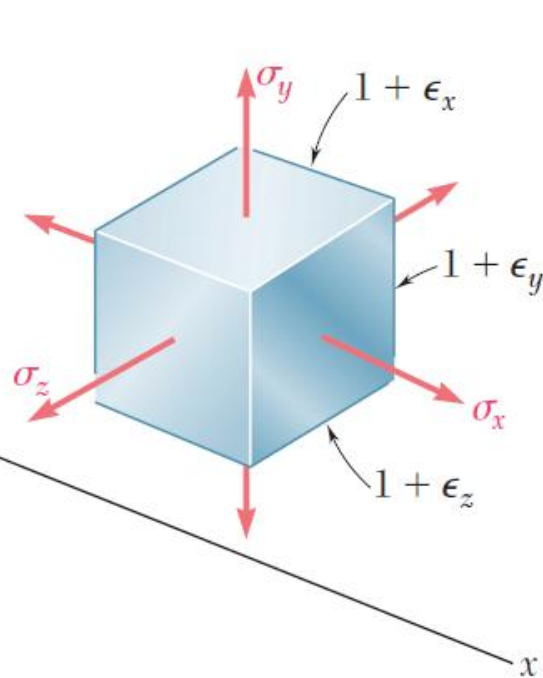
1. Cada efecto está linealmente relacionado con la carga que lo produce.
2. La deformación resultante de una carga dada es pequeña y no afecta a las condiciones de aplicación de las otras cargas.

Combinando los resultados, los componentes de la deformación correspondientes a la carga multiaxial dada son

$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$



Cubo unitario cargado y deformado

Las ecuaciones anteriores corresponden a la “Ley de Hooke generalizada para cargas multiaxiales en un material homogéneo isótropo”.

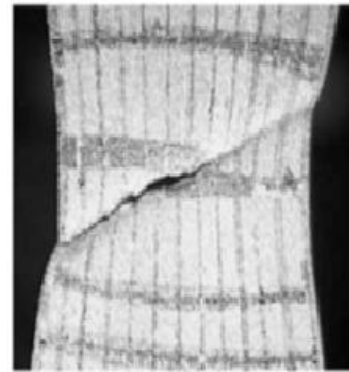
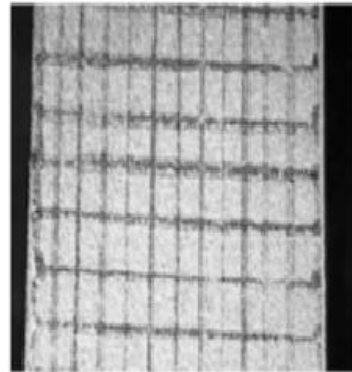


Comparación de propiedades de normales y de corte

Elemento plano sometido a cargas simétricas

$$\sigma = E\epsilon \quad \text{y} \quad \tau = G\gamma$$

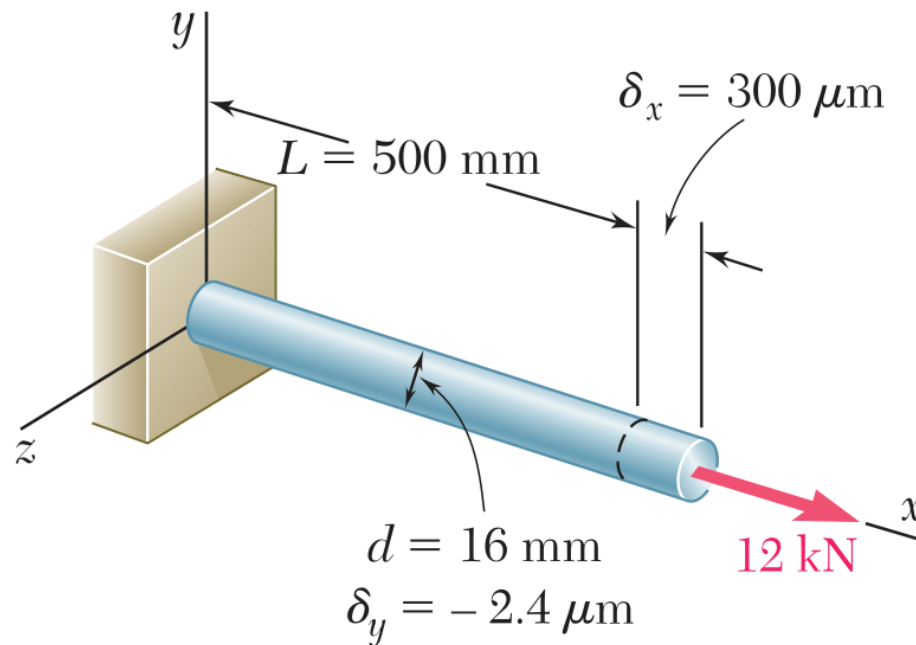
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$





Ejemplo

La barra de material homogéneo e isótropo que se ve en la siguiente figura tiene una longitud de 500 mm y un diámetro de 16 mm. Se observa que se deforma una longitud de $300 \mu\text{m}$ y decrece un diámetro de $2,4 \mu\text{m}$ cuando está bajo una carga axial de 12 kN. Determine el módulo de Poisson del material.





¿Consultas?

Curso – Resistencia de Materiales [15153]

Plan de estudios - Ingeniería Civil en Mecánica

Profesores: Matías Pacheco Alarcón (matias.pacheco@usach.cl)

Aldo Abarca Ortega (aldo.abarca@usach.cl)

Ayudante: Estéfano Muñoz (estefano.munoz@usach.cl)

Santiago de Chile, Abril 2019