IEM/AC/2013S2/PEP2

APLICACIONES COMPUTACIONALES [15063]
INGENIERÍA DE EJECUCIÓN MECÁNICA

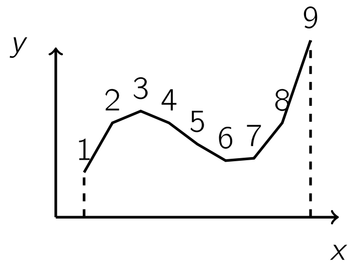
Sábado, 11 de enero de 2014 (Tiempo: 120 min)

SEGUNDA PRUEBA ESPECIAL PROGRAMADA

Problema 1 (1 pts): Para los datos mostrados en la figura se pide:

(a) Calcular el área bajo la curva con la regla del trapecio y la regla de Simpson 1/3 (0,7 pts).

(b) Cuantificar el error porcentual total para ambos métodos sabiendo que los puntos de la figura corresponden a la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 5$ (0,3 pts).



1	(-.5, 2.375)
2	(0.0, 5.000)
3	(0.5, 5.625)
4	(1.0, 5.000)
5	(1.5, 3.875)
6	(2.0, 3.000)
7	(2.5, 3.125)
8	(3.0, 5.000)
9	(3.5, 9.375)

Problema 2 (1 pts): Evalúe numéricamente la siguiente integral $I = \int_0^3 x\, e^x dx$, con la fórmula de Gauss-Legendre (Cuadratura de Gauss) usando:

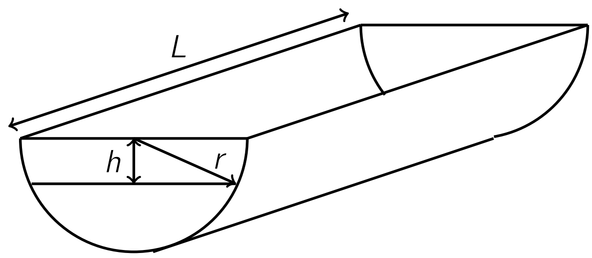
(a) 2 puntos de integración y 3 puntos de integración (0,7 pts):

$C_0 = 1$	$z_0 = -0{,}577350269$
$C_1 = 1$	$z_1 = +0{,}577350269$

$C_0 = 0{,}5555556$	$z_0 = -0{,}774596669$
$C_1 = 0{,}8888889$	$z_1 = +0{,}0$
$C_2 = 0{,}5555556$	$z_2 = +0{,}774596669$

(b) Calcule el error total para ambas aproximaciones, sabiendo que la solución analítica es $(x-1)e^x$ (0,3 pts).

Problema 3 (2 pts): Se quiere diseñar un sistema que permita controlar el nivel (altura) de la piscina de decantación de la figura. Se pide:

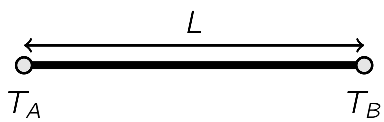


(a) Obtener un modelo matemático para determinar el volumen del líquido en función de la altura h, el largo L y y el radio r (0,5 pts).

(b) Escribir un programa en Matlab para el modelo matemático obtenido, usando el método de Newton-Raphson, que permita calcular la altura para $V = 273\,\mathrm{m}^3$, $r = 3\,\mathrm{m}$ y $L = 100\,\mathrm{m}$ (1,0 pts).

(c) Mostrar las 3 primeras iteraciones del algoritmo programado (0,5 pts).

Problema 4 (2 pts): Para una barra de aluminio ($k = 0{,}835\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$) y longitud $L = 10\,\mathrm{cm}$, que en cuyos extremos se aplican las temperaturas $T_A = -10\,°\mathrm{C}$ y $T_B = 50\,°\mathrm{C}$, se pide:



(a) Obtener la distribución de temperaturas para la barra transcurridos 0,6 s usando el método de diferencias finitas con una discretización espacial $\Delta x = 2\,\mathrm{cm}$ y temporal $\Delta t = 0{,}2\,\mathrm{s}$ (1,5 pts).

(b) Escribir un programa en Matlab que permita obtener el estado estacionario de la distribución de temperaturas considerando un error porcentual de 0,2 % (0,5 pts).

Formulario

- Regla del trapecio:
$$I = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b - a)$$
- Regla de Simpson 1/3:
$$I = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$
- Formulas de Gauss-Legendre:
$$I = \sum_{i=0}^{n} C_i\, f(z_i), \quad x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}z \quad \text{(cambio de variable)}$$
- Newton-Raphson:
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
- Diferencias finitas para la conducción del calor:
$$T_i^{n+1} = T_i^n + \lambda\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right), \quad \text{con} \quad \lambda = k\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

Problema 1

Realizando una suma de la regla del trapecio queda:

$$I = \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_1) + 2\cdot\sum_{i=2}^{8} f(x_i) + f(x_9)\right)$$

$$fx := \begin{pmatrix} 2.375 \\ 5 \\ 5.625 \\ 5 \\ 3.875 \\ 3 \\ 3.125 \\ 5 \\ 9.375 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{I_{trapecio} := \frac{0.5}{2}\cdot[2.375 + 2\cdot(5 + 5.625 + 5 + 3.875 + 3 + 3.125 + 5) + 9.375] = 18.25}$$

O por trozos

$$I_{t1} := \frac{0.5}{2}\cdot(2.375 + 5) = 1.844$$

$$I_{t2} := \frac{0.5}{2}\cdot(5 + 5.625) = 2.656$$

$$I_{t3} := \frac{0.5}{2}\cdot(5.625 + 5) = 2.656$$

$$I_{t4} := \frac{0.5}{2}\cdot(5 + 3.875) = 2.219$$

$$I_{t5} := \frac{0.5}{2}\cdot(3.875 + 3) = 1.719$$

$$I_{t6} := \frac{0.5}{2}\cdot(3 + 3.125) = 1.531$$

$$I_{t7} := \frac{0.5}{2}\cdot(3.125 + 5) = 2.031$$

$$I_{t8} := \frac{0.5}{2}\cdot(5 + 9.375) = 3.594$$

$$\boxed{I_{trapecio2} := I_{t1} + I_{t2} + I_{t3} + I_{t4} + I_{t5} + I_{t6} + I_{t7} + I_{t8} = 18.25}$$

$$fx = \begin{pmatrix} 2.375 \\ 5 \\ 5.625 \\ 5 \\ 3.875 \\ 3 \\ 3.125 \\ 5 \\ 9.375 \end{pmatrix}$$

$$I_s = \frac{h}{3}\cdot\left(f(x_1) + 4\cdot f(x_2) + f(x_3)\right)$$

Que al sumarlas queda:

$$I_s = \frac{h}{3}\cdot\left(f(x_1) + 4\,f(x_2) + 2\,f(x_3) + 4\,f(x_4) + 2\,f(x_5) + 4\,f(x_6) + 2\,f(x_7) + 4\,f(x_8) + f(x_9)\right)$$

$$\boxed{I_s := \frac{0.5}{3}\cdot(2.375 + 4\cdot 5 + 2\cdot 5.625 + 4\cdot 5 + 2\cdot 3.875 + 4\cdot 3 + 2\cdot 3.125 + 4\cdot 5 + 9.375) = 18.167}$$

o por trozos

$$I_{s1} := \frac{0.5}{3}\cdot(2.375 + 4\cdot 5 + 5.625) = 4.667$$

$$I_{s2} := \frac{0.5}{3}\cdot(5.625 + 4\cdot 5 + 3.875) = 4.917$$

$$I_{s3} := \frac{0.5}{3}\cdot(3.875 + 4\cdot 3 + 3.125) = 3.167$$

$$I_{s4} := \frac{0.5}{3}\cdot(3.125 + 4\cdot 5 + 9.375) = 5.417$$

$$\boxed{I_{sim2} := I_{s1} + I_{s2} + I_{s3} + I_{s4} = 18.1667}$$

Formulario

- Regla del trapecio:
$$I = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b - a)$$
- Regla de Simpson 1/3:
$$I = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$
- Formulas de Gauss-Legendre:
$$I = \sum_{i=0}^{n} C_i\, f(z_i), \quad x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}z \quad \text{(cambio de variable)}$$
- Newton-Raphson:
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
- Diferencias finitas para la conducción del calor:
$$T_i^{n+1} = T_i^n + \lambda\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right), \quad \text{con} \quad \lambda = k\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$\mathrm{fun}(x) := x^3 - 4x^2 + 3x + 5$$

$$I_{real}(x) := \int \mathrm{fun}(x)\,dx \rightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{4\cdot x^3}{3} + \frac{3\cdot x^2}{2} + 5\cdot x$$

$$I := I_{real}(3.5) - I_{real}(-0.5) = 18.1667$$

$$\varepsilon_{trapecio} := \left|\frac{I_{trapecio} - I}{I}\right|\cdot 100 = 0.459$$

$$\varepsilon_{trapecio} = \left|\frac{18.25 - 18.167}{18.168}\right| = 0.459\%$$

$$\varepsilon_{simp} := \left|\frac{I_s - I}{I}\right| = \frac{18.167 - 18.167}{18.167} = 0$$

Problema 2

$$I = \int_0^3 x \cdot e^x \, dx \qquad f(x) := x \cdot e^x$$

Gauss - Legendre 2 puntos

$C_0 := 1 \qquad C_1 := 1$

$z_0 := -0.577350269 \qquad z_1 := 0.577350269$

$x_0 := \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot z_0 = 0.634 \qquad x_1 := \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot z_1 = 2.366$

$$I_{2puntos} := \frac{3-0}{2}\left(C_0 \cdot f\left(x_0\right) + C_1 \cdot f\left(x_1\right)\right) = 39.608$$

Gauss - Legendre 3 Puntos

$C_0 := 0.555555556 \qquad C_1 := 0.888888889 \qquad C_2 := 0.555555556$

$z_0 := -0.774596669 \qquad z_1 := 0 \qquad z_2 := 0.774596669$

$x_0 := \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot z_0 = 0.338 \qquad x_1 := \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot z_1 = 1.5 \qquad x_2 := \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot z_2 = 2.662$

$$I_{3puntos} := \frac{3-0}{2}\left(C_0 \cdot f\left(x_0\right) + C_1 \cdot f\left(x_1\right) + C_2 \cdot f\left(x_2\right)\right) = 41.131$$

Error Total

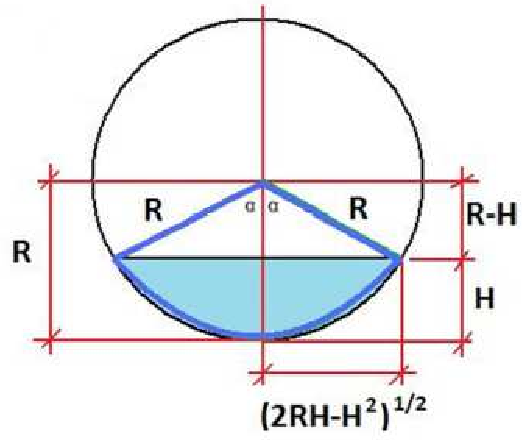
$f2(x) := (x-1) \cdot e^x$

$I := f2(3) - f2(0) = 41.171$

$I = (3-1) \cdot e^3 + (0-1) \cdot e^0 = 41.171$

$$\varepsilon_{2puntos} := \left|\frac{I_{2puntos} - I}{I}\right| \cdot 100 = 3.798 \qquad \varepsilon_{3puntos} := \left|\frac{I_{3puntos} - I}{I}\right| \cdot 100 = 0.097$$

Problema 3



Sean los lados del triángulo la base (b) y la altura (h)

Como "h" es conocido se procede a obtener la base del triángulo

$$R^2 = h^2 + b^2$$

$$b^2 = R^2 - h^2$$

$$b = \sqrt{R^2 - h^2}$$

Entonces el área del triángulo queda como sigue:

$$Area_{triangulo} = \frac{h \cdot b}{2} = \frac{h \cdot \sqrt{R^2 - h^2}}{2}$$

El área de los 2 triángulos es:

$$Area_2 = h \cdot \sqrt{R^2 - h^2}$$

El ángulo formado por la hipotenusa del triángulo es:

$$\alpha = acos\left(\frac{h}{R}\right)$$

Por lo que el área barrida por el ángulo es:

$$Area_3 = \frac{(2 \cdot \alpha)}{2} \cdot R^2 = \alpha \cdot R^2$$

Si a esta área le quitamos los triángunlos nos queda lo que buscamos

$$Area_{total} = \alpha \cdot R^2 - h \cdot \sqrt{R^2 - h^2} = acos\left(\frac{h}{R}\right) \cdot R^2 - h \cdot \sqrt{R^2 - h^2}$$

Por lo que el volumen es:

$$\boxed{V = Area_{total} \cdot L = L \cdot \left(acos\left(\frac{h}{R}\right) \cdot R^2 - h \cdot \sqrt{R^2 - h^2}\right)}$$

Para ocupar el método de Newton-Rapshon es necesario obetener la derivada de la función (que da 0) con respecto a la variable que se anda buscando.

$$\frac{d}{dh}\left[L\cdot\left(\operatorname{acos}\left(\frac{h}{R}\right)\cdot R^2 - h\cdot\sqrt{R^2-h^2}\right) - V\right] \rightarrow -L\cdot\left(\frac{R}{\sqrt{1-\frac{h^2}{R^2}}} + \sqrt{R^2-h^2} - \frac{h^2}{\sqrt{R^2-h^2}}\right)$$

$$\frac{d}{dh}f(x) = -2\cdot L\cdot\sqrt{R^2-h^2}$$

Por lo que el método de Newton-Raphson queda como sigue:
(ii=i+1)

$$h_{ii} = h_i - \frac{f(h_i)}{f^{\cdot\cdot}(h_i)} = h_i - \frac{\left[L\cdot\left(\operatorname{acos}\left(\frac{h_i}{R}\right)\cdot R^2 - h_i\cdot\sqrt{R^2-h_i^2}\right) - V\right]}{\left(-2\cdot L\cdot\sqrt{R^2-h_i^2}\right)}$$

Aplicando el método de Newton-Rapshon para 3 iteraciones se obtiene lo siguiente:

$h_1 = 1$ Valor de partida que se tomará

$h_2 = 2.0822$

$h_3 = 2.0836$ Valores obtenidos con el programa de Matlab

$h_4 = 2.0836$

```
R=3;
L=100;
V=273;
h=1; %Valor para comenzar la iteración

%Aquí tiene que venir algún tipo de ciclo que permita calcular hasta cierto
%rango, por comodidad se usó un ciclo for

for i=1:3 %num de iteraciones que se quieran hacer
    h=h-(L*(acos(h/R)*R^2-h*sqrt(R^2-h^2))-V)/(-2*L*sqrt(R^2-h^2))
end
```

Problema 4

$$\Delta x = 2 \qquad \Delta t = 0.2 \qquad k = 0.835$$
$$\lambda = k\frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.0418$$
$$T_1^n = -10 \qquad T_6^n = 50$$

Suponiendo una temperatura inicial igual a 0 se obtienen las temperaturas para el tiempo igual 0.2(seg) como sigue:

$$\begin{array}{l} T_2^{0.2} = T_2^0 + \lambda(T_1 - 2T_2^0 + T_3^0) = -0.418 \\ T_3^{0.2} = T_3^0 + \lambda(T_2^0 - 2T_3^0 + T_4^0) = 0 \\ T_4^{0.2} = T_4^0 + \lambda(T_3^0 - 2T_4^0 + T_5^0) = 0 \\ T_5^{0.2} = T_5^0 + \lambda(T_4^0 - 2T_5^0 + T_6) = 2.087 \end{array}$$

Para el tiempo igual 0.4seg:

$$\begin{array}{ll} T_2^{0.4} = T_2^0 + \lambda(T_1 - 2T_2^{0.2} + T_3^{0.2}) & = -0.8 \\ T_3^{0.4} = T_3^0 + \lambda(T_2^{0.2} - 2T_3^{0.2} + T_4^{0.2}) & = -0.017 \\ T_4^{0.4} = T_4^0 + \lambda(T_3^{0.2} - 2T_4^{0.2} + T_5^{0.2}) & = 0.087 \\ T_5^{0.4} = T_5^0 + \lambda(T_4^{0.2} - 2T_5^{0.2} + T_6) & = 4.001 \end{array}$$

Para el tiempo igual 0.6seg:

$$\begin{array}{ll} T_2^{0.6} = T_2^0 + \lambda(T_1 - 2T_2^{0.4} + T_3^{0.4}) & = -1.152 \\ T_3^{0.6} = T_3^0 + \lambda(T_2^{0.4} - 2T_3^{0.4} + T_4^{0.4}) & = -0.046 \\ T_4^{0.6} = T_4^0 + \lambda(T_3^{0.4} - 2T_4^{0.4} + T_5^{0.4}) & = 0.246 \\ T_5^{0.6} = T_5^0 + \lambda(T_4^{0.4} - 2T_5^{0.4} + T_6) & = 5.758 \end{array}$$

```matlab
Temp=[100,100,100,100,100,100];% Es para que entre al while
Temp2=[-10,0,0,0,0,50]; %Aquí van las temperaturas iniciales
lambda=0.0418;


while (abs(max(Temp2(2:5)-Temp(2:5)))/abs(max(Temp2(2:5)))>0.2/100)
   Temp=Temp2;
   Temp2(2)=Temp(2)+lambda*(Temp(1)-2*Temp(2)+Temp(3));
   Temp2(3)=Temp(3)+lambda*(Temp(2)-2*Temp(3)+Temp(4));
   Temp2(4)=Temp(4)+lambda*(Temp(3)-2*Temp(4)+Temp(5));
   Temp2(5)=Temp(5)+lambda*(Temp(4)-2*Temp(5)+Temp(6));
   Temp2
   pause()
end
```