DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA
MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Curso – Resistencia de materiales [15153]

Clase 11 – Circulo de Mohr

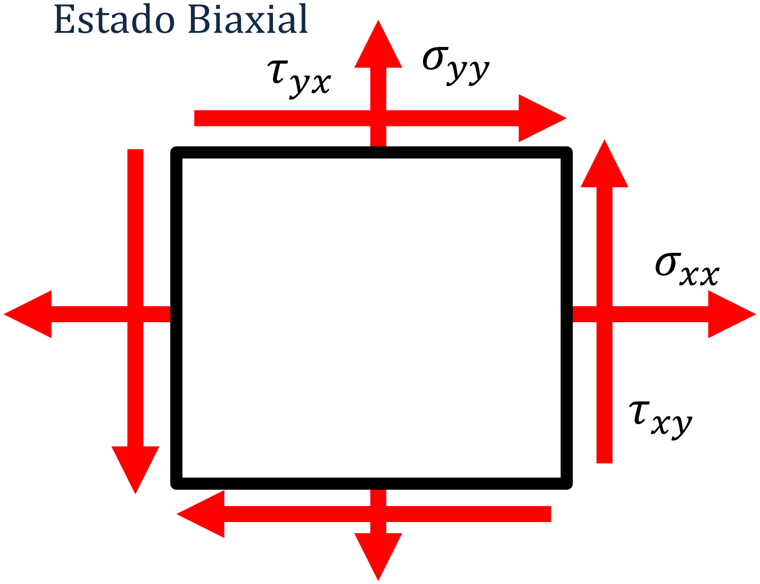
Plan de estudios - Ingeniería Civil en Mecánica

Profesores: Matías Pacheco Alarcón (**matias.pacheco@usach.cl**)
Aldo Abarca Ortega (**aldo.abarca@usach.cl**)
Ayudante: Estéfano Muñoz (**estefano.munoz@usach.cl**)

Santiago de Chile, Junio 2019

Esfuerzos combinados

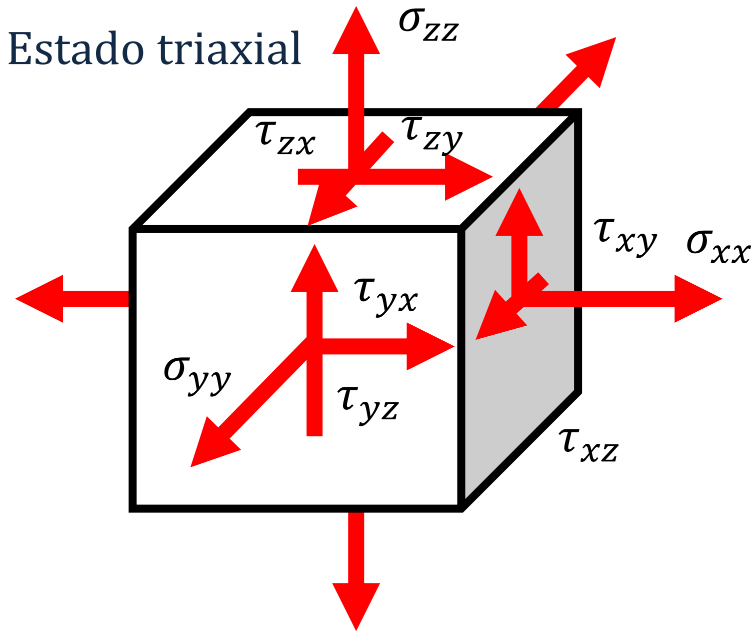
Estado Biaxial



Tensor de tensiones

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

Estado triaxial

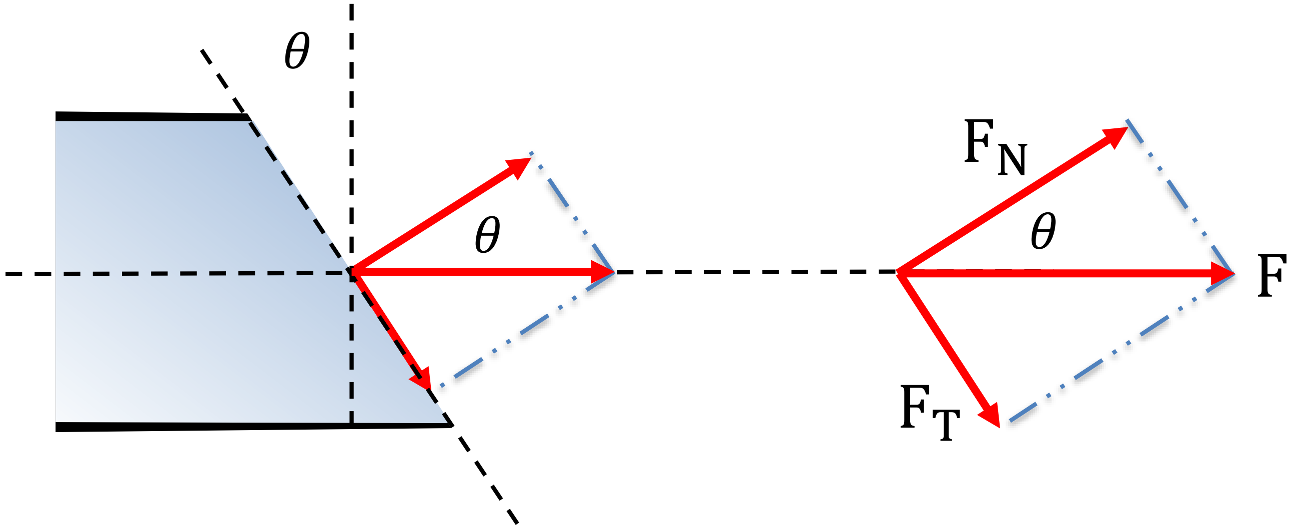


Tensor de tensiones

$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

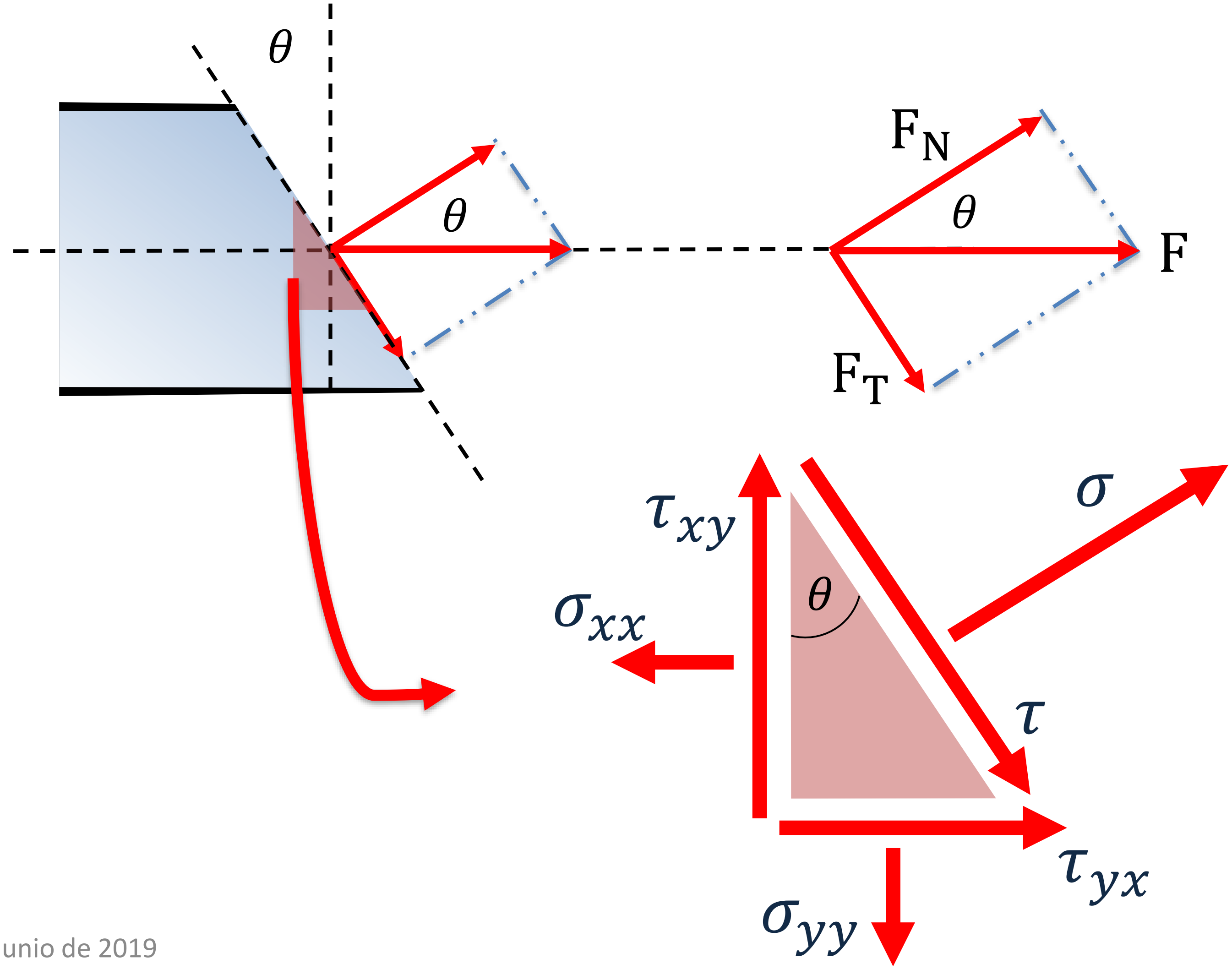
Esfuerzos combinados: Cargas en planos inclinados



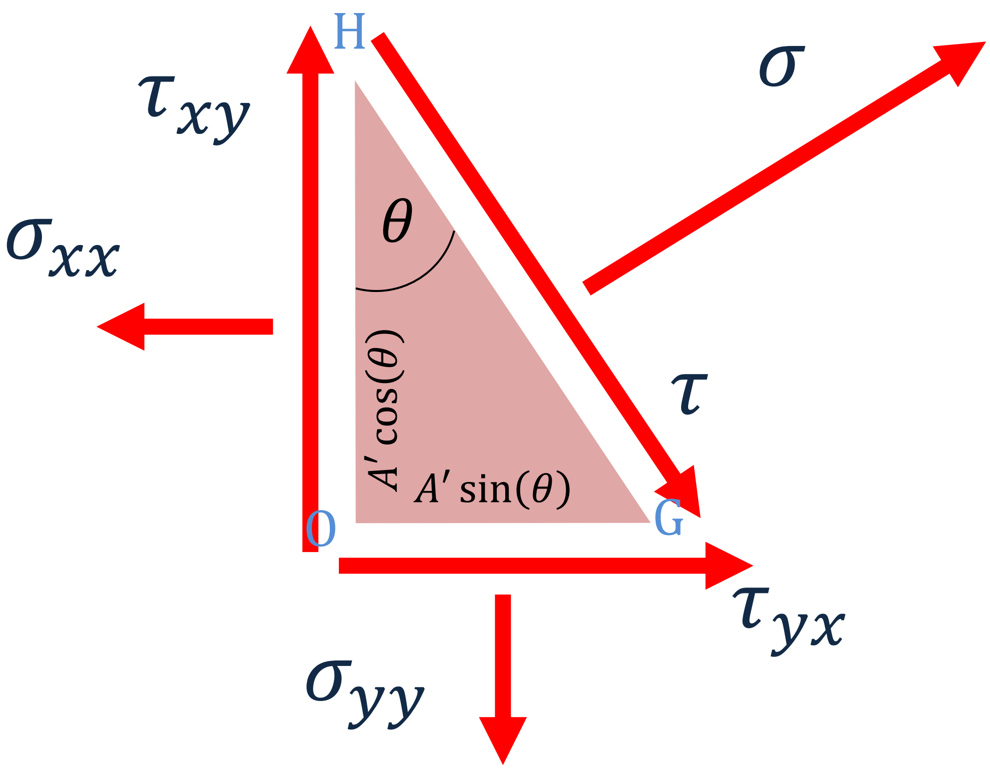
$$\sigma_N = \frac{F_N}{A'} = \frac{F\cos(\theta)}{A/\cos(\theta)} = \frac{F\cos^2(\theta)}{A}$$

$$\tau_T = \frac{F_T}{A'} = \frac{F\sin(\theta)}{A/\cos(\theta)} = \frac{F\sin(2\theta)}{2A}$$

Esfuerzos combinados: Cargas en planos inclinados



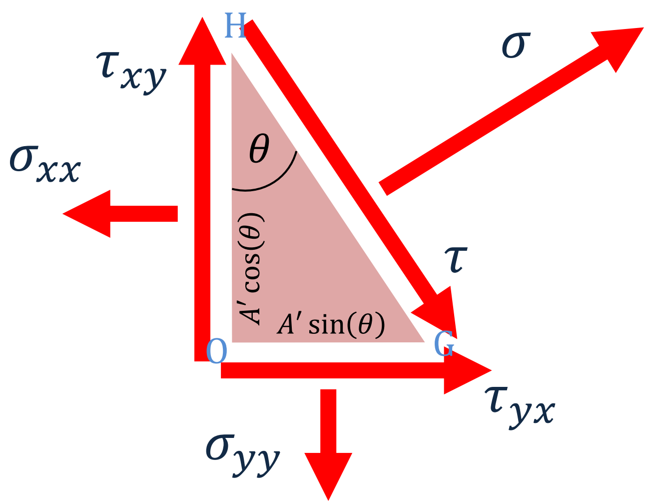
Esfuerzos combinados: Cargas en planos inclinados



Equilibrio estático:

$$\sum F_{x,y} = 0$$

Esfuerzos combinados: Cargas en planos inclinados



Equilibrio estático:

$$\sum F_{x,y} = 0$$

$$\sum F_N = 0:$$

$$\overline{HG}F_N = \overline{OH}\sigma_{xx}A'\cos(\theta) - \overline{OH}\tau_{xy}A'\cos(\theta) + \overline{OG}\sigma_{yy}A'\sin(\theta) - \overline{OG}\tau_{xy}A'\cos(\theta)$$

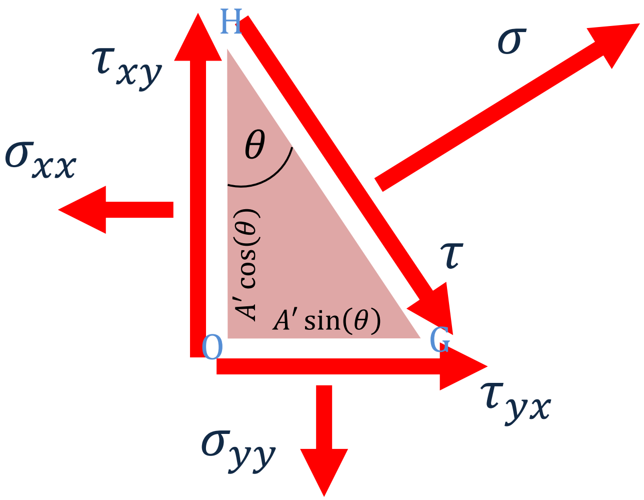
$$\sigma A' = \frac{\overline{OH}}{\overline{HG}}\sigma_{xx}A'\cos(\theta) - \frac{\overline{OH}}{\overline{HG}}\tau_{xy}A'\cos(\theta) + \frac{\overline{OG}}{\overline{HG}}\sigma_{yy}A'\sin(\theta) - \frac{\overline{OG}}{\overline{HG}}\tau_{xy}A'\cos(\theta)$$

$$\sigma = \frac{\overline{HG}\cos(\theta)}{\overline{HG}}\sigma_{xx}\cos(\theta) - \frac{\overline{HG}\cos(\theta)}{\overline{HG}}\tau_{xy}\cos(\theta) + \frac{\overline{HG}\sin(\theta)}{\overline{HG}}\sigma_{yy}\sin(\theta) - \frac{\overline{HG}\sin(\theta)}{\overline{HG}}\tau_{xy}\cos(\theta)$$

$$\sigma = \sigma_{xx}\cos^2(\theta) - \tau_{xy}\cos^2(\theta) + \sigma_{yy}\sin^2(\theta) - \tau_{xy}\sin(\theta)\cos(\theta)$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Esfuerzos combinados: Cargas en planos inclinados



Equilibrio estático:

$$\sum F_{x,y} = 0$$

$$\sum F_T = 0:$$

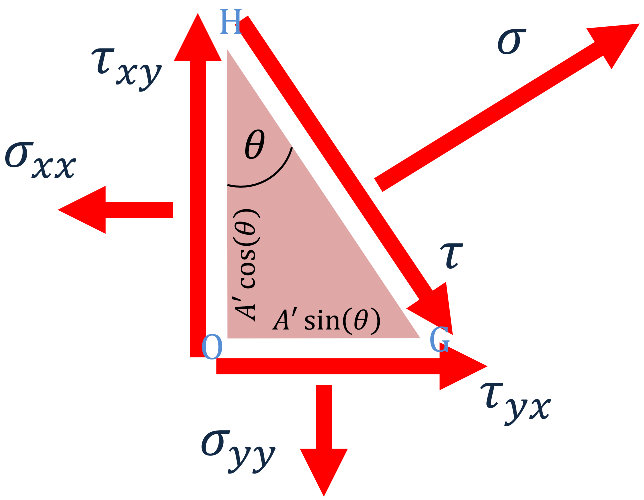
$$\overline{HG}F_T = \overline{OH}\sigma_{xx}A'\sin(\theta) - \overline{OH}\tau_{xy}A'\cos(\theta) + \overline{OG}\sigma_{yy}A'\cos(\theta) - \overline{OG}\tau_{xy}A'\sin(\theta)$$

$$\tau A' = \frac{\overline{OH}}{\overline{HG}}\sigma_{xx}A'\sin(\theta) - \frac{\overline{OH}}{\overline{HG}}\tau_{xy}A'\cos(\theta) + \frac{\overline{OG}}{\overline{HG}}\sigma_{yy}A'\cos(\theta) - \frac{\overline{OG}}{\overline{HG}}\tau_{xy}A'\sin(\theta)$$

$$\tau = \frac{\overline{HG}\cos(\theta)}{\overline{HG}}\sigma_{xx}\sin(\theta) - \frac{\overline{HG}\cos(\theta)}{\overline{HG}}\tau_{xy}\cos(\theta) + \frac{\overline{HG}\sin(\theta)}{\overline{HG}}\sigma_{yy}\cos(\theta) - \frac{\overline{HG}\sin(\theta)}{\overline{HG}}\tau_{xy}\sin(\theta)$$

$$\tau = \sigma_{xx}\sin(\theta)\cos(\theta) - \tau_{xy}\cos^2(\theta) + \sigma_{yy}\sin(\theta)\cos(\theta) - \tau_{xy}\sin^2(\theta)$$

Esfuerzos combinados: Cargas en planos inclinados



Equilibrio estático:

$$\sum F_{x,y} = 0$$

$$\sigma(\theta) = \sigma_{xx}\cos^2(\theta) + 2\tau_{xy}\sin(\theta)\cos(\theta) + \sigma_{yy}\sin^2(\theta)$$
$$\tau(\theta) = \tau_{xy}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) - \left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\cos(2\theta) - \tau_{xy}\sin(2\theta)$$
$$\tau(\theta) = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\sin(2\theta) + \tau_{xy}\cos(2\theta)$$

Esfuerzos combinados: Cargas en planos inclinados

Los máximos esfuerzos se encuentran en ángulos en donde la derivada de los esfuerzos respecto al ángulo es nula:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = -\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\sin(2\theta) - 2\tau_{xy}\cos(2\theta) = 0$$

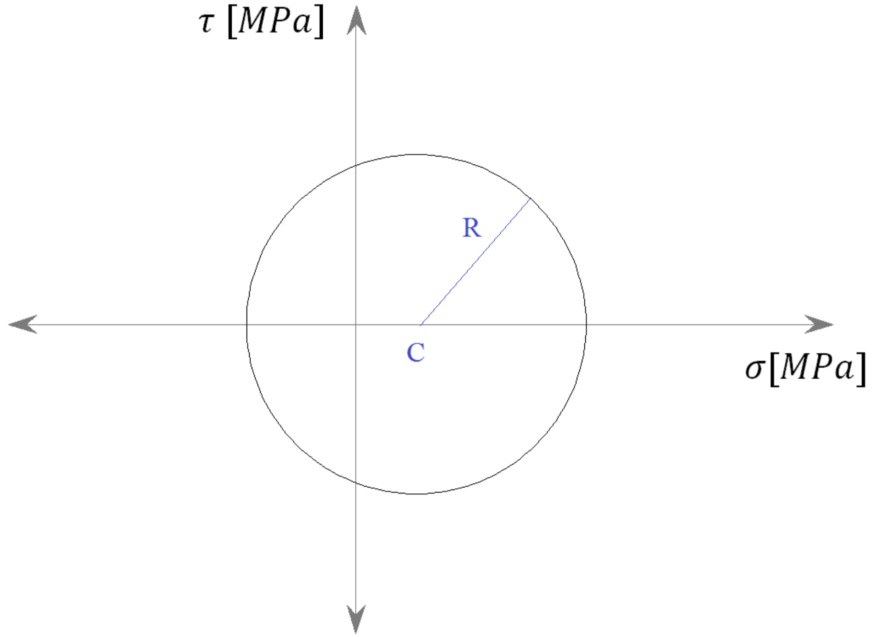
$$\frac{d\tau(\theta)}{d\theta} = \left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\cos(2\theta) - 2\tau_{xy}\sin(2\theta) = 0$$

Esfuerzos combinados: Circulo de Mohr

Combinando las ecuaciones de esfuerzo normal y cortante:

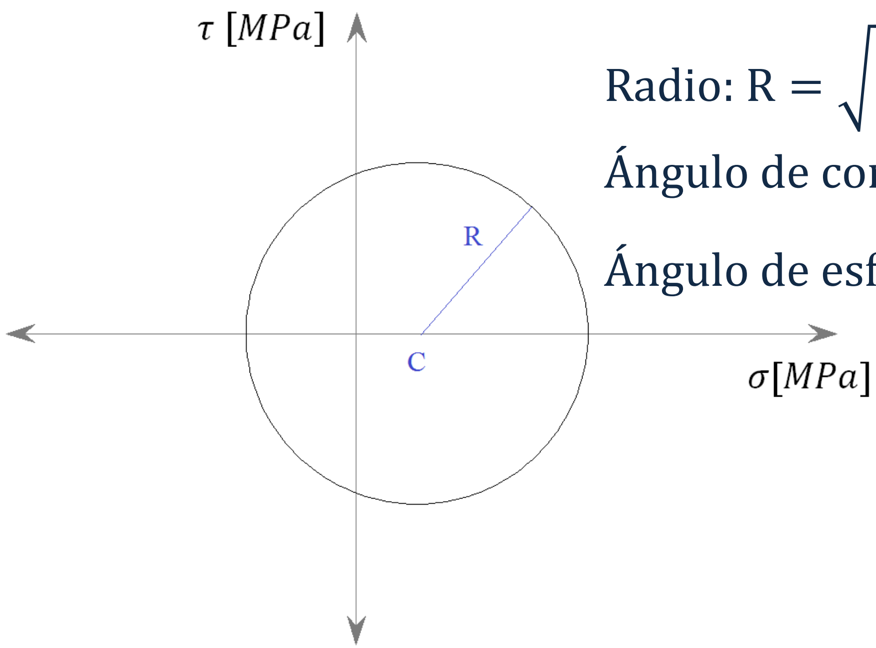
$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\cos(2\theta) - \tau_{xy}\sin(2\theta) \qquad \tau(\theta) = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\sin(2\theta) + \tau_{xy}\cos(2\theta)$$

$$\boxed{\left[\sigma(\theta) - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right]^2 + \tau(\theta)^2 = \left[\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$



Esfuerzos combinados: Circulo de Mohr

$$\boxed{\left[\sigma(\theta) - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right]^2 + \tau(\theta)^2 = \left[\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$



Centro: $C = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}$

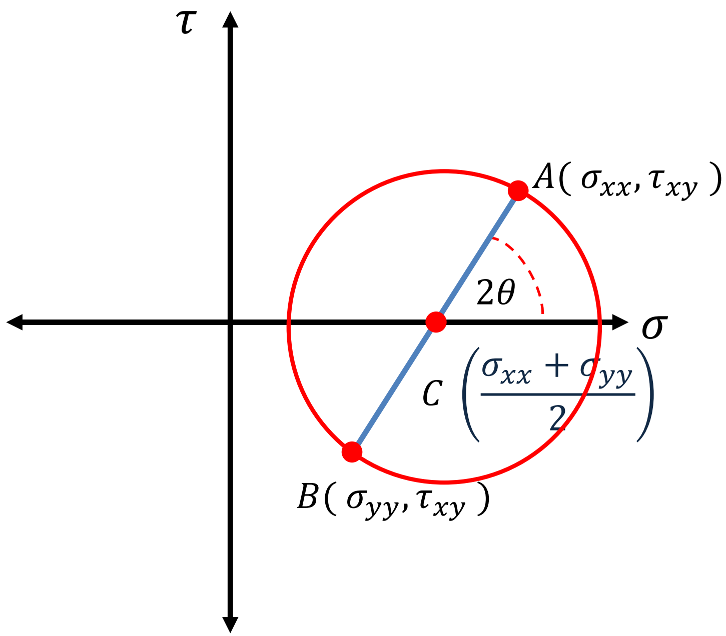
Radio: $\mathrm{R} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2}$

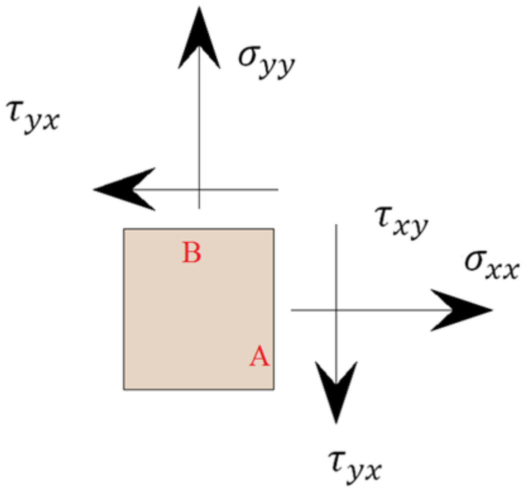
Ángulo de corte máximo: $\tan(2\theta) = \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2\tau_{xy}}$

Ángulo de esfuerzo normal máximo: $\tan(2\theta) = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}$

Esfuerzos combinados: Circulo de Mohr

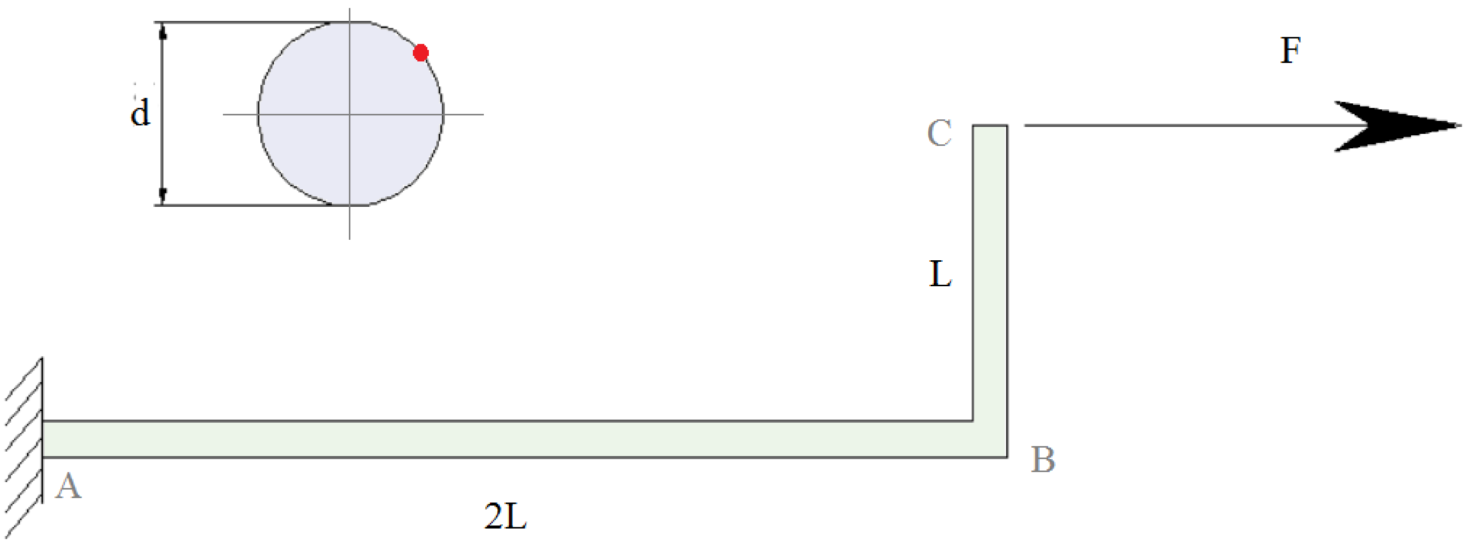
$$\left[\sigma(\theta)-\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\right]^2+\tau(\theta)^2=\left[\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right]^2+\tau_{xy}^2$$





Ejemplo:

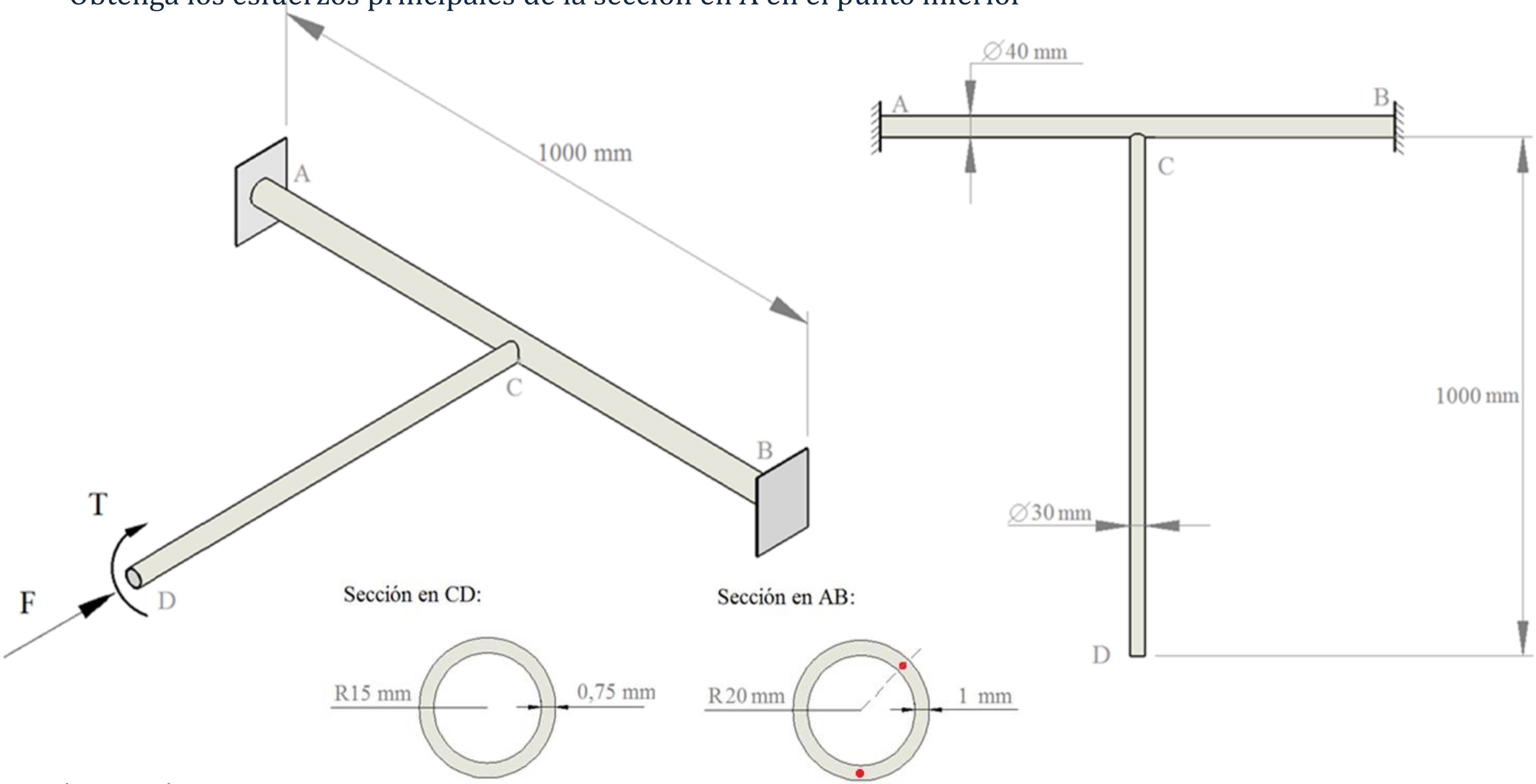
Se tiene el sistema de vigas de la figura. Encontrar el estado principal de esfuerzos y el esfuerzo máximo de corte en el punto señalado de la sección A para la configuración dada, el cual se encuentra a 45° de la normal. Encontrar L máximo para que la estructura no falle:



Ejemplo:

Se tiene el sistema de cañerías de acero (E=210 [GPa]) de la figura. La viga AB se encuentra empotrada en los puntos A y B mientras que la viga CD está unida sólidamente a la viga AB en el punto C. El sistema es cargado con una fuerza puntual F=2 [kN] y un momento torsor T=0,5 [kNm], ambas cargas aplicadas en el punto D:

- Determine las reacciones en los puntos A y B.
- Obtenga los esfuerzos principales de la sección en A en el punto inferior



DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA
MECÁNICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

¿Consultas?

Curso – Resistencia de Materiales [15153]

Plan de estudios - Ingeniería Civil en Mecánica

Profesores: Matías Pacheco Alarcón (**matias.pacheco@usach.cl**)
Aldo Abarca Ortega (**aldo.abarca@usach.cl**)
Ayudante: Estéfano Muñoz (**estefano.munoz@usach.cl**)

Santiago de Chile, Junio 2019